経 営 学 部 の 数 学 基 礎　〜練習問題〜

堀 田　敬 介

2024(R6) / 8 / 16

1　ベクトル

1.1　ベクトルとは

練習 1.1) 次を実施せよ

1. あなたの学籍番号下 2 桁の 2 つの数値を並べて 2 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ をつくり，2 次元平面上に描画せよ
2. そのベクトル $\boldsymbol{a}$ の l_1-ノルム $||\boldsymbol{a}||_1$，l_2-ノルム $||\boldsymbol{a}||_2$，無限大ノルム $||\boldsymbol{a}||_\infty$ を各々求めよ
3. あなたの学籍番号下 3 桁の 3 つの数値を並べて 3 次元ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ をつくり，3 次元空間上に描画せよ
4. そのベクトル $\boldsymbol{b}$ の l_1-ノルム $||\boldsymbol{b}||_1$，l_2-ノルム $||\boldsymbol{b}||_2$，無限大ノルム $||\boldsymbol{b}||_\infty$ を各々求めよ
5. あなたの学籍番号の 6 個の数値を好きな順に並べて 6 次元ベクトル $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$ をつくり示せ
6. そのベクトル $\boldsymbol{c}$ の l_1-ノルム $||\boldsymbol{c}||_1$，l_2-ノルム $||\boldsymbol{c}||_2$，無限大ノルム $||\boldsymbol{c}||_\infty$ を各々求めよ

1.2　和（差）とスカラー倍

練習 1.2) 次を実施せよ

1. あなたの学籍番号下 3 桁の 3 つの数値を並べて 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ をつくり示せ
2. あなたの学籍番号下 3 桁の 3 つの数値を逆に並べ 3 次元ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ をつくり示せ
3. 2 つのベクトルの和 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ と差 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ をそれぞれ計算せよ
4. あなたの学籍番号 2 桁目の数値でスカラー k をつくり，$k\boldsymbol{a}$ と $-k\boldsymbol{b}$ をそれぞれ計算せよ

1.3　内積

練習 1.3) 次を実施せよ

1. あなたの学籍番号下4桁の4つの数値を並べて4次元ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^4$ をつくり示せ
2. あなたの学籍番号下4桁の4つの数値を逆に並べ4次元ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^4$ をつくり示せ
3. 2つのベクトルの内積 $< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >$ を計算せよ
4. 2つのベクトルの l_2-ノルムの積 $||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}||$ を計算せよ
5. 2つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とする．上記結果を用いて $\cos\theta$ を求めよ

1.4　効用関数と Pareto 最適性

練習 1.4) 次を実施せよ

1. あなたが明日の昼に食べたいものを3つあげよ（例：「ご飯，味噌汁，鯖の味噌煮」など）
2. その3つに対し，嬉しさの度合いを表すベクトルを $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とし，各値をあなたの嬉しさの度合いに基づいて設定せよ．ただし，$1 \leq p_1, p_2, p_3 \leq 5$ とする（例：「$p_{\text{ご飯}} = 3$, $p_{\text{味噌汁}} = 2$, $p_{\text{鯖の味噌煮}} = 5$」など）
3. 嬉しさベクトル $\boldsymbol{p}$ と，食べる量を表す変数ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を用いて，あなたの効用関数 $u(\boldsymbol{x}) =< \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} >$ を示せ
4. 実際にあなたが食べる量 $\boldsymbol{x}$ を適当に設定して，そのときの効用関数 $u(\boldsymbol{x})$ の値を求めよ．ただし，$0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 100$, $x_1 + x_2 + x_3 = 100$ とする（例：「$x_{\text{ご飯}} = 30$, $x_{\text{味噌汁}} = 20$, $x_{\text{鯖の味噌煮}} = 50$」など）

練習 *column*) 次を実施せよ

1. スカラー値をとる2つのパラメータ α, β を適当に設定し（ただし $1 \leq \alpha, \beta \leq 9$ とする），1変数関数 $f(x) = \alpha x + \dfrac{\beta}{x}$ の最小値を求めよ（ただし $x > 0$）．また，その最小値を与える x を求めよ．

2　行列

2.1　行列とは

練習 2.1.1) 次を実施せよ

1. $(3,2)$ 行列 A を適当につくり示せ．また，対角成分と非対角成分をそれぞれ全て示せ
2. A^T を求めよ
3. $(2,4)$ 行列 B を適当につくり示せ．また，対角成分と非対角成分をそれぞれ全て示せ
4. B^T を求めよ
5. 4 次正方行列 C を適当につくり示せ．また，対角成分と非対角成分をそれぞれ全て示せ
6. C^T を求めよ
7. あなたの学籍番号下 3 桁の 3 つの数値を対角要素とする 3 次対角行列 D をつくり示せ
8. 2 次単位行列 I_2 をつくり示せ

練習 2.1.2) 次を実施せよ

1. 3 次対称行列 S を適当につくり示せ
2. 3 次歪対称行列 W を適当につくり示せ
3. 3 次上三角行列 U を適当につくり示せ．また U^T は何行列になるか？
4. 3 次下三角行列 L を適当につくり示せ．また L^T は何行列になるか？

練習 2.1.3) 次を実施せよ

1. n 次対称行列 $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ について，$S^T = S$ を証明せよ
2. n 次歪対称行列 $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ について，$W^T = -W$ を証明せよ

2.2　行列の演算

練習 2.2.1) 次を実施せよ

1. $(4,2)$ 行列 A と，$(2,4)$ 行列 B を適当につくり示せ
2. 2 つの行列の積 AB のサイズがどうなるか示せ

3. 2つの行列の積 AB を計算せよ
4. 2つの行列の積 $B^T A^T$ を計算し，積 AB の結果と比較せよ
5. 2つの行列の積 $A^T B^T$ のサイズがどうなるか示せ
6. 2つの行列の積 $A^T B^T$ を計算せよ
7. 2つの行列の積 BA を計算し，積 $A^T B^T$ の結果と比較せよ

練習 2.2.2) 次を実施せよ

1. あなたの学籍番号下3桁の3つの数値を正順に並べた3次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ と逆順に並べた3次元ベクトル $\boldsymbol{y}$ をつくり示せ
2. $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$ を計算せよ
3. $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T$ を計算せよ
4. $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x}$ を計算せよ
5. $\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^T$ を計算せよ
6. 内積 $<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>$ を計算せよ

練習 2.2.3) 次を実施せよ

1. 4次正方行列 A を適当につくれ
2. この行列 A について，$\frac{1}{2}(A + A^T)$ を計算し，結果が対称行列になることを確認せよ．出来た行列を S とする
3. この行列 A について，$\frac{1}{2}(A - A^T)$ を計算し，結果が歪対称行列になることを確認せよ．出来た行列を W とする
4. $S + W$ を計算し，結果がもとの行列 A に一致することを確認せよ
5. 任意の n 次正方行列は，対称行列と歪対称行列の和に一意に分解できることを証明せよ

練習 2.2.4) 次の連立一次方程式をそれぞれ行列表記せよ

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 & = & 3 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 4x_2 & = & 5 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 7x_2 & = & 3 \\ 5x_1 & - & 6x_2 & = & -4 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{array}\right.$

2.3　行列演算の性質

練習 2.3.1) 次を実施せよ

1. 3 つの $(2, 3)$ 行列 A, B, C と，2 つのスカラー p, q を適当につくり,「加法とスカラー倍の性質 1〜6」が成り立つことを確認せよ

練習 2.3.2) 次を実施せよ

1. $(3, 2)$ 行列 A と，$(2, 3)$ 行列 B と，$(3, 1)$ 行列 C と，スカラー p を適当につくり,「乗法とスカラー倍の性質 1〜2」が成り立つことを確認せよ
2. $(3, 2)$ 行列 A と，2 つの $(2, 2)$ 行列 B, C を適当につくり,「乗法とスカラー倍の性質 3」が成り立つことを確認せよ
3. 2 つの $(3, 2)$ 行列 A, B と，$(2, 4)$ 行列 C を適当につくり,「乗法とスカラー倍の性質 4」が成り立つことを確認せよ
4. $(3, 2)$ 行列 A と $(2, 3)$ 行列 B を適当につくり,「乗法とスカラー倍の性質 5」が成り立たないことを確認せよ

2.4　感染症シミュレーション

練習 2.4) テキストを読んで理解し，Excel で再現せよ

3　連立一次方程式を解く

3.1　行列の基本変形と連立一次方程式の解法

練習 3.1) 以下の 3 次元連立一次方程式をそれぞれガウスの消去法で解き，解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を求めよ．ただし，左辺係数行列と右辺定数ベクトルを並べた拡大係数行列に対して，行に関する基本変形を最後まで（階数標準形の左上ブロック行列が単位行列になるまで）実施して求めること

1. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 15x_2 & + & 10x_3 & = & -5 \\ 4x_1 & - & 14x_2 & & & = & -8 \\ -2x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & = & 11 \\ 3x_1 & - & 8x_2 & + & 7x_3 & = & -4 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 11 \\ -4x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & -10 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & & & = & 10 \end{array}\right.$$

3. $\begin{cases} 5x_1 + 15x_2 - 10x_3 = 20 \\ -2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -8 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4 \\ 3x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 12x_3 = 16 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = -2 \end{cases}$

3.2　行列の階数

練習 3.2) 以下の各行列に対して，行に関する基本変形を行い，階数標準形と階数を求めよ

1. $\begin{pmatrix} 2 & -10 & 2 & 8 \\ -4 & 23 & 5 & -10 \\ -2 & 12 & 6 & -8 \\ 3 & -17 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3 & 12 & -6 & 9 \\ 1 & 8 & 6 & -1 \\ 2 & 6 & -8 & 8 \\ -1 & -1 & 8 & -6 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -6 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 16 \end{pmatrix}$

3.3　連立一次方程式の解の存在性

練習 3.3) 練習 3.1 の各連立一次方程式について，左辺係数行列を A，右辺定数ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とし，拡大係数行列を $(A|\boldsymbol{b})$ とする．解 $\boldsymbol{x}$ の次元 n と $\mathrm{rank}(A|\boldsymbol{b}), \mathrm{rank}A$ の値をそれぞれ求め，値と結果を比較せよ

4　グラフ理論と連立一次方程式

4.1　グラフ

練習 4.1) 次を実施せよ

1. 点集合 $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とし，枝集合を $|E| = 8$ となるよう適当に設定して，無向グラフ $G = (V, E)$ をつくり，$|V|$ の値と集合 E を示せ．また作成したグラフを図示せよ
2. このグラフの接続行列 A のサイズ $m \times n$ を答えよ
3. このグラフの接続行列 A をつくれ．ただし，行と列の順番は各集合に示した順とせよ．

4.2　割当問題

練習 4.2) 4 人の部下（$V_p = \{1, 2, 3, 4\}$）に 8 つの仕事（$V_j = \{j_1, j_2, ..., j_8\}$）を割り当てる

1. テキスト表 4.1 と同じ要領で，割当問題を適当につくれ（同様の表を示せばよい）
2. 作成した問題の点集合 $V = V_p \cup V_j$ と枝集合 E，及び $|V|, |E|$ の値をそれぞれ示せ
3. この問題を，テキスト図 4.2 と同じ要領で 2 部グラフで表現せよ
4. テキストと同様の 0-1 変数を用いて，この問題の解を求める連立一次方程式をつくる
   (a) 式 (4.1) に相当する式を示せ．ただし，各部下には 2 つずつ仕事を割り当てる．
   (b) 式 (4.2) に相当する式を示せ
   (c) 接続行列 A のサイズ $m \times n$ を答えよ
   (d) 接続行列 A と右辺ベクトル $\boldsymbol{b}$ をそれぞれ示せ
   (e) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ について，ガウスの消去法で解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ

4.3　2 部グラフの最大マッチング

練習 4.3) 4 人の男性（$V_m = \{1, 2, 3, 4\}$）と 3 人の女性, $V_f = \{1, 2, 3\}$）で幾つかのペアを作る

1. テキスト表 4.2 と同じ要領で，マッチング問題を適当につくれ（同様の表を示せばよい）
2. 作成した問題の点集合 $V = V_m \cup V_f$ と枝集合 E，及び $|V|, |E|$ の値をそれぞれ示せ
3. この問題を，テキスト図 4.3 と同じ要領で 2 部グラフで表現せよ
4. テキストと同様の 0-1 変数を用いて，この問題の解を求める連立一次方程式をつくる
   (a) 式 (4.4) に相当する式を示せ
   (b) 式 (4.5) に相当する式を示せ
   (c) 接続行列 A のサイズ $m \times n$ を答えよ
   (d) 接続行列 A と右辺ベクトル $\boldsymbol{b}$ をそれぞれ示せ
   (e) 連立一次不等式 $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ について，非負のスラック変数ベクトル $\boldsymbol{s}$ ($\boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$) を導入して連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の形に変換し，ガウスの消去法で解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ

4.4　安定集合

練習 4.4) レスキュー隊員が 7 人いる（A, B, ..., G）．要救助者 1 名を助けるべくなるべく大人数の捜索隊を作りたい．レスキュー隊員には連携の練度が不充分のペアが幾組かある．各隊員のペア同士の連携練度は，右表の通りである（o = 連携練度充分，x = 連携練度不充分）

	B	C	D	E	F	G
A	o	o	x	o	x	o
B	-	o	o	o	o	x
C	-	-	o	o	o	o
D	-	-	-	x	x	o
E	-	-	-	-	o	o
F	-	-	-	-	-	x

連携の練度が充分なペアのみで構成される捜索隊を作りたい．この問題は安定集合を求める問題でモデル化出来る

1. 隊員を点集合 $V = \{A, B, \ldots, G\}$ とし，仲が悪い同士に枝を張って枝集合 E をつくる．枝集合 E，及び $|V|, |E|$ の値をそれぞれ示せ
2. この問題を，テキスト図 4.4 と同じ要領で グラフで表現せよ
3. テキストと同様の 0-1 変数を用いて，この問題の解を求める連立一次方程式をつくる
   (a) 式 (4.7) に相当する式を示せ
   (b) 接続行列 A のサイズ $m \times n$ を答えよ
   (c) 接続行列 A と右辺ベクトル $\boldsymbol{b}$ をそれぞれ示せ
   (d) 連立一次不等式 $A^T\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ について，非負のスラック変数ベクトル $\boldsymbol{s}$ ($\boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$) を導入して連立一次方程式 $A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の形に変換し，ガウスの消去法で解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ（※接続行列は転置して使っていることに注意）

4.5　生産計画

練習 4.5) 7 つの資材 (m) を使って 4 つの製品 (p) を作る

1. テキスト表 4.4 と同じ要領で，生産計画問題を適当につくれ（同様の表を示せばよい）
2. テキストと同様の変数を用いて，この問題の解を求める連立一次方程式をつくる
   (a) 変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ の次元はいくつか？
   (b) 式 (4.9) に相当する式を示せ
   (c) 係数行列 A と右辺ベクトル $\boldsymbol{b}$ をそれぞれ示せ
   (d) 連立一次不等式 $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ について，非負のスラック変数ベクトル $\boldsymbol{s}$ ($\boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$) を導入して連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の形に変換し，ガウスの消去法で解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ

4.6 栄養摂取

練習 4.6) 5 つの栄養素と 10 種類の食材を使って栄養摂取問題を作る

1. 5 つの栄養素を適当に選び，一日の必要量や推奨量を各サイトで調査せよ
   <参考 HP 例>
   - 文部科学省：食品成分データベース `https://fooddb.mext.go.jp/index.pl`
   - 文部科学省:日本食品標準成分表 `https://www.mext.go.jp/a_menu/syokuhinseibun/mext_00001.ht`
   - 厚生労働省:日本人の食事摂取基準 `https://www.mhlw.go.jp/stf/seisakunitsuite/bunya/kenkou_`
   - 農林水産省:ちょうどよいバランスの食生活 `https://www.maff.go.jp/j/syokuiku/wakaisedai/atta`
2. 10 種類の食材を適当に選び，単位量あたりの 5 つの栄養素含有量を各サイトで調査せよ
3. 上記結果に基づいて，テキスト表 4.5 と同様の表を作り，栄養摂取問題を完成させよ
4. テキストと同様の変数を用いて，この問題の解を求める連立一次方程式をつくる
   (a) 変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ の次元はいくつか？
   (b) 式 (4.11) に相当する式を示せ
   (c) 係数行列 A と右辺ベクトル $\boldsymbol{b}$ をそれぞれ示せ
   (d) 連立一次不等式 $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ について，非正のサープラス変数ベクトル $\boldsymbol{s}$ ($\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{0}$) を導入して連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の形に変換し，ガウスの消去法で解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ

4.7 輸送計画

練習 4.7) 4 箇所の資材置き場（A,B,C,D）から 6 つの生産工場（1,2,...,6）へ資材を輸送する

1. 各資材置き場の提供可能量と，各生産工場の必要資材量をそれぞれ適切に設定せよ．ただし，提供可能な総量と必要資材の総量を一致させること
2. 資材置き場集合 V_s と生産工場集合 V_d とし，点集合 $V = V_s \cup V_d$ をつくる．2 つの集合 V_s, V_d の任意の 2 点間に枝がある．このとき $|V|, |E|$ の値をそれぞれ示せ
3. この問題を，テキスト図 4.5 と同じ要領で 2 部グラフで表現せよ
4. テキストと同様の変数を用いて，この問題の解を求める連立一次方程式をつくる
   (a) 変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ の次元はいくつか？
   (b) 式 (4.13) に相当する式を示せ
   (c) 式 (4.14) に相当する式を示せ
   (d) 接続行列 A のサイズ $m \times n$ を答えよ
   (e) 接続行列 A と右辺ベクトル $\boldsymbol{b}$ をそれぞれ示せ
   (f) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ について，ガウスの消去法で解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ

5　数列

5.1　等差数列と等比数列

練習 5.1.1) 初項 $a_1 =$[あなたの学籍番号の下 1 桁]，公差 $d =$[あなたの学籍番号の下 2 桁] として等差数列をつくる

1. 公差 d と，最初の 5 項 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 の値を示せ
2. この等差数列の一般項 a_n を式で示せ

練習 5.1.2) 初項 $b_1 =$[あなたの学籍番号 8 桁のうち，2 桁目にある数], 公比 $r =$[あなたの学籍番号の下 1 桁] として等比数列をつくる

1. 公比 r と，最初の 5 項 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 の値を示せ
2. この等比数列の一般項 b_n を式で示せ

5.2　等差数列と等比数列の和

練習 5.2.1) 次を実施せよ

1. 練習 5.1.1 で作った等差数列について，初項 a_1〜末項 a_n の和 S_n の式を示せ
2. 練習 5.1.2 で作った等比数列について，初項 b_1〜末項 b_n の和 S_n の式を示せ

練習 5.2.2) 次を実施せよ

1. あなたの学籍番号下 5 桁の最初の 3 つの数字で初項 a_1 を，残りの 2 つの数字で公差 d をつくる．例えば，下 5 桁が「12345」なら $a_1 = 123, d = 45$ となる
   (a) この等差数列の一般項 a_n を式で示せ
   (b) $n =$[今年の西暦 4 桁] としてこの等差数列の和 S_n を式で示せ
2. あなたの学籍番号下 5 桁の最初の 4 つの数字で初項 b_1 を，残りの 1 つの数字で公比 r をつくる．例えば，下 5 桁が「12345」なら $b_1 = 1234, r = 5$ となる
   (a) この等比数列の一般項 b_n を式で示せ
   (b) $n =$[今年の西暦 4 桁] としてこの等比数列の和 S_n を式で示せ

5.3　お金の時間価値

練習 5.3) 次を実施せよ（いずれも，利息にかかる税金は考慮しなくて良い）

1. 金利 1% で毎月末 2 万円ずつ 5 年間にわたり積立貯金をする．満期には元利併せて幾らになっているか？　この値を求める式を示せ
2. 金利 1% で毎月末 2 万円ずつ積立貯金をする．目標額を 100 万円とするとき，何年何ヶ月後に達成するか？　この値を求める式を示せ
3. 150 万円を金利 5% で借り入れる．毎月末に 3 万円ずつ返済するとき，返済が完了するのは何年何ヶ月後か？　この値を求める式を示せ
4. 150 万円を金利 5% で借り入れる．4 年間で完遂するためには，毎月末，いくらずつ返済する必要があるか？　ただし，返済額は常に同額とする．　この値を求める式を示せ

5.4　ゲーム理論，繰り返し囚人のジレンマ

練習 5.4) 次を実施せよ

1. 表 5.1 を見て，囚人のジレンマ型になるゲームの各プレイヤーの 4 つの利得の関係性を見つけよ
2. 囚人のジレンマ型になるゲームの実例を探して，表 5.1 の形で表現せよ

解答例

練習 1.1) 学籍番号 C4R11789 の場合

1. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$,　図は省略

2. $||\boldsymbol{a}||_1 = |8| + |9| = 17,\ ||\boldsymbol{a}||_2 = \sqrt{8^2 + 9^2} = \sqrt{145},\ ||\boldsymbol{a}||_\infty = \max\{|8|, |9|\} = 9$

3. $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$,　図は省略

4. $||\boldsymbol{b}||_1 = |7| + |8| + |9| = 24,\ ||\boldsymbol{b}||_2 = \sqrt{7^2 + 8^2 + 9^2} = \sqrt{194},\ ||\boldsymbol{b}||_\infty = \max\{|7|, |8|, |9|\} = 9$

5. $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. $||\boldsymbol{c}||_1 = |1| + |4| + |9| + |7| + |8| + |1| = 30,$
   $||\boldsymbol{c}||_2 = \sqrt{1^2 + 4^2 + 9^2 + 7^2 + 8^2 + 1^2} = \sqrt{212} = 2\sqrt{53},$
   $||\boldsymbol{c}||_\infty = \max\{|1|, |4|, |9|, |7|, |8|, |1|\} = 9$

練習 1.2) 学籍番号 C4R11789 の場合

1. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

2. $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

3. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7+9 \\ 8+8 \\ 9+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7-9 \\ 8-8 \\ 9-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. $k\boldsymbol{a} = 4\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 32 \\ 36 \end{pmatrix}$, $-k\boldsymbol{b} = -4\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ -32 \\ -28 \end{pmatrix}$

練習 1.3) 学籍番号 C4R11789 の場合

1. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

2. $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >= 1 \cdot 9 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 7 + 9 \cdot 1 = 130$

4. $||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}|| = \sqrt{1^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2}\sqrt{9^2 + 8^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{195}\sqrt{195} = 195$

5. $\cos\theta = \dfrac{< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >}{||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}||} = \dfrac{130}{195} = \dfrac{2}{3}$

練習 1.4)

1. 1=ご飯，2=味噌汁，3=鯖の味噌煮

2. 1〜3 の効用 $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

3. 摂取量 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ より，効用関数 $u(\boldsymbol{x}) =< \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} >= 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$

4. 摂取量 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}$ とすると，このときの効用関数 $u(\boldsymbol{x})$ の値は
   $u(\boldsymbol{x}) = 3 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 5 \cdot 50 = 380$

練習 *column*) $\alpha = 3, \beta = 5$ とすると，$f(x) = 3x + \dfrac{5}{x}$．比例＋反比例の関数の最小値は，比例関数と反比例関数の交点になるので，最小値を与える x は以下の通り．

$$\begin{cases} y &= 3x \\ y &= \frac{5}{x} \end{cases} \rightleftharpoons 3x = \frac{5}{x} \rightleftharpoons x^2 = \frac{5}{3} \rightarrow x = \sqrt{\frac{5}{3}} \ (x > 0 \text{ より})$$

またこのとき，最小値は

$$f(x) = 3\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{5}{\sqrt{\frac{5}{3}}} = \sqrt{15} + \sqrt{15} = 2\sqrt{15}$$

となる．

練習 2.1.1)

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, 対角成分は $(1,1)$ 要素の 5 と $(2,2)$ 要素の 2, 非対角成分はそれ以外

2. $A^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

3. $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 6 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, 対角成分は $(1,1)$ 要素の 1 と $(2,2)$ 要素の -1, 非対角成分はそれ以外

4. $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

5. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$,
対角成分は $(1,1)$ 要素の 1 と $(2,2)$ 要素の 6 と $(3,3)$ 要素の 2 と $(4,4)$ 要素の 7,
非対角成分はそれ以外

6. $C^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

7. $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$(学籍番号 C4R11789 の場合)

8. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

練習 2.1.2)

1. $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

2. $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -4 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

3. $U=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, U^T は 3 次下三角行列

4. $L=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, L^T は 3 次上三角行列

練習 2.1.3)

1. 定義より自明.
（S の (i,j) 要素を s_{ij} とすると，転値は s_{ij} と s_{ji} を入れ替える操作なので，S^T の (i,j) 要素は s_{ji} である．対称行列の定義より $\forall i,j,\ s_{ij}=s_{ji}$ なので，$S^T=S$）

2. 定義より自明.
（W の (i,j) 要素を w_{ij} とすると，転値は w_{ij} と w_{ji} を入れ替える操作なので，W^T の (i,j) 要素は w_{ji} である．歪対称行列の定義より $\forall i,j,\ w_{ij}=-w_{ji}$ なので，$W^T=-W$）

練習 2.2.1)

1. $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 6 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

2. AB のサイズは 4×4（4 行 4 列）

3.

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 6 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5\cdot 1-3\cdot 6 & 5\cdot 4-3\cdot(-1) & 5\cdot(-2)-3\cdot 2 & 5\cdot 3-3\cdot 5 \\ 0\cdot 1+2\cdot 6 & 0\cdot 4+2\cdot(-1) & 0\cdot(-2)+2\cdot 2 & 0\cdot 3+2\cdot 5 \\ -1\cdot 1+4\cdot 6 & -1\cdot 4+4\cdot(-1) & -1\cdot(-2)+4\cdot 2 & -1\cdot 3+4\cdot 5 \\ 7\cdot 1+0\cdot 6 & 7\cdot 4+0\cdot(-1) & 7\cdot(-2)+0\cdot 2 & 7\cdot 3+0\cdot 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -13 & 23 & -16 & 0 \\ 12 & -2 & 4 & 10 \\ 23 & -8 & 10 & 17 \\ 7 & 28 & -14 & 21 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

4.

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 7 \\ -3 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 12 & 23 & 7 \\ 23 & -2 & -8 & 28 \\ -16 & 4 & 10 & -14 \\ 0 & 10 & 17 & 21 \end{pmatrix}$$

設問 3 と設問 4 の結果より，$B^T A^T = (AB)^T$

5. $A^T B^T$ のサイズは 2×2（2 行 2 列）

6.

$$\begin{aligned} A^T B^T &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 7 \\ -3 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5\cdot 1 + 0\cdot 4 - 1\cdot(-2) + 7\cdot 3 & 5\cdot 6 + 0\cdot(-1) - 1\cdot 2 + 7\cdot 5 \\ -3\cdot 1 + 2\cdot 4 + 4\cdot(-2) + 0\cdot 3 & -3\cdot 6 + 2\cdot(-1) + 4\cdot 2 + 0\cdot 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 28 & 63 \\ -3 & -12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7.

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 6 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & -3 \\ 63 & -12 \end{pmatrix}$$

設問 6 と設問 7 の結果より，$A^T B^T = (BA)^T$

練習 2.2.2) 学籍番号 C4R11789 の場合

1. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

2. $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = 7\cdot 9 + 8\cdot 8 + 9\cdot 7 = 190$

3. $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 & 56 & 49 \\ 72 & 64 & 56 \\ 81 & 72 & 63 \end{pmatrix}$

4. $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + 7 \cdot 9 = 190$

5. $\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^T = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 & 72 & 81 \\ 56 & 64 & 72 \\ 49 & 56 & 63 \end{pmatrix}$

6. $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= 7 \cdot 9 + 8 \cdot 8 + 9 \cdot 7 = 190$

練習 2.2.3)

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 9 \\ 8 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

2. $S = \frac{1}{2}(A+A^T) = \frac{1}{2}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 9 \\ 8 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 8 \\ -3 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 9 & 4 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

3. $W = \frac{1}{2}(A-A^T) = \frac{1}{2}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 9 \\ 8 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 8 \\ -3 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 9 & 4 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

4. $S + W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 9 \\ 8 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix} = A$

5. 省略

練習 2.2.4)

1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \\ 4 & 7 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

練習 2.3.1) 省略

練習 2.3.2) 省略

練習 2.4) 省略

練習 3.1)

1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -15 & 10 & -5 \\ 4 & -14 & 0 & -8 \\ -2 & 8 & 9 & 11 \\ 3 & -8 & 7 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & -14 & 0 & -8 \\ -2 & 8 & 9 & 11 \\ 3 & -8 & 7 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -8 & -4 \\ -2 & 8 & 9 & 11 \\ 3 & -8 & 7 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -8 & -4 \\ 0 & 2 & 13 & 9 \\ 3 & -8 & 7 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -8 & -4 \\ 0 & 2 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{6} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{7} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{8} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{9} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{10} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{11} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{12} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

故に，唯一解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

1. (1 行目) を $\frac{1}{5}$ 倍する
2. (1 行目) を -4 倍して，(2 行目) に加える
3. (1 行目) を 2 倍して，(3 行目) に加える
4. (1 行目) を -3 倍して，(4 行目) に加える
5. (2 行目) を $-\frac{1}{2}$ 倍する
6. (2 行目) を 3 倍して，(1 行目) に加える
7. (2 行目) を -2 倍して，(3 行目) に加える
8. (2 行目) を -1 倍して，(4 行目) に加える
9. (3 行目) を $\frac{1}{5}$ 倍する
10. (3 行目) を -14 倍して，(1 行目) に加える
11. (3 行目) を -4 倍して，(2 行目) に加える
12. (3 行目) を 3 倍して，(4 行目) に加える

「行に関する基本変形」はどの順番で実施しても良いので，次の様にしてもよい（人によっては，こっちの方が簡単で分かり易いかもしれない）

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -15 & 10 & -5 \\ 4 & -14 & 0 & -8 \\ -2 & 8 & 9 & 11 \\ 3 & -8 & 7 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -1 & \frac{7}{2} & 0 & 2 \\ -1 & 4 & \frac{9}{2} & \frac{11}{2} \\ -1 & \frac{8}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ -1 & 4 & \frac{9}{2} & \frac{11}{2} \\ -1 & \frac{8}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{13}{2} & \frac{9}{2} \\ -1 & \frac{8}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{13}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -\frac{13}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{6} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -\frac{13}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{7} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{8} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{9} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{10} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{11} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{12} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. (1 行目) を $\frac{1}{5}$ 倍し，(2 行目) を $-\frac{1}{4}$ 倍し，(3 行目) を $\frac{1}{2}$ 倍し，(4 行目) を $-\frac{1}{3}$ 倍する.
2. (1 行目) を 1 倍して，(2 行目) に加える
3. (1 行目) を 1 倍して，(3 行目) に加える
4. (1 行目) を 1 倍して，(4 行目) に加える
5. (2 行目) を 2 倍し，(3 行目) を -1 倍し，(4 行目) を 3 倍する.
6. (2 行目) を 3 倍して，(1 行目) に加える
7. (2 行目) を 1 倍して，(3 行目) に加える
8. (2 行目) を 1 倍して，(4 行目) に加える
9. (3 行目) を $-\frac{2}{5}$ 倍し，(4 行目) を -1 倍する.
10. (3 行目) を -14 倍して，(1 行目) に加える
11. (3 行目) を -4 倍して，(2 行目) に加える
12. (3 行目) を 1 倍して，(4 行目) に加える

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 11 \\ -4 & 1 & -5 & -10 \\ 2 & 2 & 0 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 11 \\ -4 & 1 & -5 & -10 \\ 2 & 2 & 0 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ -4 & 1 & -5 & -10 \\ 2 & 2 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 2 & 2 & 0 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{6} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{7} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{8} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

故に，$x_3 = t$ として，解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-t \\ 2+t \\ t \end{pmatrix}$ である．t は任意

1. (1 行目) を $\frac{1}{3}$ 倍する
2. (1 行目) を -1 倍して，(2 行目) に加える
3. (1 行目) を 4 倍して，(3 行目) に加える
4. (1 行目) を -2 倍して，(4 行目) に加える
5. (2 行目) を $\frac{1}{5}$ 倍する
6. (2 行目) を 1 倍して，(1 行目) に加える
7. (2 行目) を 3 倍して，(3 行目) に加える
8. (2 行目) を -4 倍して，(4 行目) に加える

3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 15 & -10 & 20 \\ -2 & -6 & 4 & -8 \\ -1 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 9 & -6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & -6 & 4 & -8 \\ -1 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 9 & -6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 9 & -6 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & -6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

故に，$x_2 = s, x_3 = t$ として，解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3s+2t \\ s \\ t \end{pmatrix}$ である．s, t は任意

1. (1 行目) を $\frac{1}{5}$ 倍する
2. (1 行目) を 2 倍して，(2 行目) に加える
3. (1 行目) を 1 倍して，(3 行目) に加える
4. (1 行目) を −3 倍して，(4 行目) に加える

4.

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 7 & -8 \\ -2 & 3 & -12 & 16 \\ 3 & 1 & 7 & -2 \end{array}\right)
\xrightarrow{1}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & -8 \\ -2 & 3 & -12 & 16 \\ 3 & 1 & 7 & -2 \end{array}\right)
\xrightarrow{2}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & -10 \\ -2 & 3 & -12 & 16 \\ 3 & 1 & 7 & -2 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{3}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & -10 \\ 0 & 5 & -10 & 20 \\ 3 & 1 & 7 & -2 \end{array}\right)
\xrightarrow{4}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & -10 \\ 0 & 5 & -10 & 20 \\ 0 & -2 & 4 & -8 \end{array}\right)
\xrightarrow{5}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{3} \\ 0 & 5 & -10 & 20 \\ 0 & -2 & 4 & -8 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{6}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{3} \\ 0 & 5 & -10 & 20 \\ 0 & -2 & 4 & -8 \end{array}\right)
\xrightarrow{7}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & -2 & 4 & -8 \end{array}\right)
\xrightarrow{8}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{9}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{array}\right)
\xrightarrow{10}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

故に，解なし（最後の 3 行目の方程式 $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$ を満たす解 $\boldsymbol{x}$ は存在しない）.

1. (1 行目) を $\frac{1}{3}$ 倍する.
2. (1 行目) を −1 倍して，(2 行目) に加える
3. (1 行目) を 2 倍して，(3 行目) に加える
4. (1 行目) を −3 倍して，(4 行目) に加える
5. (2 行目) を $-\frac{1}{3}$ 倍する.
6. (2 行目) を −1 倍して，(1 行目) に加える
7. (2 行目) を −5 倍して，(3 行目) に加える
8. (2 行目) を 2 倍して，(4 行目) に加える
9. (3 行目) を $\frac{3}{10}$ 倍する.
10. (3 行目) を $\frac{4}{3}$ 倍して，(4 行目) に加える

練習 3.2)

1.

$$\begin{pmatrix} 2 & -10 & 2 & 8 \\ -4 & 23 & 5 & -10 \\ -2 & 12 & 6 & -8 \\ 3 & -17 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ -4 & 23 & 5 & -10 \\ -2 & 12 & 6 & -8 \\ 3 & -17 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 6 \\ -2 & 12 & 6 & -8 \\ 3 & -17 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 3 & -17 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって，階数は 4．なお，更に基本変形を続けると以下の通り．

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 16 & 14 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 46 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 46 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 3 & 12 & -6 & 9 \\ 1 & 8 & 6 & -1 \\ 2 & 6 & -8 & 8 \\ -1 & -1 & 8 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 8 & 6 & -1 \\ 2 & 6 & -8 & 8 \\ -1 & -1 & 8 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & -4 \\ 2 & 6 & -8 & 8 \\ -1 & -1 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 8 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

よって，階数は 2．なお，更に基本変形を続けると以下の通り．

$$
\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -10 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

3.

$$
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -6 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -11 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -11 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 3 & -3 & 7 & 16 \end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -11 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & -11 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -11 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -15 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -15 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}
$$

$$
\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

よって，階数は 3．なお，更に基本変形を続けると以下の通り．

$$
\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

練習 3.3)

1. $rank(A|\boldsymbol{b}) = 3, rankA = 3, n = 3$ より $rank(A|\boldsymbol{b}) = rankA = n$ で唯一解
2. $rank(A|\boldsymbol{b}) = 2, rankA = 2, n = 3$ より $rank(A|\boldsymbol{b}) = rankA \neq n$ で無限解
3. $rank(A|\boldsymbol{b}) = 1, rankA = 1, n = 3$ より $rank(A|\boldsymbol{b}) = rankA \neq n$ で無限解
4. $rank(A|\boldsymbol{b}) = 3, rankA = 2, n = 3$ より $rank(A|\boldsymbol{b}) \neq rankA$ で解なし

練習 4.1) 省略

練習 4.2) 省略

練習 4.3) 省略

練習 4.4) 省略

練習 4.5) 省略

練習 4.6) 省略

練習 4.7) 省略

練習 5.1.1) 学籍番号 $c3r11345$ とする

1. $d = 45,\ a_1 = 5, a_2 = 50, a_3 = 95, a_4 = 140, a_5 = 185$
2. $a_n = 5 + 45(n-1)$

練習 5.1.2) 学籍番号 $c3r11345$ とする

1. $r = 5,\ b_1 = 3, b_2 = 15, b_3 = 75, b_4 = 375, b_5 = 1875$
2. $b_n = 3 \cdot 5^{n-1}$

練習 5.2.1)

1. $S_n = \dfrac{(2 \cdot 5 + 45(n-1))n}{2}$
2. $S_n = \dfrac{3(1-5^n)}{1-5}$

練習 5.2.2) 学籍番号 $c3r11345$ とする

1. $a_1 = 113,\ d = 45$
   (a) $a_n = 113 + 45(n-1)$
   (b) $n = 2024$ とすると，$S_n = \dfrac{(2 \cdot 113 + 45(2024-1)) \cdot 2024}{2}$
2. $b_1 = 1134,\ r = 5$
   (a) $b_n = 1134 \cdot 5^{n-1}$
   (b) $n = 2024$ とすると，$S_n = \dfrac{1134(1-5^{2024})}{1-5}$

練習 5.3)

1. 将来価値 $FV = PV \times (1+r)^n$，5 年=60 ヶ月，金利 1%（年利）は月利 $\frac{1}{12}$% より，

$$
\begin{aligned}
1\text{ ヶ月後に預ける 2 万円の 5 年後の元利合計} &: \quad FV_1 = 20000 \times (1 + \frac{1}{1200})^{60-1} \\
2\text{ ヶ月後に預ける 2 万円の 5 年後の元利合計} &: \quad FV_2 = 20000 \times (1 + \frac{1}{1200})^{60-2} \\
3\text{ ヶ月後に預ける 2 万円の 5 年後の元利合計} &: \quad FV_3 = 20000 \times (1 + \frac{1}{1200})^{60-3} \\
&\cdots \\
60\text{ ヶ月後に預ける 2 万円の 5 年後の元利合計} &: \quad FV_{60} = 20000 \times (1 + \frac{1}{1200})^{60-60}
\end{aligned}
$$

これを最後から逆順に見ると，初項 $a_1 = 2$ 万，公比 $r = \frac{1201}{1200}$，項数 $n = 60$ の等比数列なので，元利総額（60 ヶ月後の将来価値 FV 合計）はその和となる

$$
S_n = \sum_{i=1}^{60} 20000 \cdot \left(\frac{1201}{1200}\right)^{i-1} = \frac{20000(1 - \left(\frac{1201}{1200}\right)^{60})}{1 - \frac{1201}{1200}} = \frac{20000(1 - \left(\frac{1201}{1200}\right)^{60})}{-\frac{1}{1200}}
$$

2. まず計算の目安として，100 万円÷ 2 万円=50 より，箪笥預金なら 50 ヶ月（=4 年 2 ヶ月）かかるため，利息を考えると答えはこれ以下となる．問題は上と同じなので，n ヶ月後の元利合計は，同じ等比数列の和 S_n で表せ，これが 100 万円以上となる期間（n ヶ月）を求めれば良い．よって，

$$\frac{20000(1-\left(\frac{1201}{1200}\right)^n)}{-\frac{1}{1200}} \geq 1000000$$

を満たす n を求めれば良い．

$$\begin{aligned}
\leftrightarrow \quad & 1-\left(\frac{1201}{1200}\right)^n \leq -\frac{1000000}{20000\cdot 1200} \\
\leftrightarrow \quad & \left(\frac{1201}{1200}\right)^n \geq 1+\frac{1}{2\cdot 12} = \frac{25}{24} \\
\leftrightarrow \quad & n(\log 1201 - \log 1200) \geq \log 25 - \log 24 \\
\leftrightarrow \quad & n \geq \frac{\log 25 - \log 24}{\log 1201 - \log 1200} \approx 49.0068\cdots
\end{aligned}$$

よって，約 49 ヶ月（箪笥預金より約 1 ヶ月短いので，1 ヶ月分の積立額 2 万円が利息分でまかなわれることになる）

3. 年利 5% なので，月利 $r = \frac{5}{12}\% = \frac{5}{1200} = \frac{1}{240}$．テキスト例と同様の問題なので，$n$ か月後の借金残額は

$$\begin{aligned}
&150\,\text{万円}\left(1+\frac{1}{240}\right)^n - 3\,\text{万円}\left(\left(1+\frac{1}{240}\right)^{n-1} + \left(1+\frac{1}{240}\right)^{n-2} + \cdots + \left(1+\frac{1}{240}\right)^1 + 1\right) \\
&= 150\,\text{万円}\left(1+\frac{1}{240}\right)^n - 3\,\text{万円}\frac{\left(1+\frac{1}{240}\right)^n - 1}{\left(1+\frac{1}{240}\right) - 1} \\
&= \left\{150\,\text{万円} - \frac{3\,\text{万円}}{\frac{1}{240}}\right\}\left(1+\frac{1}{240}\right)^n + \frac{3\,\text{万円}}{\frac{1}{240}} \\
&= -570\,\text{万円}\left(1+\frac{1}{240}\right)^n + 720\,\text{万円}
\end{aligned}$$

となる．よって，期間 n（月）を求める式は以下．

$$-570\,\text{万円}\left(1+\frac{1}{240}\right)^n + 720\,\text{万円} \leq 0$$

4. 年利 5% なので，月利 $r = \frac{5}{12}\% = \frac{5}{1200} = \frac{1}{240}$．4 年間は $4\times 12 = 48$ ヵ月．毎月の返済額

を p とすると，48 か月後の借金残額は

$$
\begin{aligned}
&150\text{ 万円}\left(1+\frac{1}{240}\right)^{48}-p\left(\left(1+\frac{1}{240}\right)^{47}+\left(1+\frac{1}{240}\right)^{46}+\cdots+\left(1+\frac{1}{240}\right)^{1}+1\right)\\
&=150\text{ 万円}\left(1+\frac{1}{240}\right)^{48}-p\frac{\left(1+\frac{1}{240}\right)^{48}-1}{\left(1+\frac{1}{240}\right)-1}\\
&=150\text{ 万円}\left(1+\frac{1}{240}\right)^{48}-240p\left\{\left(1+\frac{1}{240}\right)^{48}-1\right\}
\end{aligned}
$$

となる．よって，返済額 p を求める式は以下.

$$
\begin{aligned}
&150\text{ 万円}\left(1+\frac{1}{240}\right)^{48}-240p\left\{\left(1+\frac{1}{240}\right)^{48}-1\right\}\leq 0\\
\leftrightarrow\quad & p\geq\frac{150\text{ 万円}\left(1+\frac{1}{240}\right)^{48}}{240\left\{\left(1+\frac{1}{240}\right)^{48}-1\right\}}
\end{aligned}
$$

練習 5.4)

1. 囚人のジレンマ型のゲームの各値を B, S, T, W で表すと次の表のとおり.

$\alpha\backslash\beta$	C	D
C	(S,S)	(W,B)
D	(B,W)	(T,T)

このとき，各値の大小関係は $B>S>T>W$ となっている.
（※ B:best, S:2nd best, T:3rd best, W:worst）

2. 省略