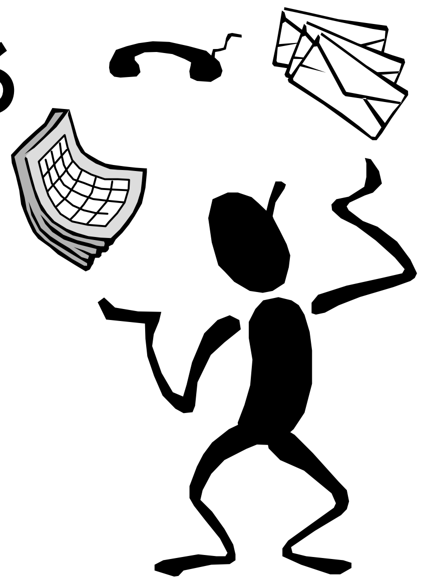
双対問題

別な観点から問題を眺める



例題1

- 文教工業:2つの素材Q,Rを製造販売
- 両素材共, 原液A,Bから生産
- 利益最大の生産計画は？

	素材Q 1kg当たり	素材R 1kg当たり	使用可能量
原液A	2(kl)	1(kl)	70(kl/日)
原液B	3(kl)	4(kl)	180(kl/日)
利益	6(千円)	4(千円)	

定式化してみよう！

定式化

製品Aの製造量をx_1，製品Bの製造量をx_2とおく．

$$
\begin{array}{lll}
\max & 6x_1 + 4x_2 & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \le 70 & \cdots ① \\
 & 3x_1 + 4x_2 \le 180 & \cdots ② \\
 & x_1, x_2 \ge 0 &
\end{array}
$$

最適値はどの程度？
見積もってみよう

見積もり例

制約式①×2+制約式②×1：$7x_1+6x_2 \leqq 70\times 2+180=320$

$\rotatebox{90}{$\leqq$}$ ← $x_1,x_2 \geqq 0$より

目的関数：$6x_1+4x_2$

⇒ 最適値の**上界**は320

演習1：もっと良い見積もりをしてみよう

より良い上界の見積もり方法

各制約式を何倍するのが適切かを考える

小さくしたい

制約式①×y_1+制約式②×y_2：

$$(2x_1+x_2)\times y_1+(3x_1+4x_2)\times y_2 \leqq 70y_1+180y_2$$

$$\parallel$$

$$(2y_1+3y_2)\times x_1+(y_1+4y_2)\times x_2$$

$$\geqq$$

目的関数：$6x_1+5x_2$

$$2y_1+3y_2 \geqq 6$$
$$y_1+4y_2 \geqq 5$$

$$\begin{array}{ll} \min & 70y_1+180y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1+3y_2 \geq 6 \\ & y_1+4y_2 \geq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

この問題の最適解が最良の上界を与える

演習2

次の問題の最適値の**より良い下界**を求める
線形計画問題を作ってみよう

$$\begin{array}{ll} \min & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

どのような線形計画問題が得られるか？

双対な関係

問題(P)

$$\begin{array}{ll} \max & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \le 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

問題(D)

$$\begin{array}{ll} \min & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \ge 6 \\ & y_1 + 4y_2 \ge 4 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{array}$$

主問題 $\longrightarrow$ 双対問題

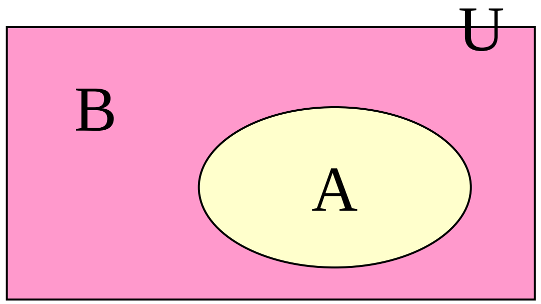
双対問題 $\longleftarrow$ 主問題

「双対（そうつい）」とは

- あるAに，ある操作αを行ったら，Bを得た．
- Bに，操作αを行ったら，Aを得た．

AとBは（操作αに関し）双対の関係

（例）　集合Uの部分集合A：
集合Aの補集合を集合Bとする．
集合Bの補集合は集合A．



⇒集合Aと集合Bは（補集合という操作に関し）双対．

面白そうな双対の関係

- (射影) 幾何学の分野：点と線は双対.
  - 定理「2点を通る直線は1つ」
  - 定理「2直線を通る点は1つ」

  双対性 (duality)

- いろいろな数理的な場面で双対の関係が本質的に重要役割を演じることが多い.
- 線形計画 (数理計画) の分野にも…

演習3:解いてみよう

シンプレックス法で最適解と最適値を求めよ

主問題(P)

$$\begin{array}{ll} \max & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \le 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

双対問題(D)

$$\begin{array}{ll} \min & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \ge 6 \\ & y_1 + 4y_2 \ge 4 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{array}$$

→各々の最終的なシンプレックス表を比較せよ

主問題

製品Aの**製造量を**x_1, **製品B**の**製造量を**x_2**とおく.**

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 6x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + \ \ x_2 \le 70 \\
& 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

シンプレックス法で解く

シンプレックス表(最終)

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	4/5	-2/5	20
x2	0	0	1	-3/5	2/5	30
z	1	0	0	12/5	2/5	240

最適解 $x_1 = 20$, $x_2 = 30$

双対問題

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 70y_1 + 180y_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2y_1 + 3y_2 \ge 6 \\
& y_1 + 4y_2 \ge 4 \\
& y_1, y_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & (-z) = -70y_1 - 180y_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2y_1 + 3y_2 - s_1 = 6 \\
& y_1 + 4y_2 - s_2 = 5 \\
& y_1, y_2, s_1, s_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

2段階シンプレックス表 (最終)

基底変数	(-z)	y1	y2	s1	s2	定数項
y1	0	1	0	-4/5	3/5	12/5
y2	0	0	1	1/5	-2/5	2/5
(-z)	1	0	0	20	30	240

比較

主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \le 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	4/5	-2/5	20
x2	0	0	1	-3/5	2/5	30
z	1	0	0	12/5	2/5	240

双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + 3y_2 \ge 6 \\ & y_1 + 4y_2 \ge 4 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

基底変数	(-z)	y1	y2	s1	s2	定数項
y1	0	1	0	-4/5	3/5	12/5
y2	0	0	1	1/5	-2/5	2/5
(-z)	1	0	0	20	30	-240

主問題の最適値⇔双対問題の最適値

主 (双対) 問題の最適解⇔双対 (主) 問題の限界価値

偶然？

主問題

$$\max.\ \mathbf{c}^t\mathbf{x}$$
$$\text{s.t.}\quad \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

双対問題

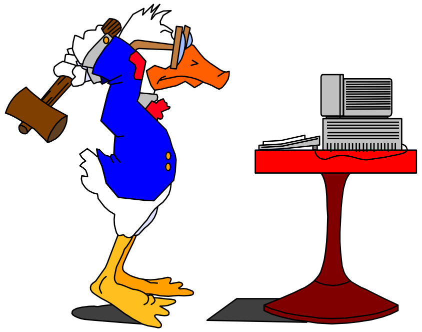
$$\min.\ \mathbf{b}^t\mathbf{y}$$
$$\text{s.t.}\quad \mathbf{A}^t\mathbf{y} \ge \mathbf{c}$$
$$\mathbf{y} \ge \mathbf{0}$$

主問題と双対問題の関係

◆双対問題の双対問題は主問題

◆ (主問題の最適値) ＝ (双対問題の最適値)

◆ (主問題の限界価値) ⇔ (双対問題の最適解)
(主問題の最適解) ⇔ (双対問題の限界価値)



演習4

以下の線形計画問題を解きなさい.

(1)
$$\begin{aligned} \min\ & 10x_1 + 20x_2 + 30x_3 \\ \text{s.t.}\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} \min\ & 30x_1 + 10x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & 5x_1 + x_2 \geq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

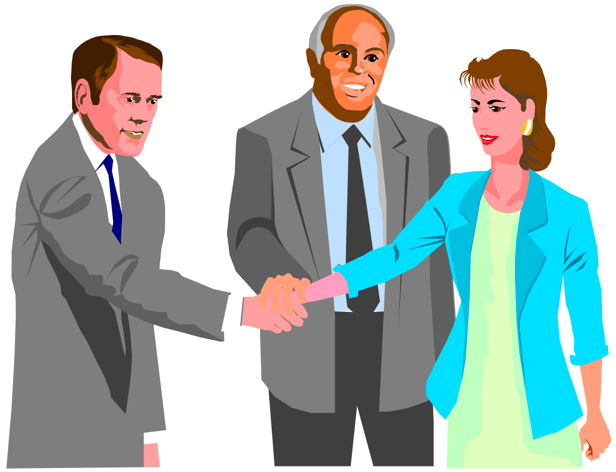
双対問題を作り, 双対定理を利用することにより

上記の問題を解きなさい

双対問題の解釈

原料奪取作戦

- 湘南商事は, 原料A,Bが不足
  →文教工業からすべて買い取りたい
- 原料A,Bの買取価格をいくらにすべき？



湘南商事側の考え

考え1 文教工業は製品を製造することによって得られる利益以下では売らないだろう

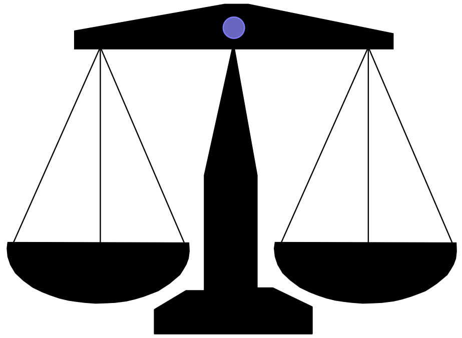
考え2 買取費用はなるべく少なくしたい

数理モデルへの定式化
湘南商事側

- 原料A:買取価格をy_1(円/kl)
  原料B:買取価格をy_2(円/kl)
- 考え1より
  - 製品P(Q)1個を製造するのに使用する原料の量を買い取るには, 製品P(Q)が生み出す利益以上の金額を提示すべきである.
- 考え2より
  - 買取費用は $70y_1 + 180y_2$.

定式化してみよう！

もう少し慣れてみよう
例題2



- 文教薬品では成分Aと成分Bを含む薬Pと薬Qを製造販売している.

	薬P	薬Q
成分A (1g当たりの含有量, 100mg)	2	1
成分B (1g当たりの含有量, 100mg)	2	3
価格 (1g当たり, 千円)	5	6

薬を買う側の問題

- 行谷君は病気で成分Aを400mg/日以上，成分Bを600mg /日以上摂取しなくてはならない．
- 薬P,Qの成分や価格のデータは既知である．
- 薬Pと薬Qを購入することにより，なるべく安く必要量を摂取したい．
- さてどのような購入計画を立てればよいか？定式化して最適解を求めなさい．

薬の原料を売る側の問題

- 湘南商事は文教薬品に成分Aと成分Bを卸している．
- 薬P,Qの成分データや消費者に売っている価格は知っている．
- 湘南商事は利益が最大になるように成分A,Bを売りたい．
- 各々にいくらの値をつけることが可能か？定式化して解を求めなさい．

双対定理

- 主問題に有界な最適解が存在するとき，双対問題にも有界な最適解が存在し，それぞれの目的関数値は一致する．

•さまざまな社会活動の動きの一面を説明できる．

•さまざまなアルゴリズムにこの事実は応用できる．

•主問題を解くより，双対問題を解き，双対定理を用いて解を導いたほうが楽なときがある．

演習5

製品P,Q,Rは職人A,Bの手にかかり完成する．

（例えば，製品Pは職人Aが3時間費やし，さらに職人Bが2時間手をくわえることにより完成する）

利益を最大にする生産計画を提案せよ．

	製品P	製品Q	製品R	一週間当たりの最大作業時間
職人Aが一個作製するのに必要な時間	3時間	2時間	4時間	40時間
職人Bが一個作製するのに必要な時間	2時間	4時間	3時間	42時間
1個当たりの利益	8000	7000	10000	（円）

上記の問題の双対問題を作成し，その問題がどのような意味を持つか自由に発想し解釈せよ．