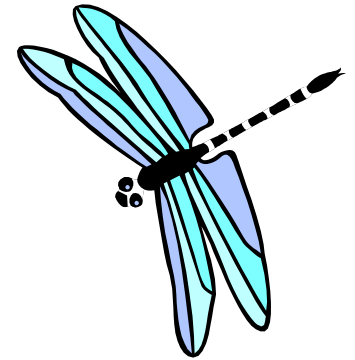


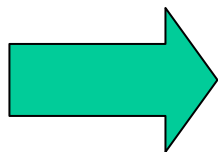
連立方程式の解き方

行列と連立方程式
ガウスの消去法

連立方程式



- さまざまな問題を解く過程に姿をあらわす。
 - ORに限らず，経済，医療などさまざまな分野に現れる モデル分析の基本
- 実際には数多くの変数，方程式から成る連立方程式を解く必要がある。
 - 例：飛行機クルーのスケジュール
1万変数，100万本の方程式

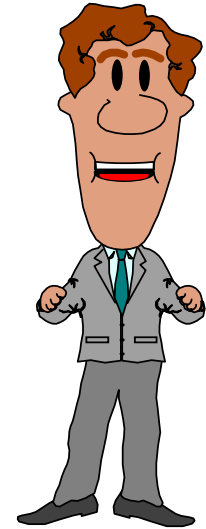


効率のよい連立方程式の扱い方を
知ることは重要

例題1 連立方程式

解いてみよう!!

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 45 \cdots \\ x_1 + 2x_2 = 40 \cdots \end{cases}$$



中・高校での方法

代入法

より $x_2 = -3x_1 + 45 \cdots$ ' に ' を代入

$$x_1 + 2(-3x_1 + 45) = 40$$

よって $x_1 = 10$. $x_2 = 15$

加減法

$$\begin{array}{r} 6x_1 + 2x_2 = 90 : \quad \times 2 \\ -) \quad x_1 + 2x_2 = 40 : \\ \hline 5x_1 \qquad = 50 \end{array}$$

$$x_1 = 10. \quad x_2 = 15$$



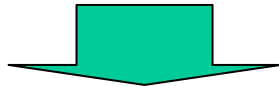
- 変数が多くなったら大変そう
- 式が多くなったら大変そう

例題2 解いてみよう

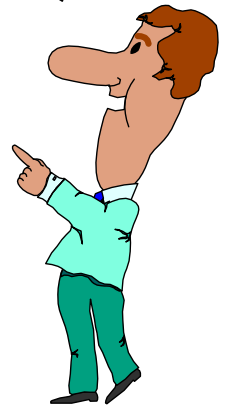
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 44 & \dots \\ 3x_1 - 4x_2 + 18x_3 = 76 & \dots \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 11 & \dots \end{cases}$$

どうやるんだ？

- いきなり解くのは大変そう
同じ解を持つやさしい問題に変形して解く



$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 22 & \dots \\ x_2 + 3x_3 = 5 & \dots \\ x_3 = 3 & \dots \end{cases}$$



連立方程式の変形



- 解を比較してみよう

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 = 45 \quad \dots \\ x_1 + 2x_2 = 40 \quad \dots \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 = 45 \quad \dots \\ -5x_1 \quad = -50 \quad \dots \end{array} \right. \quad - \quad \times 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -5x_2 = -75 \quad \dots \quad - \quad \times 3 \\ x_1 + 2x_2 = 40 \quad \dots \end{array} \right.$$

- ある等式の両辺を 倍する 連立方程式の解は同じ
- 2つの等式間の足し算・引き算 連立方程式の解は同じ

2つの操作で連立方程式の解は変化しない！

やさしい問題に変形する

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 44 \cdots \\ 3x_1 - 4x_2 + 18x_3 = 76 \cdots \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 11 \cdots \end{cases}$$

係数と右辺の値が
変化していくんだね

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 22 \cdots & ' : \times 1/2 \\ 2x_2 + 6x_3 = 10 \cdots & ' : - \times 3/2 \\ 9x_2 + x_3 = -33 \cdots & ' : - \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 22 \cdots & '' \\ x_2 + 3x_3 = 5 \cdots & '' : ' \times 1/2 \\ -26x_3 = -78 \cdots & '' : ' - ' \times 9/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 22 \\ x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_3 = 3 & : '' \times (-1/26) \end{cases}$$



ピボット

列

係数と右辺の値

行

- 行列: 数を長方形に並べて括弧()で括ったもの
- 連立方程式は行列で表現できる

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 44 \\ 3 & -4 & 18 & 76 \\ 2 & 5 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

1行 $\times 1/2$
 2行 $- 1行 \times 3/2$
 3行 $- 1行$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 22 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 9 & 1 & -33 \end{pmatrix}$$

2行 $\times 1/2$
 3行 $- 2行 \times 9/2$

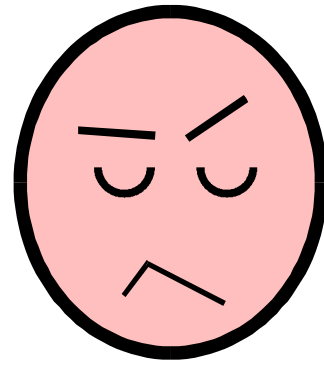
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 22 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -26 & -78 \end{pmatrix}$$

3行 $\times (-1/26)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 22 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

この操作を「掃き出し」という。

素朴な消去法



- 連立方程式を行列で表現する
- 対角線上にピボットを選びながら掃き出しを行う.
- やさしい問題に変形できたら, 下から方程式を順に解いていく.

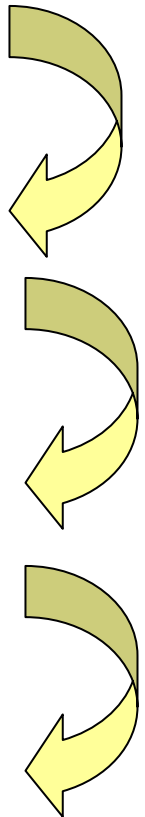
演習1: 例題1の連立方程式を消去法で解いてみよう

ピボット

とことん掃出しをしよう

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 44 \\ 3 & -4 & 18 & 76 \\ 2 & 5 & 9 & 11 \\ 1 & -2 & 4 & 22 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 9 & 1 & -33 \\ 1 & 0 & 10 & 32 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -26 & -78 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



1行 $\times 1/2$
2行 $- 1行 \times 3/2$
3行 $- 1行 \times 2/2$

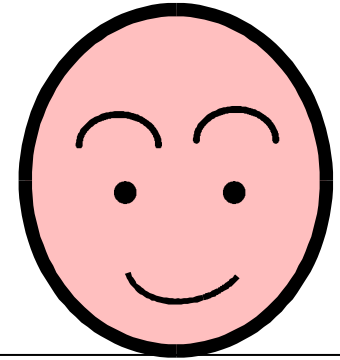
1行 $- 2行 \times (-2/2)$
2行 $\times 1/2$
3行 $- 2行 \times 9/2$

1行 $- 3行 \times (10/-26)$
2行 $- 3行 \times (3/-26)$
3行 $\times (1/-26)$

掃出しの操作を
上の行にも行えば、
直接解が求まるよね



ガウスの消去法



- 連立方程式を行列で表現する
- 対角線上にピボットを選びながらすべての行に対し掃き出しを行う。
- 最後の行まで実行したら終了!!

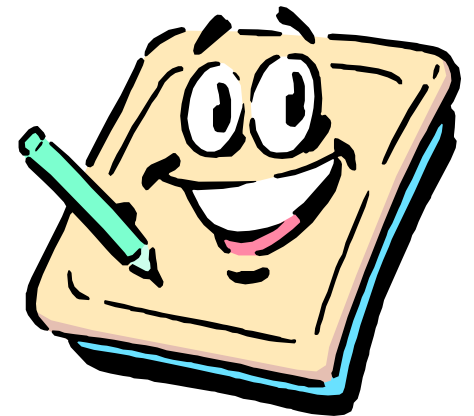
「ピボット変換」
ともいう

演習1: 例題1の連立方程式をガウスの消去法で解いてみよう

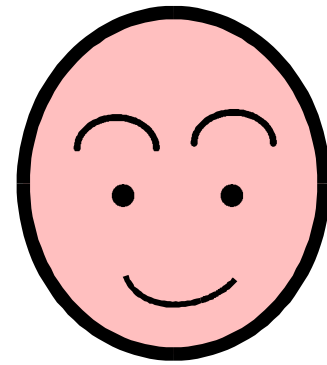
ここで一息

- 以下の方程式の解は？

$$ax = b$$



ピボットが0になった時(1)



以下の連立方程式を解いてみよう

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 39 \\ 8x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 83 \end{cases}$$

行の入れ替えで最後まで変形できる

ピボットが0になった時(2)

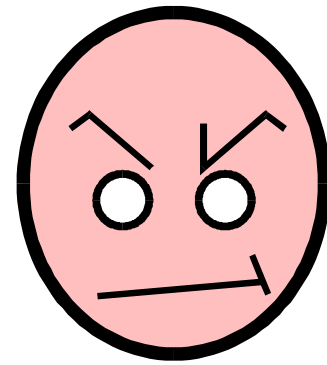


以下の連立方程式を解いてみよう

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 39 \\ 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 83 \end{cases}$$

連立方程式は解を持たない場合もある

ピボットが0になった時(3)



以下の連立方程式を解いてみよう

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 41 \\ 2x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 37 \end{cases}$$

連立方程式は解が定まらない場合もある

演習2 解いてみよう!



(1)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 13 \\ x_1 + 8x_3 = -5 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_3 = 1 \\ 3x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = -6 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

連立方程式と行列

行列の積を定義すると連立方程式は自然に行列で表現できる。

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 44 \\ 3x_1 - 4x_2 + 18x_3 = 76 \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 11 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 3 & -4 & 18 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 76 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 3 & -4 & 18 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 44 \\ 76 \\ 11 \end{pmatrix}$$

とおくと $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ と書ける。

この記法よりLPを

$$\max \mathbf{c}^t \mathbf{x}$$

$$\text{s.t. } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

と書くこともある