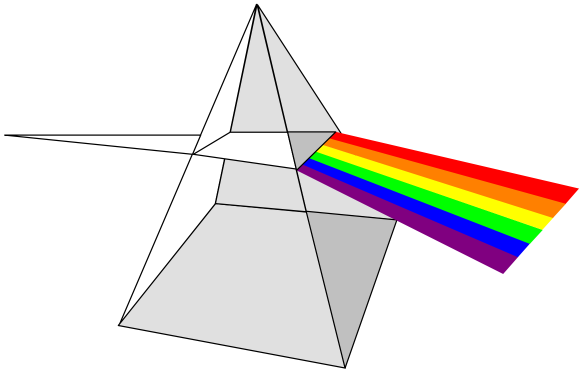


Linear Programming I

線形計画の解を導く素朴な方法達

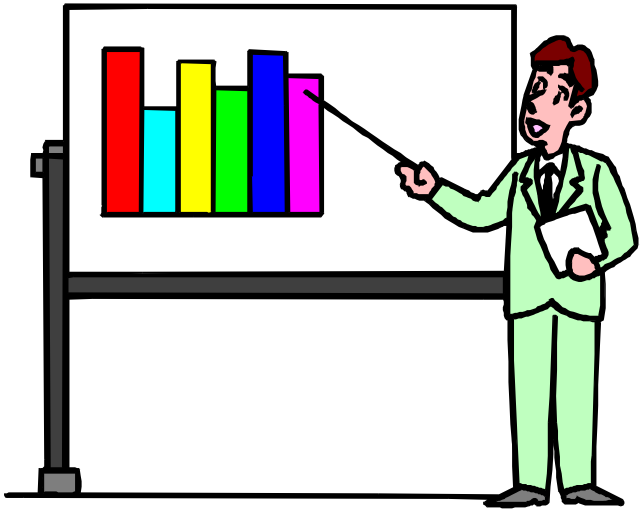
線形計画とは
(Linear Programming)

省略して「LP」と呼ぶ

- 数理計画の中で基礎的な問題

目的関数：線形
制約式：すべて線形

数理計画全般に影響する
興味深い性質が得られる



線形計画に対する解法

- グラフ解法
  - 2（～3）変数の問題に図を用いて解を導く．
- 総当たり法
  - シンプレックス法の基礎
- シンプレックス法（Simplex method）
  - 変数が多くなっても適用できる．
- 内点法（Interior point method）
  - 特に大規模な問題を解くときに良い

例題1 生産計画

- 文教工業が2つの製品P，Qを売り出した.
- 二つの製品とも原料A，Bから生産される.
- 利益が最大になる一日の生産量は？

	製品P	製品Q	使用可能量/日
原料A	3	1	45
原料B	1	2	40
利益(千円)	6	5	

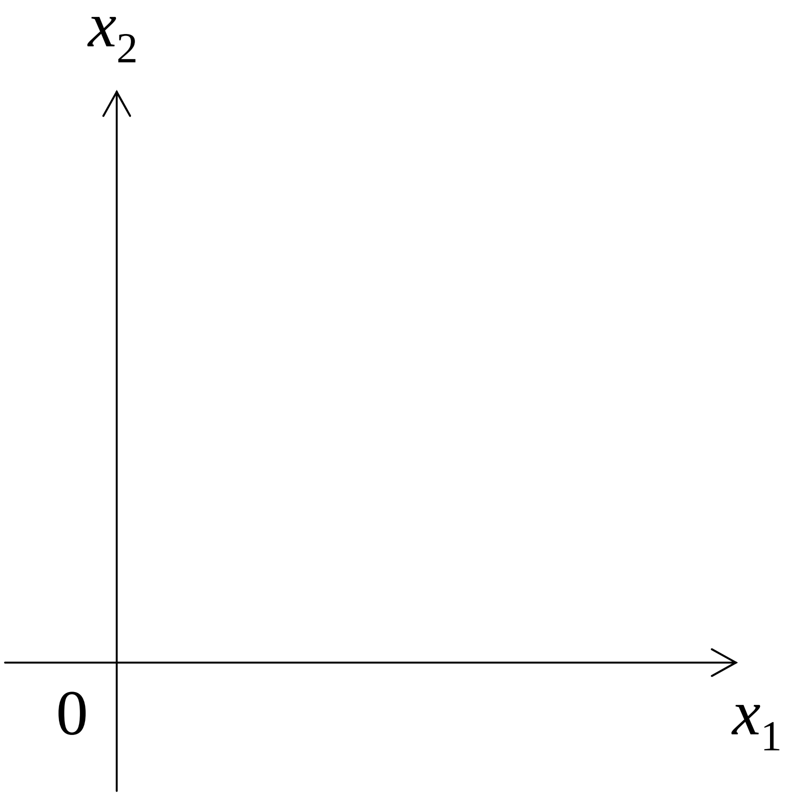
例題1(続) グラフを用いた解法

例題1を解いてみよう.

例題1を定式化

x_1：製品Pの生産量
x_2：製品Qの生産量

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\ & z=6x_1+5x_2 \\
\text{s.t.}\ & 3x_1+x_2 \leqq 45 \\
& x_1+2x_2 \leqq 40 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$



作業1：制約式をx_1-x_2平面に図示せよ.

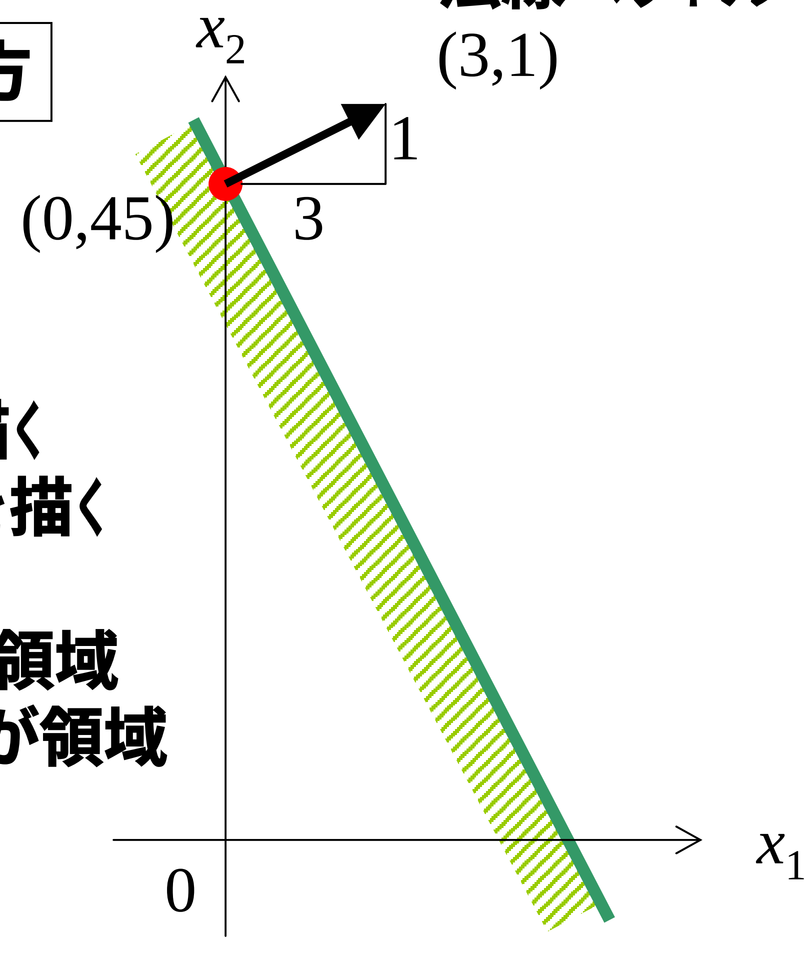
不等式と領域

$3x_1 + x_2 \leqq 45$ の示す領域の描き方

① $3x_1 + x_2 = 45$の直線を描く

・直線が通る一点を見つける
・その点から法線ベクトルを描く
・法線ベクトルに直交し直線を描く

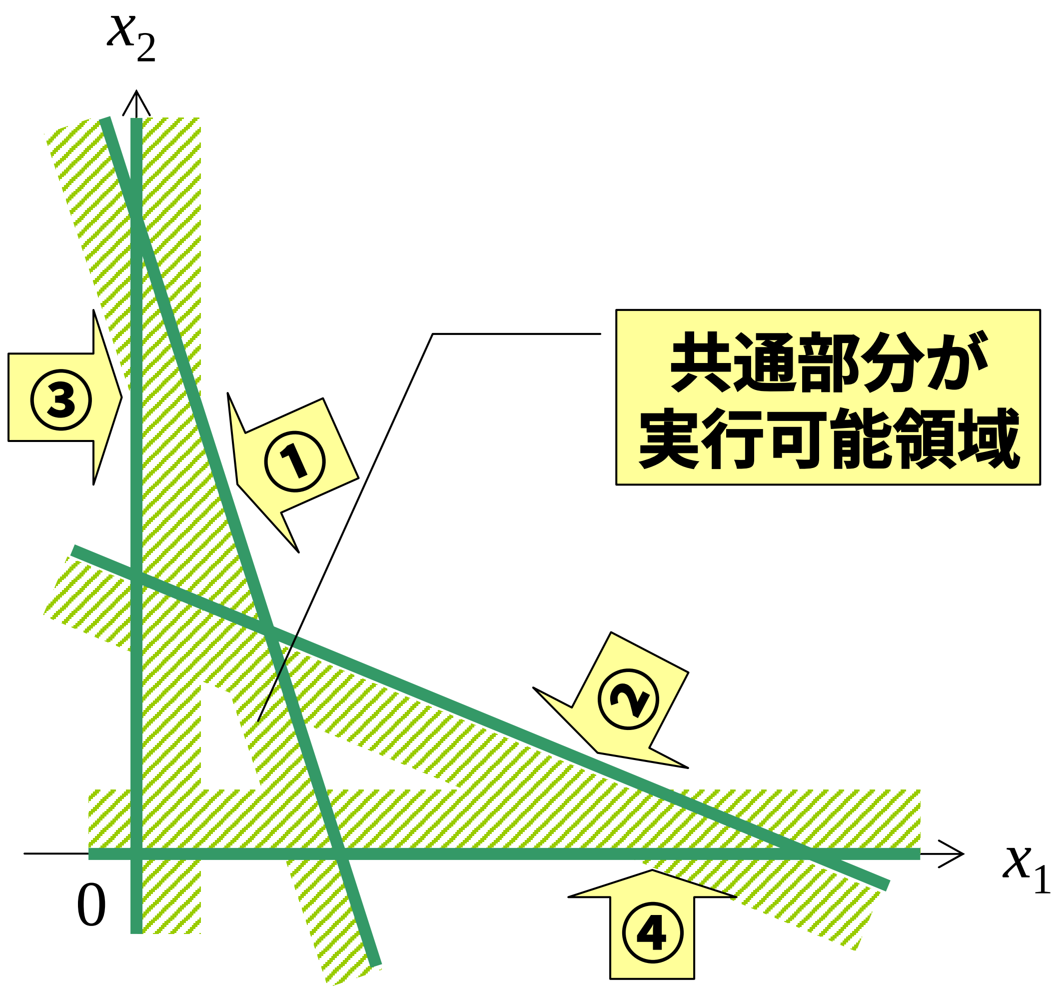
② $\geqq$の時:法線ベクトルの向きが領域
$\leqq$の時:法線ベクトルと逆向きが領域



実行可能領域の図示

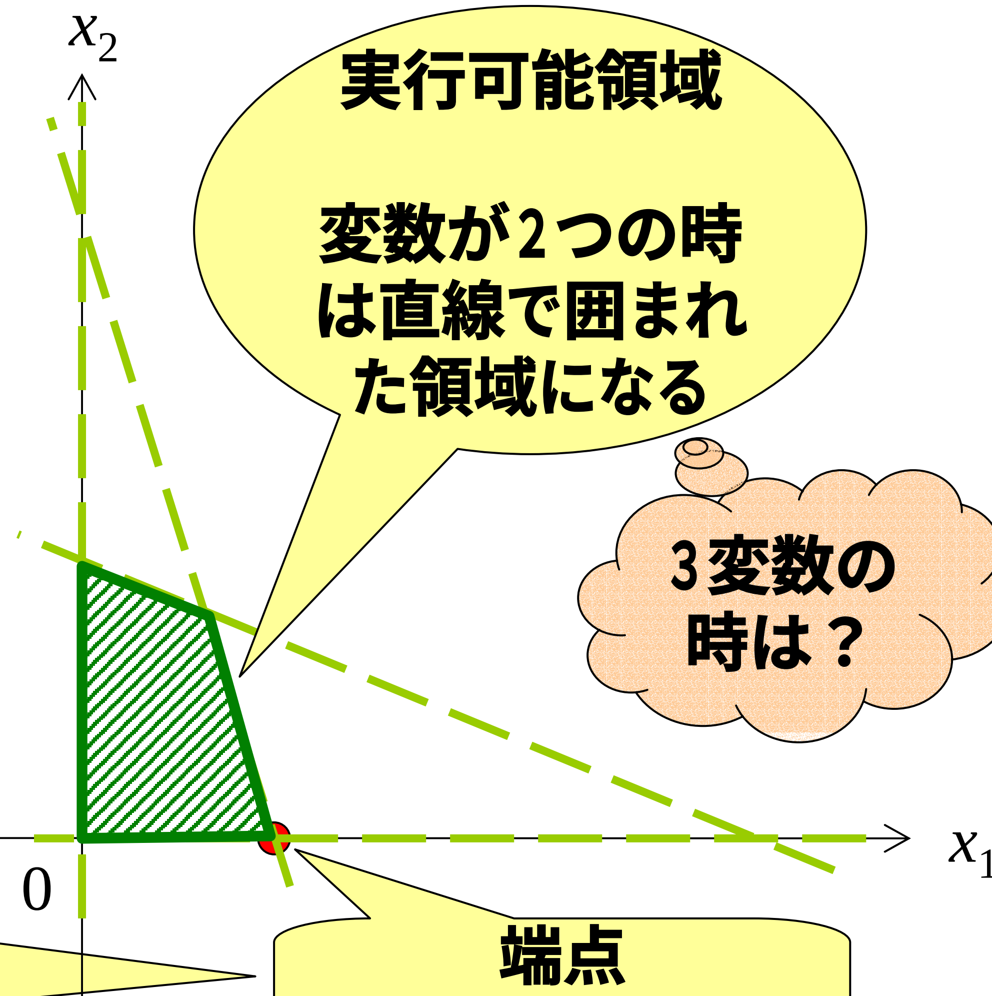
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leqq 45 & ① \\ x_1 + 2x_2 \leqq 40 & ② \\ x_1 \geqq 0 & ③ \\ x_2 \geqq 0 & ④ \end{cases}$$

実行可能領域は
これらの不等式を
全て満たす点の集合



実行可能領域の特徴

$$\begin{cases} 3x_1 + \ \ x_2 \geqq 45 & ① \\ x_1 + 2x_2 \geqq 40 & ② \\ x_1 \geqq 0 & ③ \\ x_2 \geqq 0 & ④ \end{cases}$$



実行可能領域

変数が２つの時は直線で囲まれた領域になる

３変数の時は？

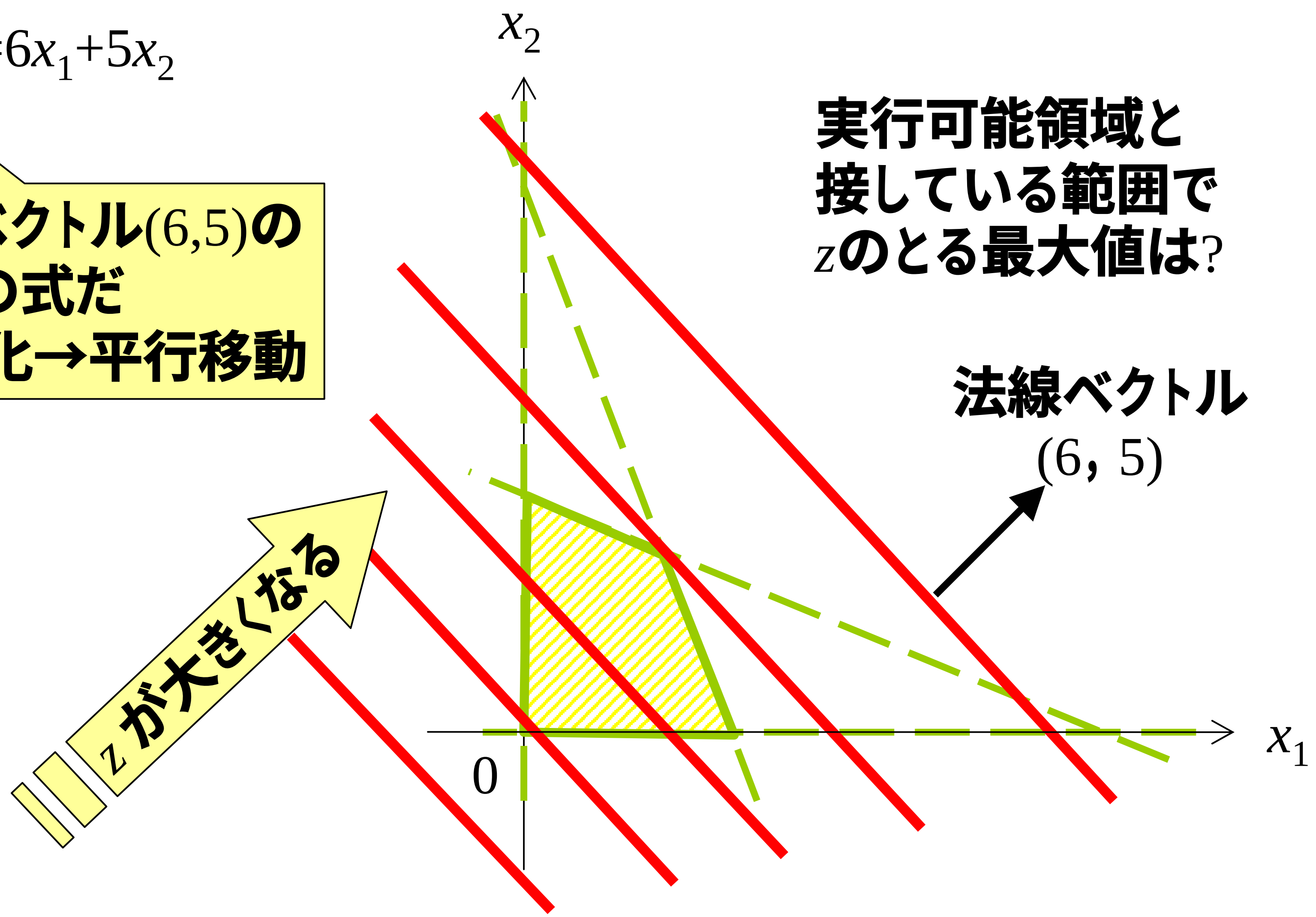
与えられた制約の実行可能領域には端点はたくさん存在する

端点
(extreme point)

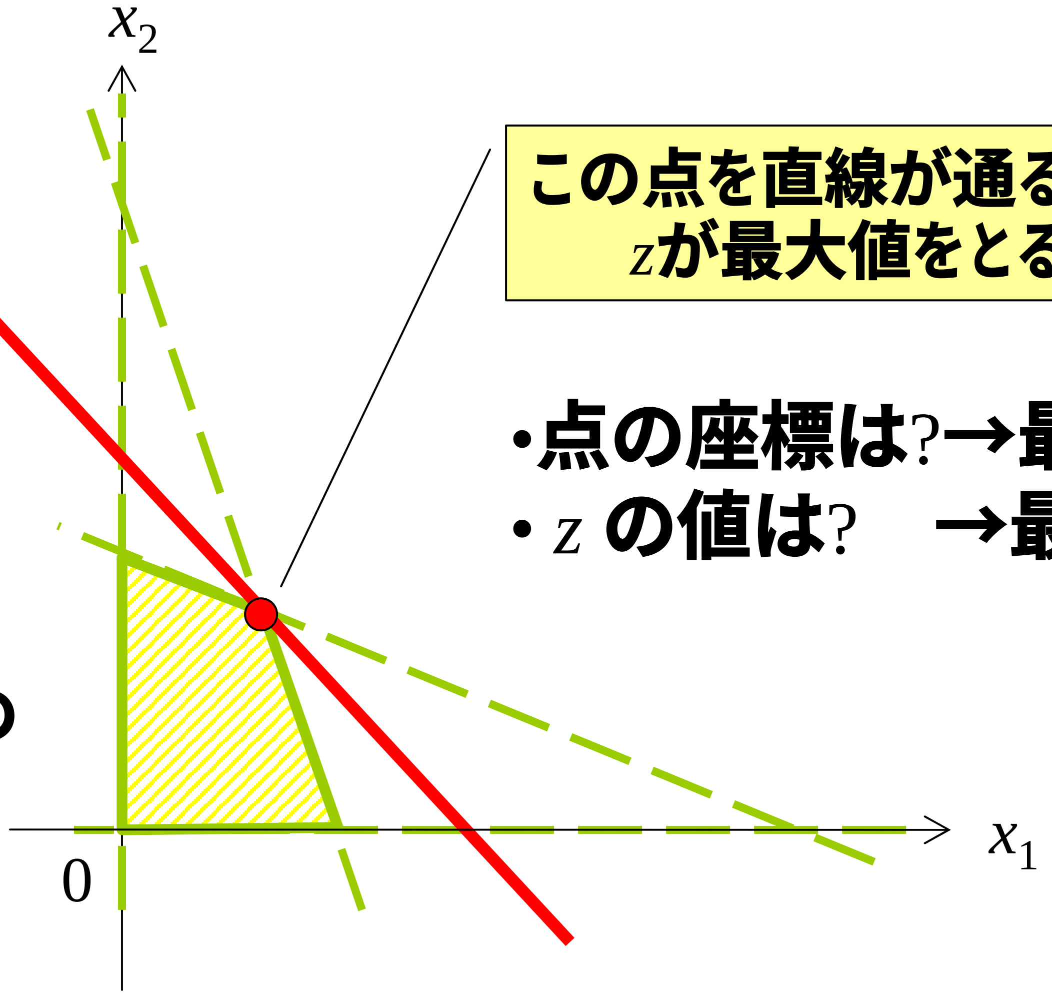
目的関数を動かす

目的関数 $z=6x_1+5x_2$

- 法線ベクトル(6,5)の直線の式だ
- zが変化→平行移動



最適値・最適解を見つける

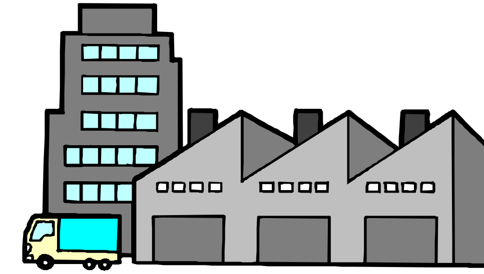


この点を直線が通るとき
zが最大値をとる

・点の座標は?→最適解
・z の値は?　→最適値

直線の交点の座標
⇕
関係する直線の式の
連立方程式の解

演習1　生産計画(2)



文教工業では，3種類の原料M1，M2，M3を用いて,二つの製品A,Bを製造している．

	A	B	利用可能量
M１	１５	１１	１６５０
M２	１０	１４	１４００
M３	９	２０	１８００
利益	５万円	４万円	

（１単位当たり）

利益が最大になる製品AとBの生産量を求めたい．
最適解と最適値を求めてみよう．

復習：連立方程式を解く

実行可能領域の端点を求める

||

連立方程式を解く

計算機向きの
うまい解き方があるんだよな.
高校までは習わないけど…

⇒(復習)　ガウスの消去法

図を用いる解法の欠点

- ２変数 (または訓練すれば3変数)の線形計画問題にしか適応できない.
  - 現実的に解きたい問題の中には, 100〜数万変数の問題が多い.
- 計算機で実行しにくい.
  ⇔解の導出時間が長い.

<u>図を用いない解法を考えよう!!</u>

最適解はどんな性質を持つか?

- 最適解（の少なくとも一つ）は
  <u>実行可能領域の端点</u>
  に存在する.

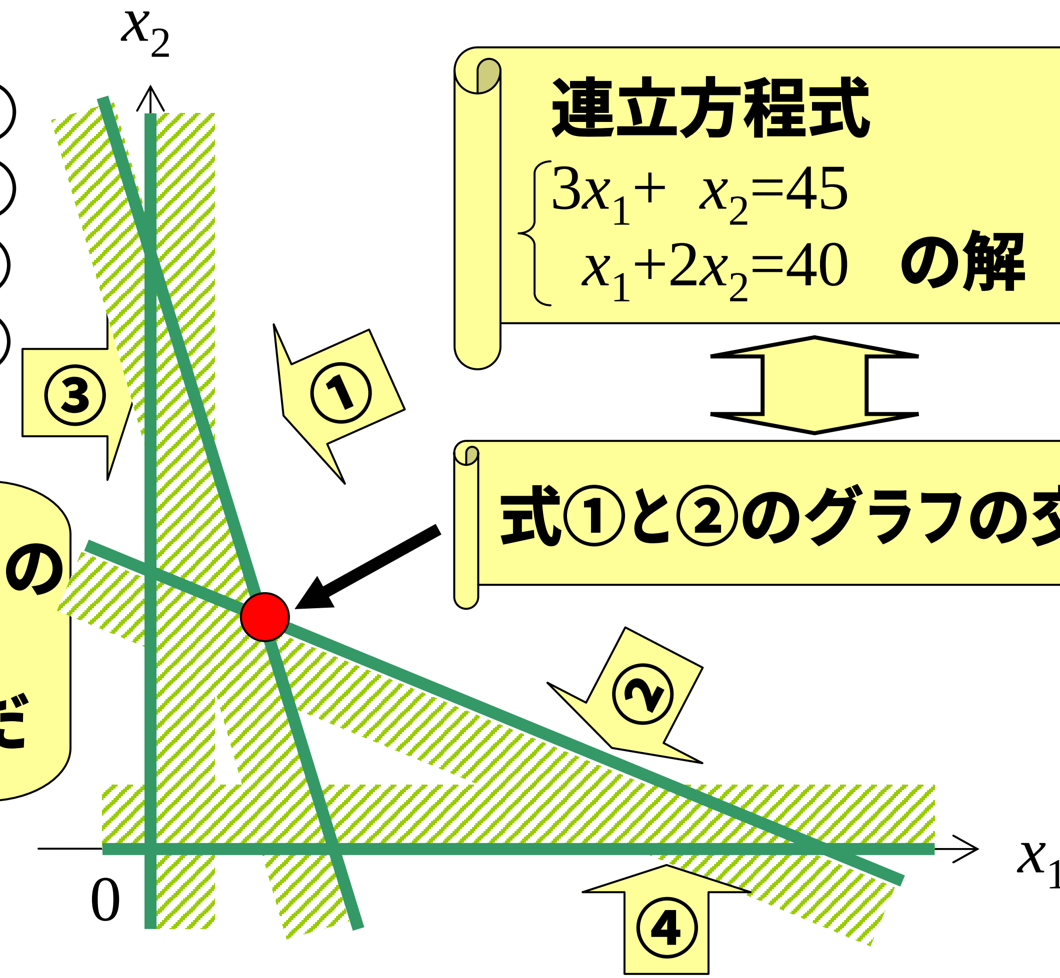
実行可能解の端点をすべて見出し
その中から最適解を探そう!!

総当たり法

実行可能領域の端点と式の関係

例題1より

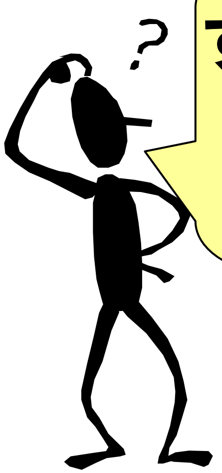
$$
\begin{cases}
3x_1 + x_2 \leqq 45 & ① \\
x_1 + 2x_2 \leqq 40 & ② \\
x_1 \geqq 0 & ③ \\
x_2 \geqq 0 & ④
\end{cases}
$$



連立方程式

$$
\begin{cases}
3x_1 + x_2 = 45 \\
x_1 + 2x_2 = 40
\end{cases}
$$ **の解**

式①と②のグラフの交点



すべての組合せの連立方程式を解けばいいんだ

解いてみよう!!

演習2　例題1のすべての交点を探そう

すべての組合せの連立方程式とその解

式の組合せ	x1の値	x2の値	実行可能解？	目的関数値
式①と②				
式①と③				
式①と④				
式②と③				
式②と④				
式③と④				

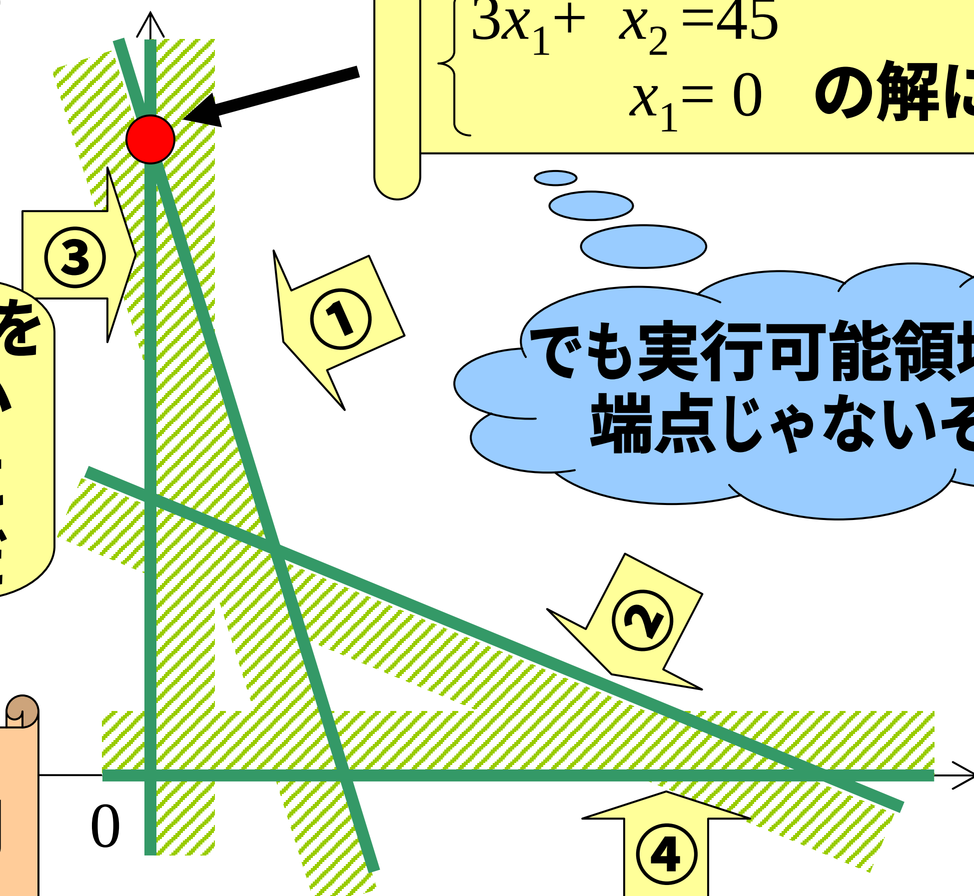
目的関数：max. $z=6x_1+5x_2$

実行可能領域の端点？

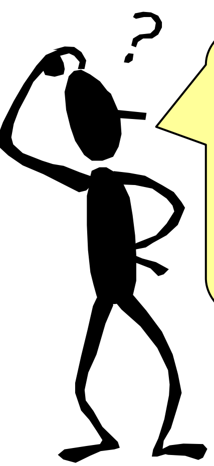
$$
\begin{cases}
3x_1 + \ \ x_2 \leqq 45 & ① \\
x_1 + 2x_2 \leqq 40 & ② \\
x_1 \geqq 0 & ③ \\
x_2 \geqq 0 & ④
\end{cases}
$$

連立方程式

$\begin{cases} 3x_1 + \ \ x_2 = 45 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ **の解に対応**



でも実行可能領域の端点じゃないぞ!



ただ連立方程式を解いても端点かどうかは簡単にわからないんだ

標準形の利用

線形計画問題の標準形とは

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \\
&\text{subject to} \quad a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\qquad a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \\
&\qquad\qquad\qquad x_1, \cdots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

標準形 (standard form)

- **目的関数は最大化**
- **条件式は非負条件以外は等式で表現**
- **条件式の右辺(b_i)は 非負**
- **すべての変数が非負**

覚えてね!!

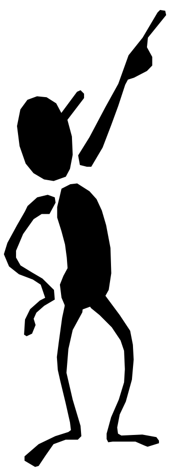
標準形の例

標準形で表現された制約式

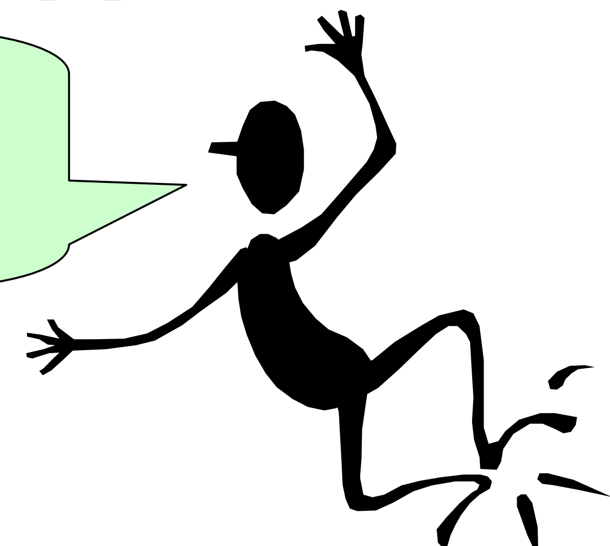
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + s_1 \quad &= 45 \\ x_1 + 2x_2 \quad + s_2 &= 40 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

標準形ではない表現の制約式

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leqq 45 \\ x_1 + 2x_2 &\leqq 40 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$



表現している内容は同じ!!
異なるのは，見た目だけ



すべてのLPは標準形で表現できる

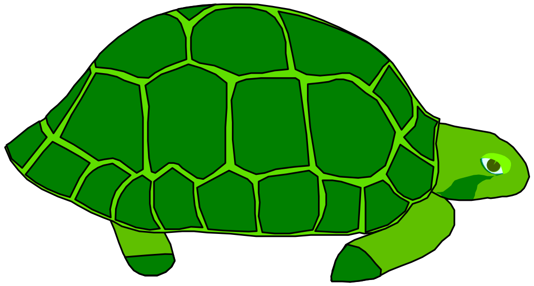
- 不等条件式が含まれている時
  - 左辺に非負のスラック変数を付加し等式化
- 非負条件のない変数が含まれる時
  - 正と負の部分に分けて2変数に置き換える

元の問題：xに非負制約無し(自由変数)

$$\Downarrow$$

$$x^{+} - x^{-}, \quad x^{+} \geq 0, x^{-} \geq 0$$

目的関数の変形



- 目的関数を最大化問題に変形する
  - 最小化したい目的関数に(－1)を掛ける ⇒最大化問題になる.

$$\text{minimize} \quad z = f(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{maximize} \quad -z = -f(x)$$

標準形への変形例 (1)

一般形

$$\begin{aligned}
\max \quad & z = 20x_1 + 30x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \le 800 \\
& -3x_1 - 4x_2 \ge -1800 \\
& 3x_1 + x_2 \le 1500 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

正準形

$$\begin{aligned}
\max \quad & z = 20x_1 + 30x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \le 800 \\
& 3x_1 + 4x_2 \le 1800 \\
& 3x_1 + x_2 \le 1500 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

標準形

$$\begin{aligned}
\max \quad & z = 20x_1 + 30x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + s_1 = 800 \\
& 3x_1 + 4x_2 + s_2 = 1800 \\
& 3x_1 + x_2 + s_3 = 1500 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \ge 0
\end{aligned}$$

スラック変数の導入

標準形への変形例 (2)

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = 3x_1 - 5x_2 \\
\text{subject to} \quad & 9x_1 - 4x_2 \geq -5 \\
& -7x_1 + 5x_2 = 8 \\
& 6x_1 - 2x_2 \geq 1 \\
& x_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & -z = -3x_1 + 5(x_2^+ - x_2^-) \\
\text{subject to} \quad & -9x_1 + 4(x_2^+ - x_2^-) + s_1 \phantom{{}- s_3} = 5 \\
& -7x_1 + 5(x_2^+ - x_2^-) \phantom{{}+ s_1 - s_3} = 8 \\
& 6x_1 - 2(x_2^+ - x_2^-) \phantom{{}+ s_1} - s_3 = 1 \\
& x_1, x_2^+, x_2^-, s_1, s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

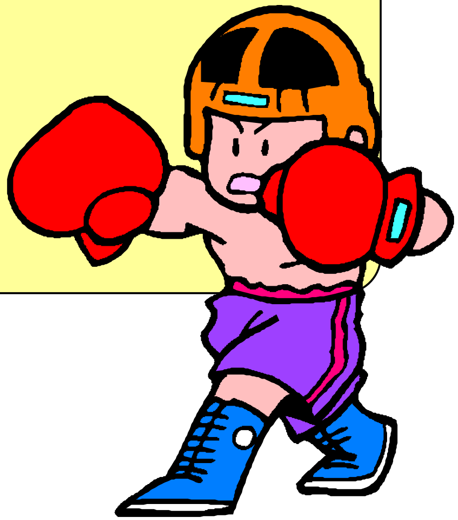
演習2　標準形に変形せよ

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = 2x_1 - x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \le 120 \\
& x_1 \le 50 \\
& x_2 \le 90 \\
& x_1 + x_2 \ge 60 \\
& x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

標準形の利用
実行可能領域の端点を見つける

その前にもう少し知識をためよう

- 連立方程式の<u>**変数の数**</u>と<u>**式の数**</u>と<u>**解**</u>の関係
- 独立変数
- 基本解
- 基底変数と非基底変数



連立方程式と解の関係

m変数, n本の方程式から成る連立方程式

- m=nの時:
  - 解が一意に定まる or 不定 or 不能 (解なし)
- m<nの時:
  - 基本的にm=nの時と同じ.
- m>nの時:
  - m-n個の変数の解は一意に定めることができない (独立変数).
    ⇔ m-n個の独立変数の値を定めると, 残った変数の方程式の解が定まる.

例えば…

以下の連立方程式の解は？

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + s_1 = 800 \\ 3x_1 + 4x_2 + s_2 = 1800 \\ 3x_1 + x_2 + s_3 = 1500 \end{cases}$$

変数の数：5個
方程式の数：3個

(5-3=)2個の独立変数に値を与えれば解を持つ

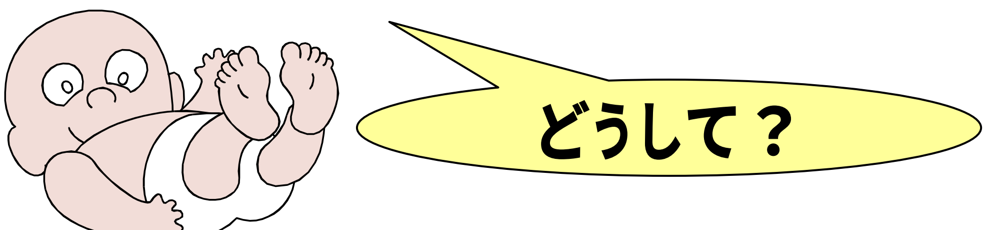
例えば，x_1, x_2を独立変数に選び，値に0を与えてみよう．

→連立方程式の解はどうなるだろうか?

実行可能領域の端点の見つけ方

- 制約条件式を標準形にする.
- 連立方程式の解が定まるように独立変数を適当に決めて, それらの値を0にする.
  →連立方程式の解が得られる. (**基本解**)
  - 実際に値を求める変数＝**基底変数**
    ⇔値が0に定められた変数＝**非基底変数**

★基本解が非負なら, 実行可能領域の端点.



例題3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + s_1 = 800 \\ 3x_1 + 4x_2 + s_2 = 1800 \\ 3x_1 + x_2 + s_3 = 1500 \end{cases}$$

(1) すべての独立変数を選ぶパターンを書き出せ。
(2) （独立変数に0を与えた場合の）基本解を求めよ。

例題3 すべての基本解

x1	x2	s1	s2	s3	端点？	目的関数値
0	0	800	1800	1500	○	0
0	400	0	200	1100	○	12000
200	300	0	0	600	○	13000
366.7	100	133.3	0	0	○	12333
500	0	300	300	0	○	10000
0	450	-100	0	1100	×	
0	1500	-2200	-4200	0	×	
440	180	0	-240	0	×	
800	0	0	-600	-900	×	
600	0	200	0	-300	×	

値が0になっている変数が選んだ独立変数.

演習3

$$
\begin{aligned}
&\text{max.}\ z=5x_A+4x_B\\
&\text{s.t.}\quad 15x_A+11x_B \leqq 1650\\
&\qquad\ \ 10x_A+14x_B \leqq 1400\\
&\qquad\ \ 9x_A+20x_B \leqq 1800\\
&\qquad\qquad\qquad x_A, x_B \geqq 0
\end{aligned}
$$

独立変数の選び方の
すべてのパターンの
基本解を求め，
最適解を見つけよう．

図を用いない素朴な解法
総当たり法

手順1 標準形にする.

手順2 すべての基本解を導く.

手順3 実行可能領域の端点かどうか調べる.

手順4 実行可能領域の端点である基本解の中で目的関数値を最大(最小)にする基本解を見出す.→最適解が見つかる

演習11-3 総当たり法で解いてみよう

(1)

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & x_1 + \quad x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 4x_2 - 2x_3 \ge 120 \\ & x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 = 60 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

総当たり法の欠点

- 標準形がn個の変数とm本の等式条件の時
  - 基本解はどのくらい存在するか?

    →膨大な数の連立方程式を解く.
    (変数の数が多くなったら事実上実行不可能)
- 実行可能領域の端点に関係ない基本解も計算している. (←無駄)

より無駄の無い解法 <u>シンプレックス法</u>

演習3 解答例

x1	x2	s1	s2	s3	端点？	目的関数値
0	0	1600	1400	1800	○	0
0	150	0	-700	-1200	×	
77	45	0	0	207	○	565
1440/37	2700/37	10350/37	0	0	○	18000/37
200	0	-1350	-600	0	×	
0	100	550	0	-200	×	
0	90	140	660	0	○	360
65923/67	4050/67	0	-622130/67	0	×	
110	0	0	300	810	○	550
140	0	-450	0	540	×	

最大値

黄色のセル(値=0)が選ばれた独立変数．