

Mathematical Programming

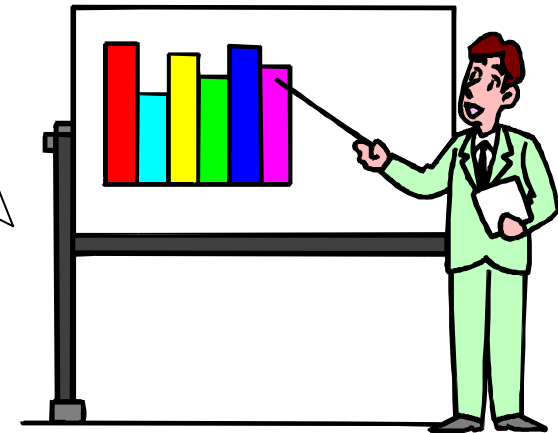
最適化手法の王様
数理計画法

数理計画とは

Mathematical Programming

与えられた制約式のもとで、
ある関数を最大化する応用数学の問題
(最小化)

- 数理計画 = 数理計画問題
(- Problem)
- 数理計画問題とそれを解く手法
全般を「数理計画法」とよぶ。



数理計画とORの深い関係

数理計画(問題)

与えられた制約式のもとで、
ある関数を最大化(最小化)する

比較

ORの例: 経営の問題

与えられた資源制約のもとで
利益を最大(費用を最小)にする

ORとは?

対象を数学的にモデル化し、有用な
解決策を導く方法

ORは解決策を
導く手法の宝庫

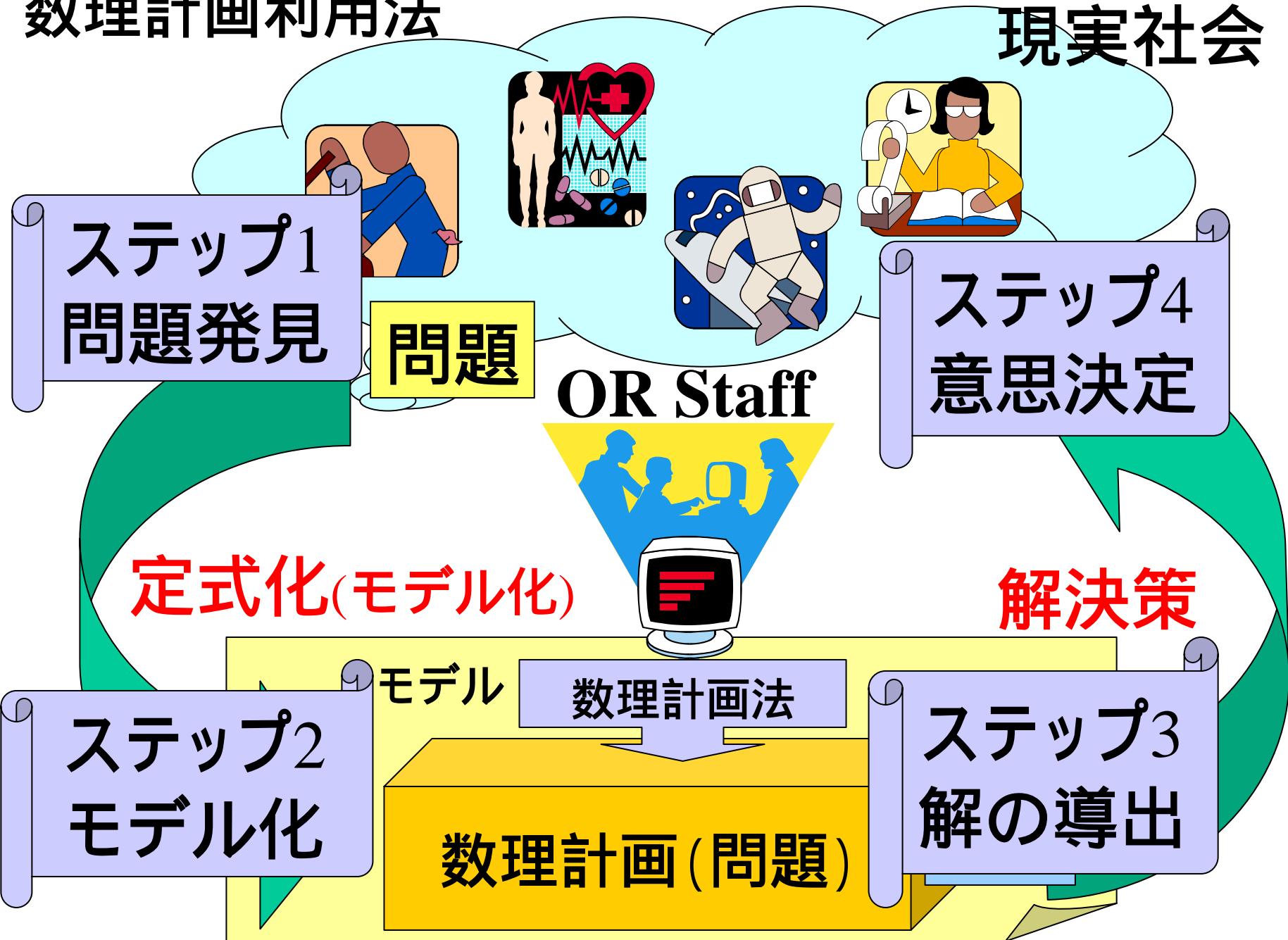
数理計画はORの中心的な技法として定着している

ORの仕組み



数理計画利用法

現実社会



ステップ1 問題発見

何が問題？
因果関係は？

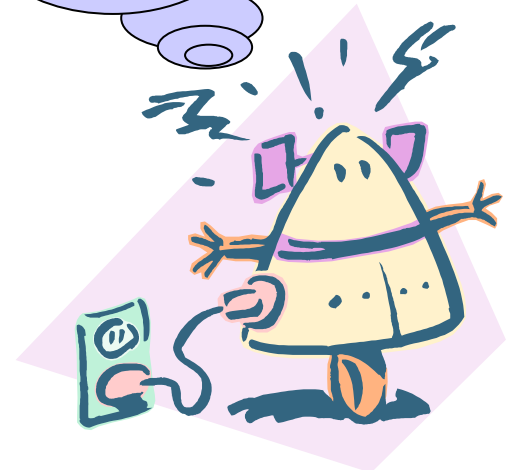
問題発見技法

- ブレインストーミング法
- KJ法
- QC(7つ道具, 新QC7つ道具) など

問題の舞台を**システム**で把握



問題は与えられることも多いが、発見することも重要！

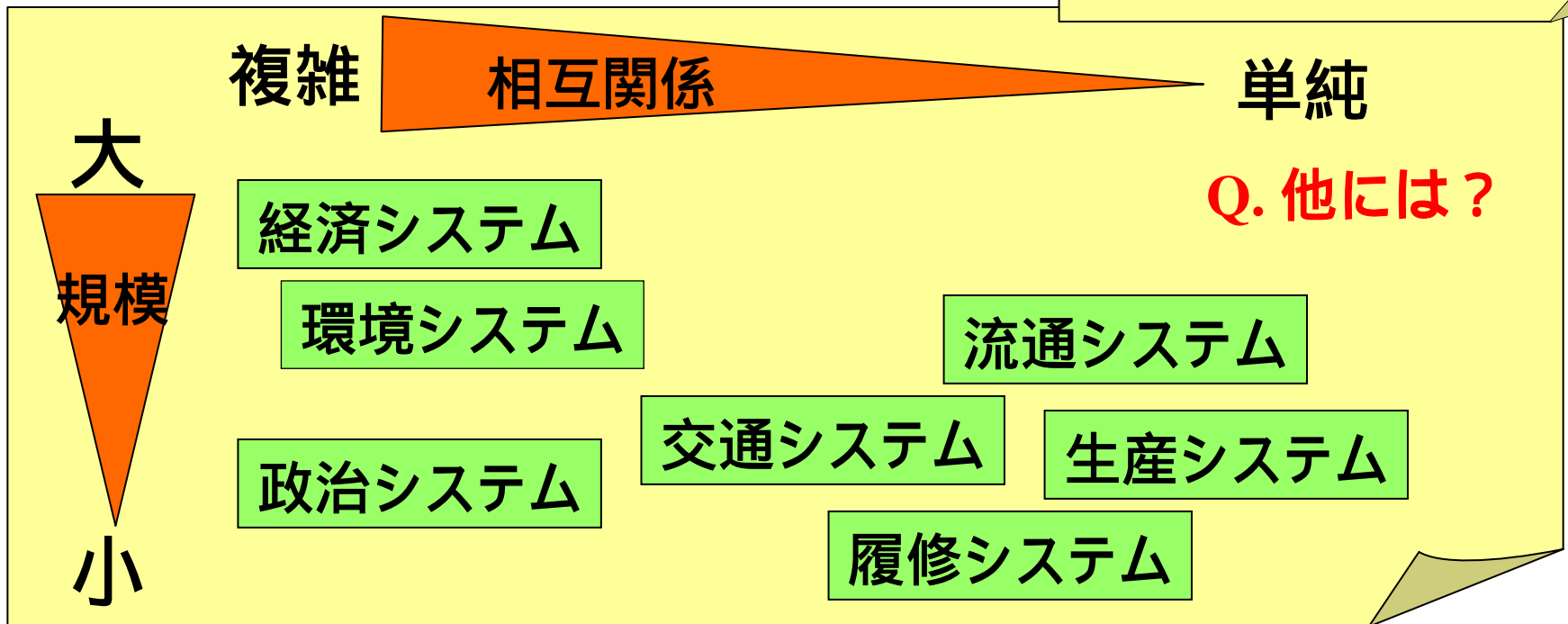


システムとして問題把握

相互関係を持つ構成要素の集まり
+
構成要素は共通目的で機能している

ポイント

- 構成要素の抽出
- 相互関係の明確化

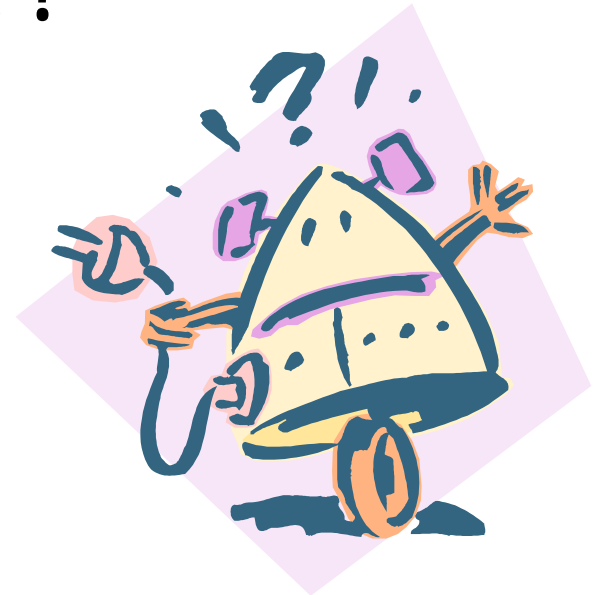


システムは小さなシステムの集まりの場合もある

問題を捉えるポイント

システムにおいて

- コントロールする(できる)構成要素は？
- コントロールに対する制約は？
- コントロール結果に対する
良い・悪いの尺度は？



演習1 混雑する学食

1. 何が問題？
2. システムの構成要素は？相互関係は？
3. コントロールする(できる)構成要素は？
4. コントロールに対する制約は？
5. コントロール結果に対する良い・悪いの尺度は？



ステップ2 モデル化(定式化)



- 関係部分のみ抽出
- 抽出したシステムを抽象的な記号で表現

数理モデル

現実の問題から離脱

汎用性

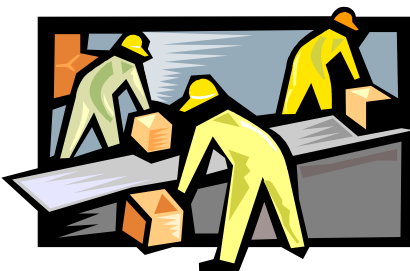


- 尺度変換表現
- 自然言語表現
- 絵・図表現
- 記号表現

記号とシステムの対応
を忘れないように！

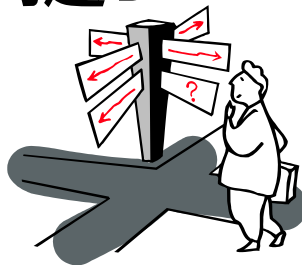
数理モデルは便利！

問題A



モデル化

問題B



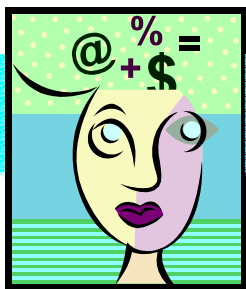
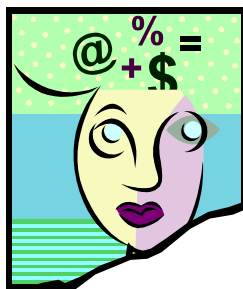
モデル化

問題Z

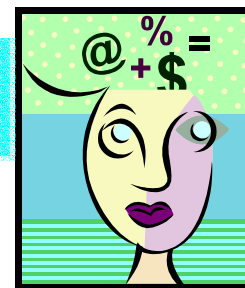


モデル化

様々な問題



同じ構造



数理モデル

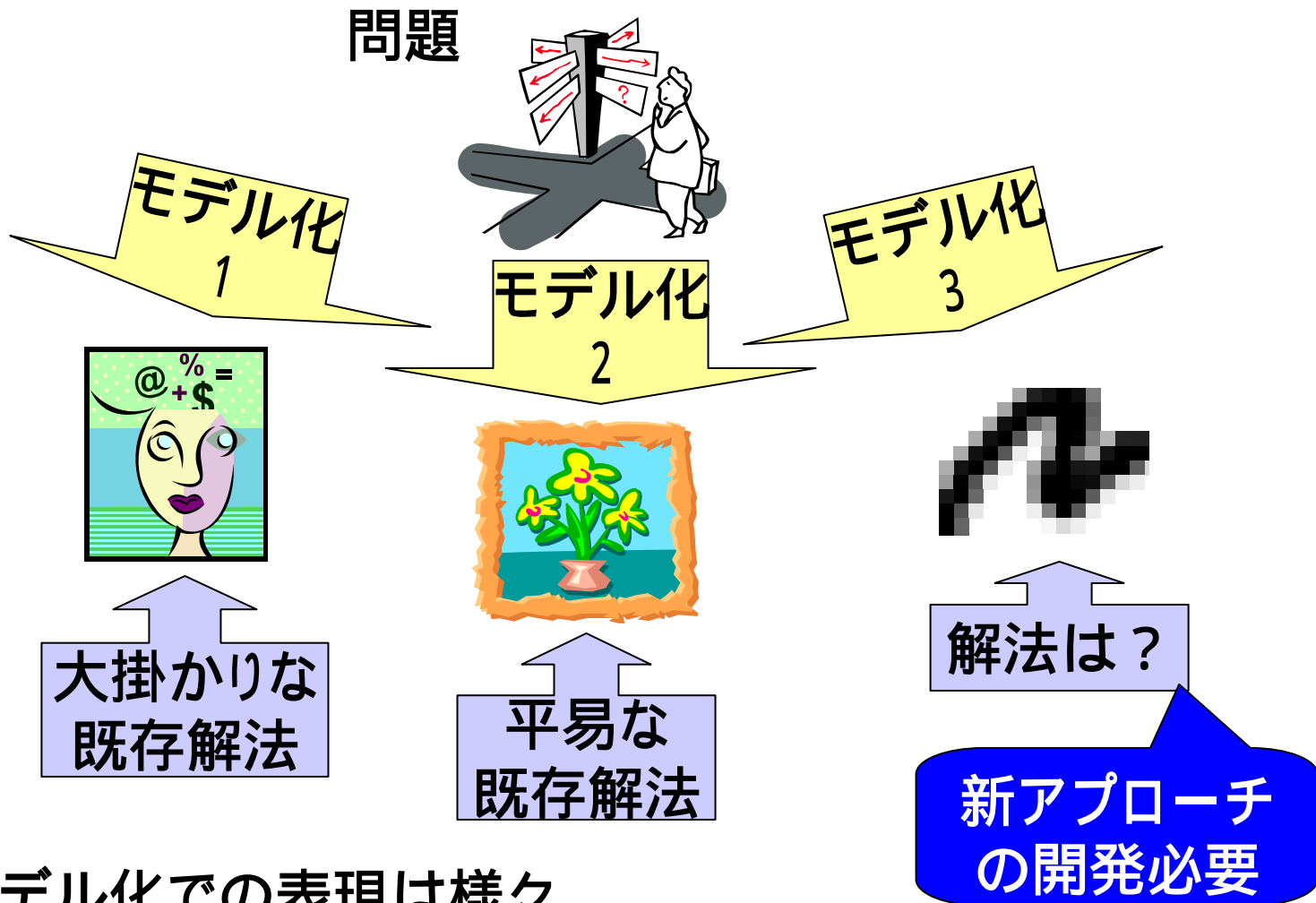
システムの
アプローチ

共通アプローチで解決可

個々に解く必要は
ないんだね



モデル化は芸術

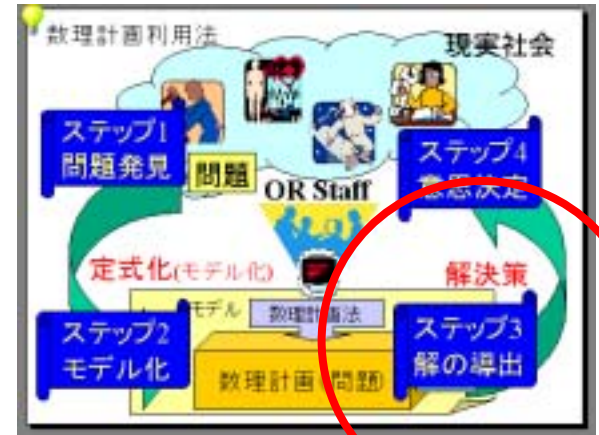
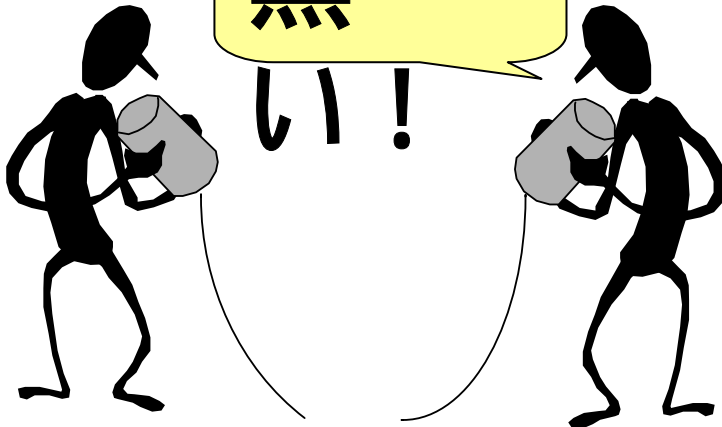


モデル化での表現は様々
表現に応じて解き易い、解きにくい

ステップ3 最適解の導出

数理モデル化された
どんな問題でも解く
万能な方法を教えて

無
い!



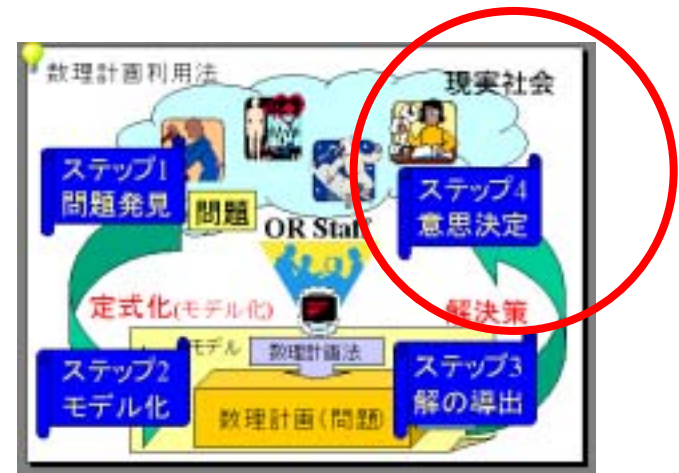
問題タイプ別の解法

- やさしい手法
- 難しい手法
- 手間のかかる手法
- 効率良い手法 等

数理計画法

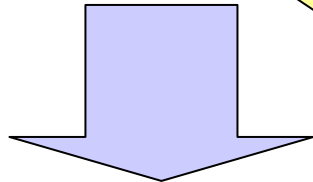
ステップ4 意思決定

数理モデルの最適解



問題解決の最良案

(元の問題 数理モデル)



ギャップがある
場合が多い



実際の解決策提案には
意思決定が必要

意思決定法

- AHP/ANP
- 意思決定基準 など

講義「数理計画」での守備範囲

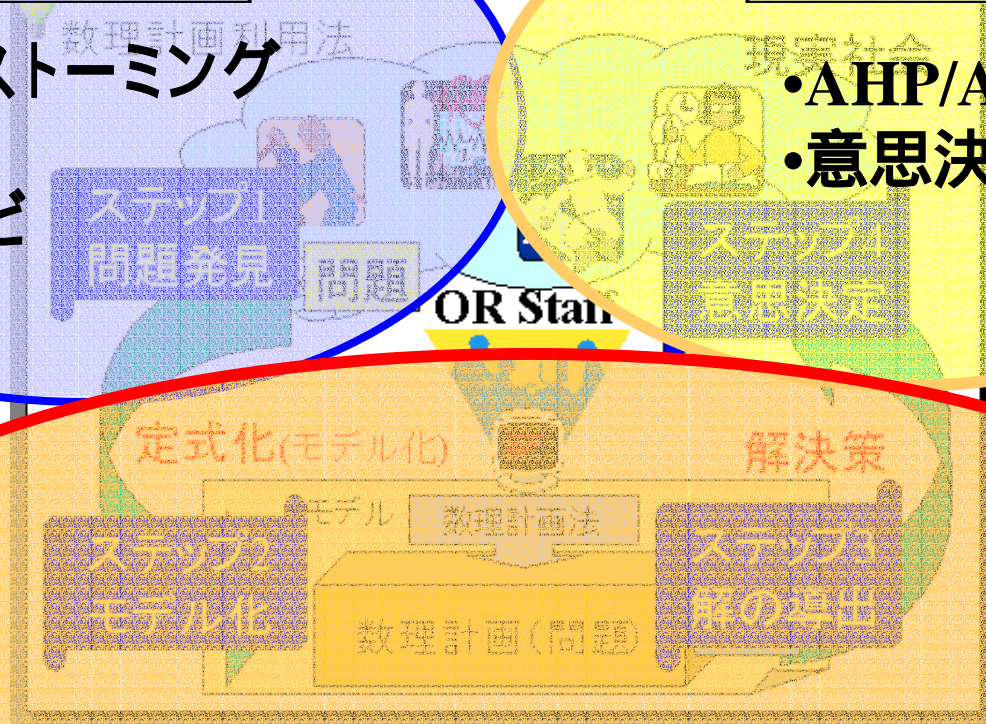
問題発見技法

- ブレインストーミング
- KJ法
- QC など

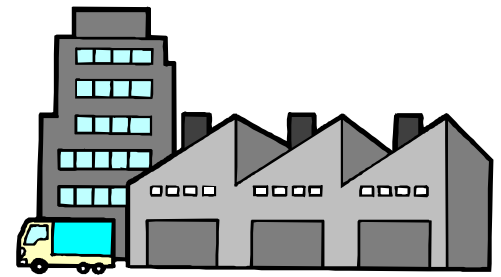
意思決定手法

- AHP/ANP
- 意思決定基準 など

数理計画



例題1 数式での表現



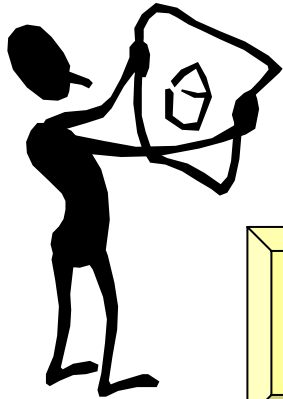
文教工業では、3種類の原料M1,M2,M3を用いて、2つの製品A,Bを製造している。

	A	B	利用可能量
M1	15	11	1650
M2	10	14	1400
M3	9	20	1800
利益	5万円	4万円	

(1単位当たり)

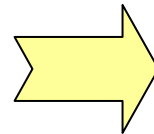
利益が最大になる製品A,Bの生産量を求めたい。この問題を数理モデル化しなさい。

数理モデル作成 2つの段階



観察力・言語理解力

問題理解



問題表現

システムとしての把握

- 構成要素は？
 - コントロール可能な要素
 - コントロールできない要素
- 相互関係は？
- コントロール結果の評価方法は？

変数として表現
例： x_1, x_2

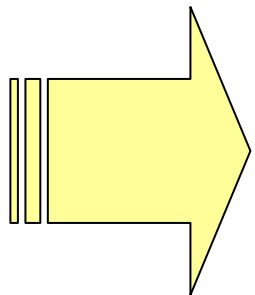
定数として表現

数式として表現
例：等式，不等式

関数として表現

例題1(続き) 定式化してみよう

- コントロールできる要素: 製品A,Bの生産量
製品Aの生産量を x_A , 製品Bの生産量を x_B とおく.
- コントロールの制約: 原料M1, M2, M3の使用量
- コントロール結果の評価: 利益



- 制約を表す不等式は?
- 利益を表す関数は?



数理モデルの書き方

目的関数

Objective function

最大化
(最小化の時はminimize)

maximize $z=5x_A+4x_B$
subject to $15x_A+11x_B \leq 1650$
 $10x_A+14x_B \leq 1400$
 $9x_A+20x_B \leq 1800$
 $x_A \geq 0$
 $x_B \geq 0$

制約式

Constraints

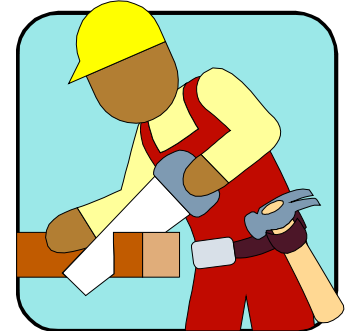
又は制約条件式
subject to: ~ の条件の下で

省略表記

max. $z=5x_A+4x_B$
s.t. $15x_A+11x_B \leq 1650$
 $10x_A+14x_B \leq 1400$
 $9x_A+20x_B \leq 1800$
 $x_A, x_B \geq 0$

目的関数の $z=$ も省略される時がある

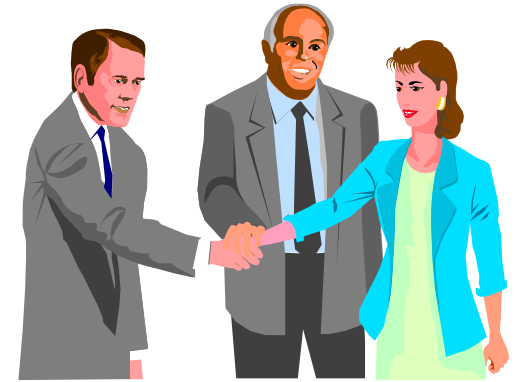
演習2 数理モデル化しよう



- 文教工業が2つの製品P, Qを売り出した.
- 二つの製品とも原料A, Bから生産される.
- 利益が最大になる一日当たりの生産量は？

	製品P	製品Q	使用可能量/日
原料A	3	1	45
原料B	1	2	40
利益(千円)	6	5	

演習3 原料奪取作戦

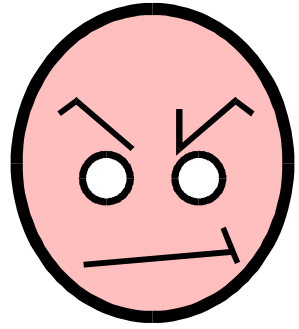


例題1の設定で

- 湘南商事は, 原料M1, M2, M3が不足.
- 文教工業から1日の使用可能量すべてを買い取りたい.
- 支払総額は少なくしたい.
- 各原料ごとに支払う金額を1Kgあたりいくらかで提示する?

この問題を数理モデルで表現しなさい

演習3(続) ヒント



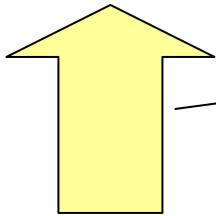
- 原料M1 買取価格を y_1 (円/kg)
原料M2 買取価格を y_2 (円/kg)
原料M3 買取価格を y_3 (円/kg) とおく.
- 制約: 文教工業は製品を製造することによって得られる利益以下では売らないだろう
 - 製品製造に使用する原料の量を買取るには、製品が生み出す利益以上の金額を提示すべき

数理モデルで表現してみよう!

数理計画の分類

表現手法からの分類

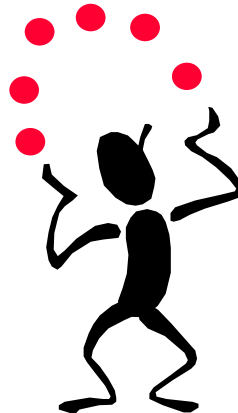
- 数式で表現



基本的に数式での表現も可能

- 関係図(ネットワーク・グラフ)で表現

- 組合せ最適化問題
- ネットワーク計画



• 図表現が扱いやすい 数式不要
• 数式表現も可能なので数理計画だね

利用する関数での分類

	目的関数	制約条件式
線形計画	← 線形関数	線形関数
非線型計画	← 非線型関数	非線型関数
(2次計画)	← 2次関数	線形関数
整数計画	←	解は整数

(組合せ最適化問題)

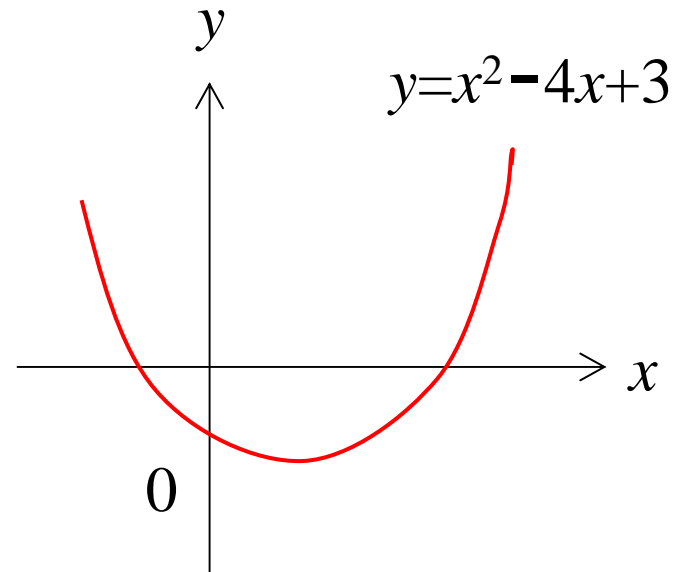
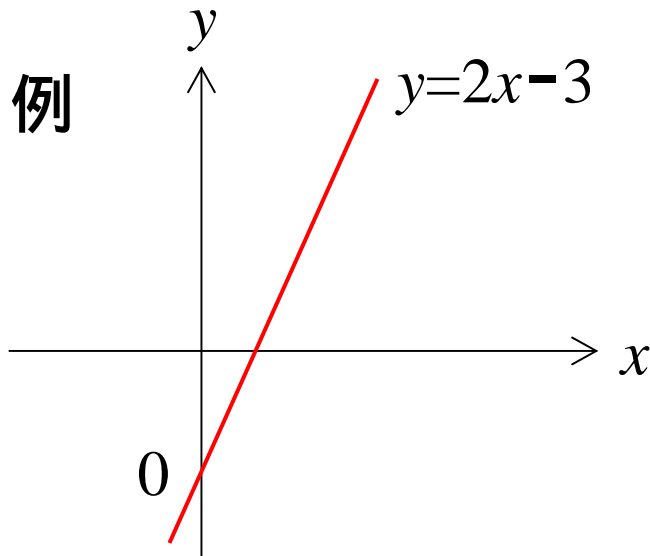
動的計画 ← 再帰式で表現



線形関数・非線形関数



- 線形関数：
グラフに描くと線状
(面状)になる関数.
- ↔
- 非線形関数





用語：実行可能解と最適解

optimal solution

最適解：最適値を達成する実行可能解

$$\begin{array}{ll} \max. & z=5x_A+4x_B \\ \text{s.t.} & 15x_A+11x_B \leq 1650 \\ & 10x_A+14x_B \leq 1400 \\ & 9x_A+20x_B \leq 1800 \\ & x_A, x_B \geq 0 \end{array}$$

最適値：目的関数の最大値

optimal value

feasible solution

実行可能解：制約式を満たす (x_A, x_B)

feasible region

実行可能領域：実行可能解の集合

実行可能解が存在しない場合もある 不能な問題

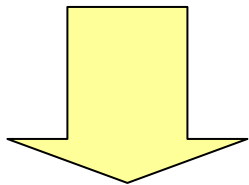
最適解は複数存在する場合もある 不定な問題

さて今後の展開は



線形計画法

- 数理計画法の最も基礎的な手法
- 解法: 図的解法, 総当り法, シンプレクス法等
- 解の読み方: 感度分析, 双対理論
- 実際に大きな問題を解く: ソルバー利用法



整数計画法, 動的計画法, 非線形計画法 など