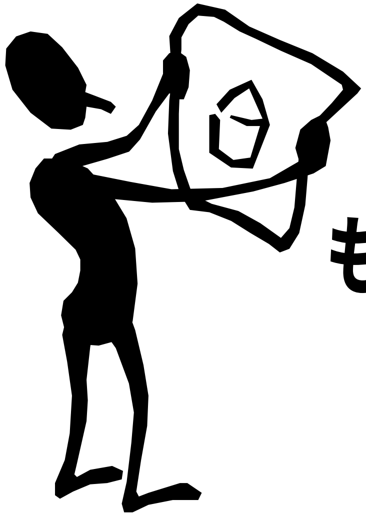
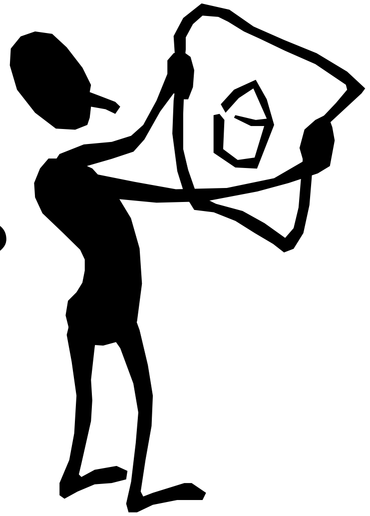
Sensitivity Analysis

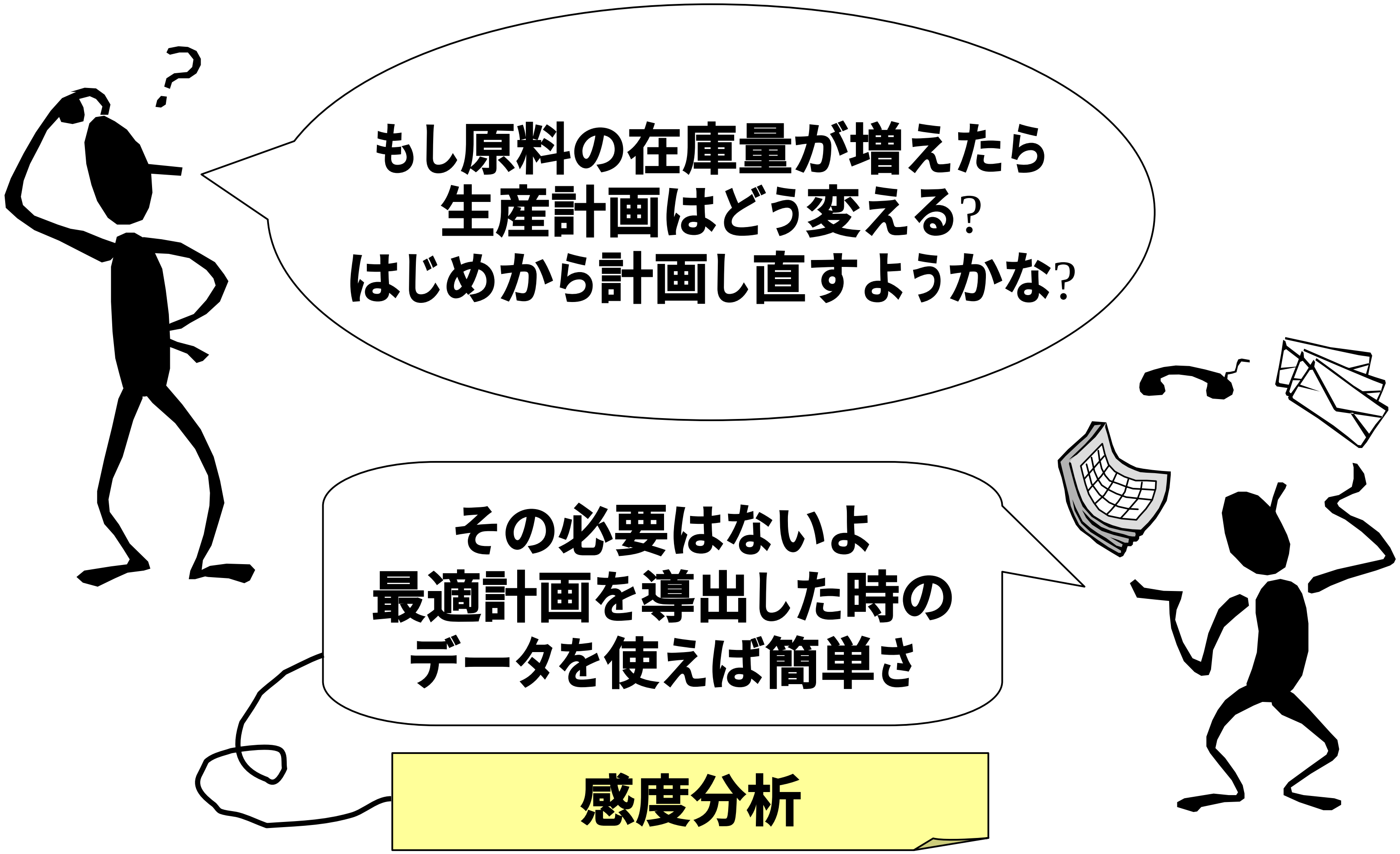


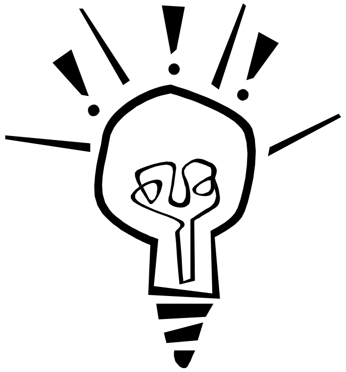
感度分析

もし○○○だったどうする？



線形計画は
最適解を出すだけではない





感度分析
Sensitivity Analysis

- 条件･数値の変化→最適解の変化を分析
  - What-if分析
- 数理モデルで用いられる数値
  - 変化しやすい場合あり
  - 不正確な場合あり

  ⇒解が受ける影響を知ることが重要.

例題

- 文教工業が2つの薬品P，Qを売り出す
- 二つの製品とも原液A，Bから生産
- 利益最大になる1日当たりの生産量は？

	薬品P	薬品Q	使用可能量
原液A	3 kl	1 kl	45 kl/日
原液B	1 kl	2 kl	40 kl/日
利益	6千円/kl	5 千円/kl	

シンプレックス法で解く

$$\max \quad z = 6x_1 + 5x_2$$
$$\text{s.t.} \quad 3x_1 + x_2 \le 45$$
$$x_1 + 2x_2 \le 40$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\max \quad z = 6x_1 + 5x_2$$
$$\text{s.t.} \quad 3x_1 + x_2 + s_1 = 45$$
$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 40$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0$$

シンプレックス表 (初期)

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
s1	0	3	1	1	0	45
s2	0	1	2	0	1	40
z	1	-6	-5	0	0	0

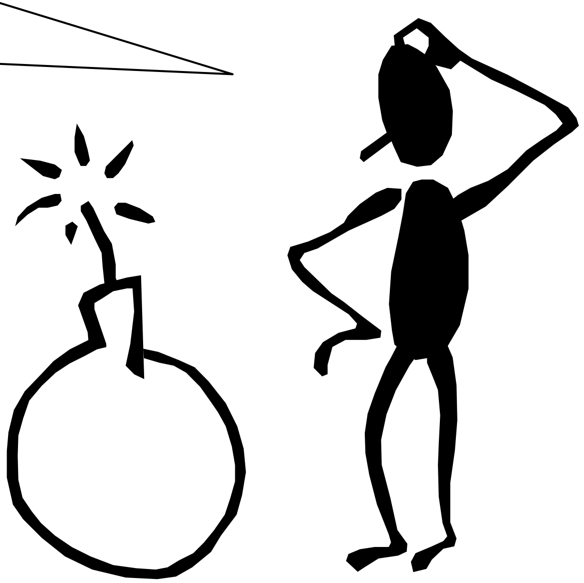
練習：最適解を求めてみよう．

条件の変化（1）

原液AかBどちらかの
使用可能量を10増やせる
どちらを増やす?

疑問のポイントは2点

- 原液A,Bのどちらを増やすのが得か?
- 10増やす効果は?



限界価値 (影の価格)

marginal price(shadow price)

シンプレックス表 (最終)

s_1は原液Aの残量,
s_2は原液Bの残量.

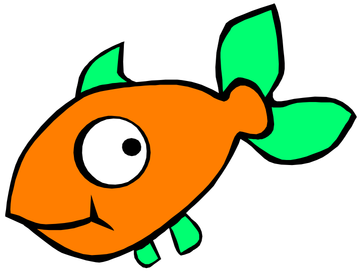
基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	2/5	-1/5	10
x2	0	0	1	-1/5	3/5	15
z	1	0	0	7/5	9/5	135

$$z = 0x_1 + 0x_2 - \frac{7}{5}s_1 - \frac{9}{5}s_2 + 135$$

仮に,原液A(B)を1単位残す→利益が7/5 (9/5) 千円減少

限界価値
(影の価格)

原液A (B) の使用可能量が1単位増える→利益が7/5(9/5)千円増加



限界価値の解釈

- 原液A，Bの使用可能量を増加させようとした場合のコストの限界．
- 原液Bのほうが会社にとって価値が高い．
- 原液Bの使用可能量を1増やすためのコストが9/5千円以下なら，増やしたほうが良い．

原液Bを無制限に増加しても利益を生むか？→増加限界

増加限界

原液Aの使用可能量を変えずに,
原液Bの使用可能量をΔ増やしたと仮定

- 現在の使用可能量　40⇒40＋Δ　に変更

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
s1	0	3	1	1	0	45
s2	0	1	2	0	1	40+Δ
z	1	-6	-5	0	0	0

同順で掃出し実行

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	2/5	-1/5	10−1/5 Δ
x2	0	0	1	-1/5	3/5	15＋3/5 Δ
z	1	0	0	7/5	9/5	135＋5/9 Δ

⇒ $\begin{cases} 10 - 1/5\,\Delta \geqq 0 \\ 15 + 3/5\,\Delta \geqq 0 \end{cases}$

の時，実行可能

⇒ $-25 \leqq \Delta \leqq 50$ ⇒ 原液Bの使用可能量増加が利益を生む増加量(増加限界) は50まで

増加限界 (別な導出法)

原液Aの使用可能量を変えず(s_1=0)に,
原液Bの使用可能量(s_2)を増やしてみよう

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	2/5	-1/5	10
x2	0	0	1	-1/5	3/5	15
z	1	0	0	7/5	9/5	135

$$1x_1 + 0x_2 + \frac{2}{5}s_1 - \frac{1}{5}s_2 = 10$$

$$x_1 = \frac{1}{5}s_2 + 10 \geq 0$$

$$s_2 \geq -50$$

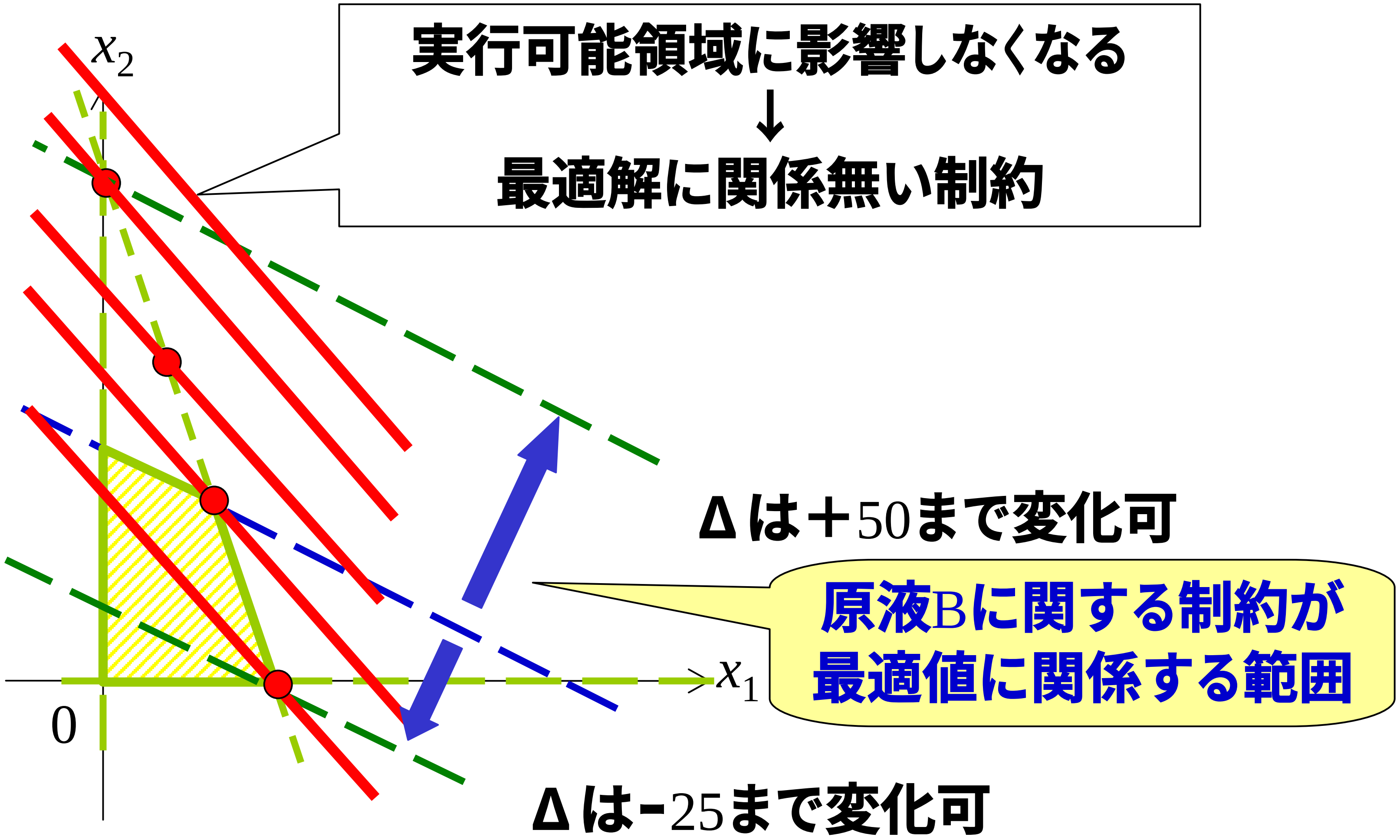
$$0x_1 + 1x_2 - \frac{1}{5}s_1 + \frac{3}{5}s_2 = 15$$

$$x_2 = -\frac{3}{5}s_2 + 15 \geq 0$$

$$s_2 \leq 25$$

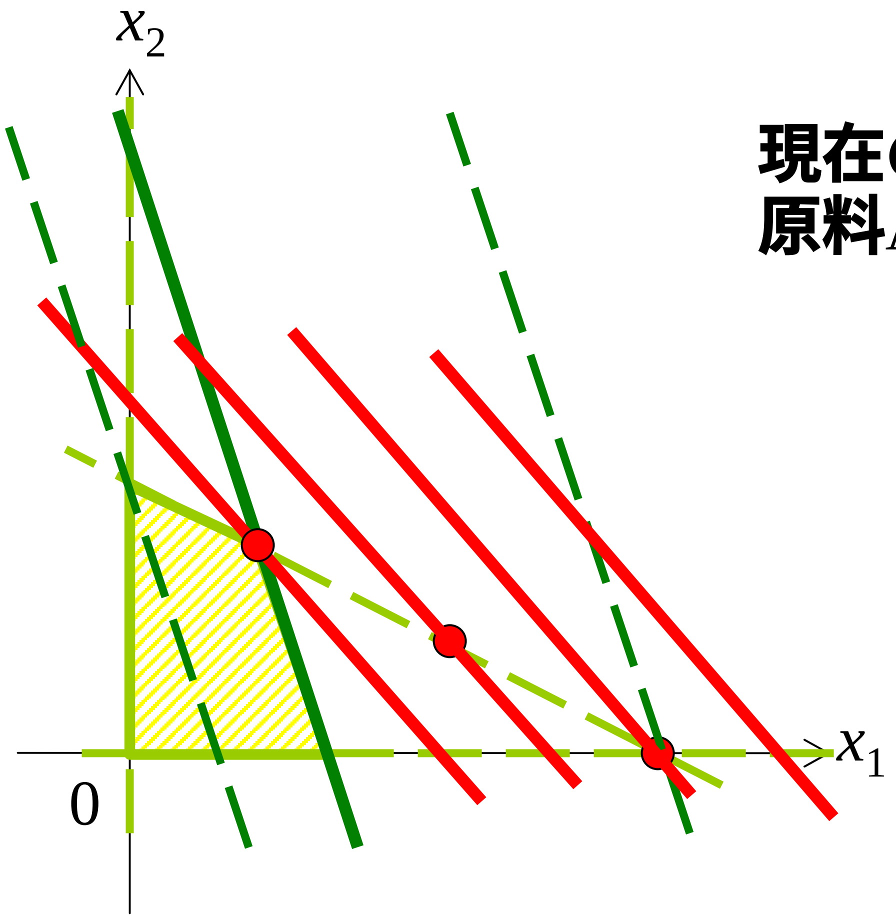
⇒ **S_2は非負制約を50まで破れる** ⇒ **原料Bの使用可能量増加が利益を生む増加量(増加限界) は50まで**

増加限界の図的解釈



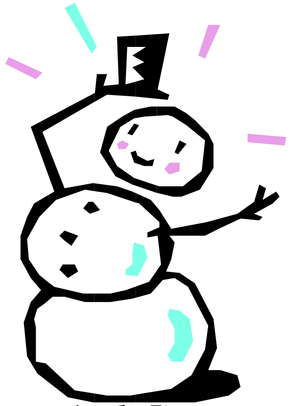
x_2
x_1
0
実行可能領域に影響しなくなる
↓
最適解に関係無い制約
Δは＋50まで変化可
原液Bに関する制約が
最適値に関係する範囲
Δは－25まで変化可

練習　原料Aについて



現在の最適解に対して，
原料Aの増加限界を求めよう

演習1



文教工業では原料A,B,Cを使って2種類の粉製品P,Qを作っている.

	製品P	製品Q	1週間当たり使用制限量
原料A	1 (kg)	7 (kg)	140 (kg)
原料B	2 (kg)	4 (kg)	100 (kg)
原料C	3 (kg)	2 (kg)	120 (kg)
利益/1個	3 (万円)	2 (万円)	

問題：情報を読み取りなさい

① 利益を最大にする1週間当たりの生産計画を求めよ．

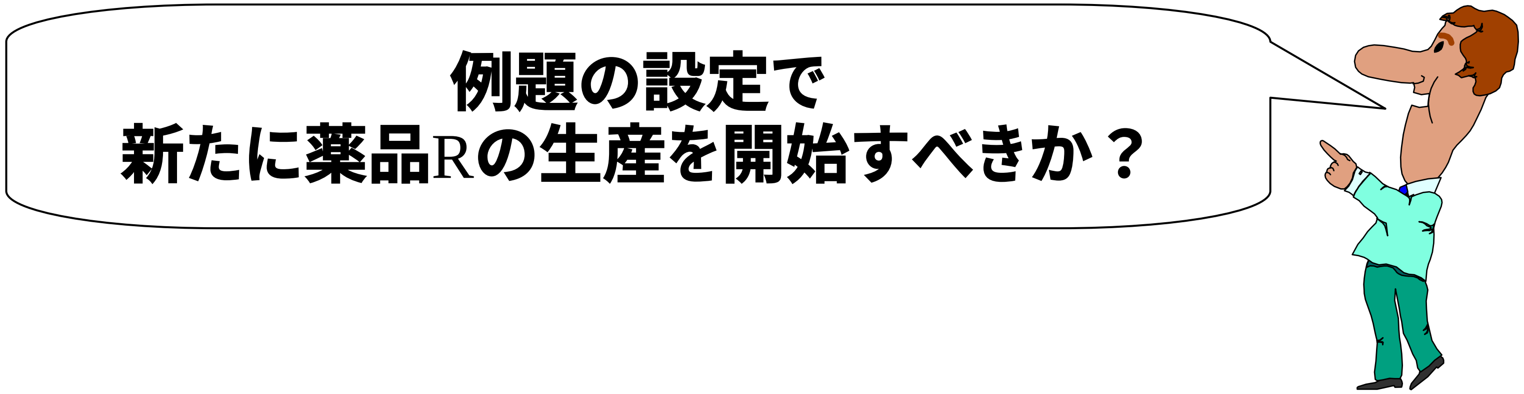
② 原料A,B,Cの限界価値を求めよ．また，その数値の意味を具体的に説明せよ．

③ 上記①で求めた生産計画を行ったとき，原料A,B,Cの増加限界を求めよ．

条件の変化 ⑵
新製品Rは投入すべきか?

新薬品Rの概要

- 薬品Rを1(kl)生産に
  原液Aは3(kl), 原液Bは2(kl)必要
- 薬品Rの1(kl)当たりの予想利益は8（千円）.
- 原液A,Bの使用可能量は変化なし.



判断の基準

現在時点で薬品Rを1(kl)作るのに

使用原材料の価値＝既存製品減産による減収

比較

薬品Rが生み出す利益

薬品R製造の影響評価

- 新たに薬品Rを製造する
  - 薬品P,Qは減産しなくてはならない
    →薬品R1(kl)当たりの薬品P,Qの減収額は？

薬品Rを1(kl)製造

↓

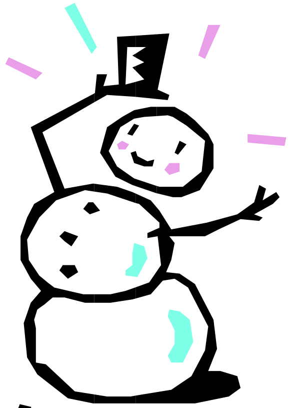
原液Aは3(kl), 原液Bは2(kl)必要

↓

原液A 1(kl)当たりの現在の限界価値：7/5
原液B 1(kl)当たりの現在の限界価値：9/5

薬品Rを1(kl)製造に対する
薬品P,Qの減収額：3×7/5+2×9/5=39/5

演習2



演習1の設定において以下の問に答えよ.

- ある粉製品Cの生産に必要な原料A,B,Cは各々3, 2, 4 (kg)
- 粉製品C1(kg)当たりの予想利益は1万円

製品Cの製造に踏み切るべきか？

利益の変化

	薬品P	薬品Q	使用可能量
原液A	3 kl	1 kl	45 kl/日
原液B	1 kl	2 kl	40 kl/日
利益	6千円/kl	5 千円/kl	

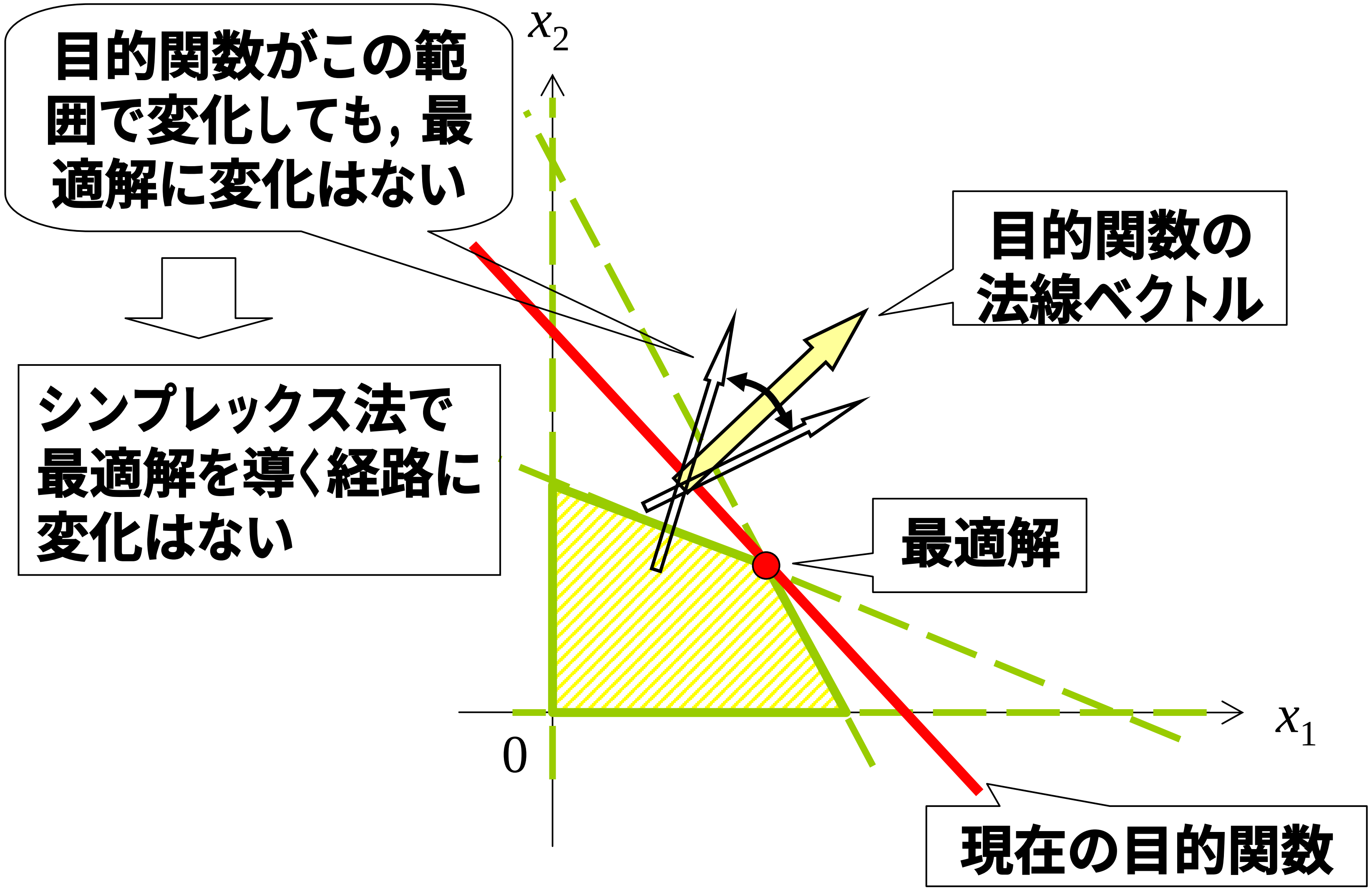
⇒

最適生産計画
薬品P：10 kl
薬品Q：15 kl

薬品Qの利益が8千円/klに変化した.生産計画は変更必要?

現在の生産計画はどの程度
利益が変化しても有効なの?

目的関数の係数の変化



目的関数がこの範囲で変化しても，最適解に変化はない
シンプレックス法で最適解を導く経路に変化はない
目的関数の法線ベクトル
最適解
現在の目的関数
x_1
x_2
0

観察:目的関数を示すz行の変化

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
s1	0	3	1	1	0	45
s2	0	1	2	0	1	40
z	1	-6	-5	0	0	0

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	1/3	1/3	0	15
s2	0	0	5/3	-1/3	1	25
z	1	0	-3	2	0	90

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	2/5	-1/5	10
x2	0	0	1	-1/5	3/5	15
z	1	0	0	7/5	9/5	135

Z行の変化

ピボット列の
z行の値

$$(z\text{行}) - \frac{-6}{3} \times (1\text{行})$$

ピボット行

ピボットの値

$$(z\text{行}) - \frac{-3}{5/3} \times (2\text{行})$$

もし利益がΔだけ変化したら…

製品Pの利益：6千円/kl (変化無し)
製品Qの利益：(5+Δ) 千円/kl に変化した

変化後の最適解が変化前と同じなら，同じ経路で最適解に辿りつくはず

Z行の変化

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
s1	0	3	1	1	0	45
s2	0	1	2	0	1	40
z	1	-6	-5-Δ	0	0	0

$$(z\text{行}) - \frac{-6}{3} \times (1\text{行})$$

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	1/3	1/3	0	15
s2	0	0	5/3	-1/3	1	25
z	1	0	-3-Δ	2	0	90

$$(z\text{行}) - \frac{-3-\Delta}{5/3} \times (2\text{行})$$

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	2/5	-1/5	10
x2	0	0	1	-1/5	3/5	15
z	1	0	0	7/5-Δ/5	9/5+3Δ/5	135+15Δ

最適解が変化しないΔの範囲

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	2/5	-1/5	10
x2	0	0	1	-1/5	3/5	15
z	1	0	0	7/5-Δ/5	9/5+3Δ/5	135+15Δ

現在の基底解が最適
⇔z行の要素がすべて非負

$$\frac{7}{5}-\frac{\Delta}{5}\geq 0$$

$$\Delta \leq 7$$

$$\frac{9}{5}+\frac{3\Delta}{5}\geq 0$$

$$\Delta \leq -3$$

よって，−3≦Δ≦7の範囲の時，最適解は変わらない

⇨ Qの1kl当たりの利益が2千円～12千円の間で変化しても最適解に変化はない．

演習3

演習1において

- 製品Qの利益が30000円/kgに変化した最適解は変化するか判断せよ．
- 製品Pの利益は変化しないで，製品Qの利益のみ変化する．現在の（最適な）生産計画を変更せずに許容できる製品Qの利益の変化はどのような範囲の時か．

演習3 解答例
観察:目的関数を示すz行の変化

z行の変化

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	s3	定数項
s1	0	1	7	1	0	0	140
s2	0	2	4	0	1	0	100
s3	0	3	2	0	0	1	120
z	1	-3	-2	0	0	0	0

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	s3	定数項
s1	0	0	19/3	1	0	-1/3	100
s2	0	0	8/3	0	1	-2/3	20
x1	0	1	2/3	0	0	1/3	40
z	1	0	0	0	0	1	120

ピボット列の
z行の値

ピボット行

$$(z\text{行}) - \frac{-3}{3} \times (3\text{行})$$

ピボットの値

演習3 解答例
もし利益がΔだけ変化したら…

製品Pの利益：3万円/kg (変化無し)
製品Qの利益： (2+Δ) 万円/kg に変化した

変化後の最適解が変化前と同じなら，同じ経路で最適解に辿りつくはず

Z行の変化

$$(\text{z行}) - \frac{-3}{3} \times (3\text{行})$$

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	s3	定数項
s1	0	1	7	1	0	0	140
s2	0	2	4	0	1	0	100
s3	0	3	2	0	0	1	120
z	1	-3	-2-Δ	0	0	0	0

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	s3	定数項
s1	0	0	19/3	1	0	-1/3	100
s2	0	0	8/3	0	1	-2/3	20
x1	0	1	2/3	0	0	1/3	40
z	1	0	-Δ	0	0	1	120

演習3 解答例
最適解が変化しないΔの範囲

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	s3	定数項
s1	0	0	19/3	1	0	-1/3	100
s2	0	0	8/3	0	1	-2/3	20
x1	0	1	2/3	0	0	1/3	40
z	1	0	-Δ	0	0	1	120

現在の基底解が最適
⇔z行の要素がすべて非負

$$-\Delta \geq 0$$

$$\Delta \leq 0$$

よって，Δ≦0の範囲の時，最適解は変わらない

⇒ 製品Qの1kg当たりの利益が2万円以下に変化しても最適解も利益も変化はない．

⇒ 製品Qの1kg当たりの利益が3万円に変化すると最適解も変化する．