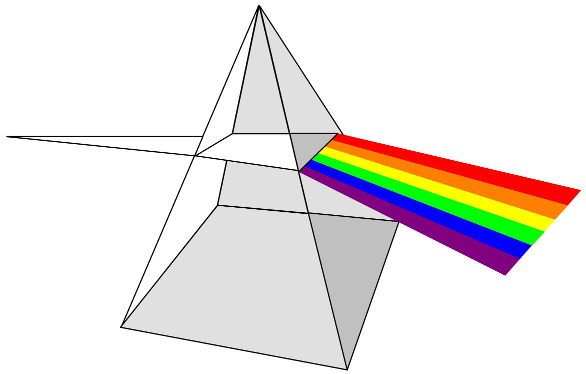


Linear Programming I

線形計画の解を導く素朴な方法達

線形計画とは
(Linear Programming)

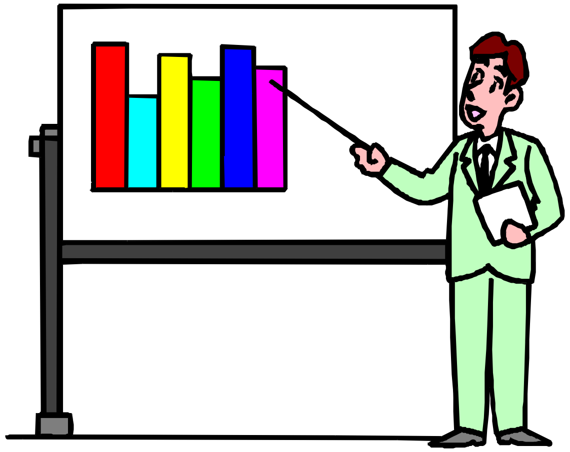
えるぴー
省略して「LP」と呼ぶ

- 数理計画の中で基礎的な問題

目的関数：線形
制約式：すべて線形

制約式の
数は有限

数理計画全般に影響する
興味深い性質が得られる



線形計画に対する解法

- グラフ解法
  - 2（～3）変数の問題に図を用いて解を導く．
- 総当たり法
  - シンプレックス法の基礎
- シンプレックス法（Simplex method）
  - 変数が多くなっても適用できる．
- 内点法（Interior point method）
  - 特に大規模な問題を解くときに良い

例題1 生産計画

- 文教工業が2つの製品P，Qを売り出した.
- 2つの製品とも原料A，Bから生産される.
- 利益が最大になる一日の生産量は？

	製品P	製品Q	使用可能量/日
原料A	3	1	45
原料B	1	2	40
利益(千円)	6	5	

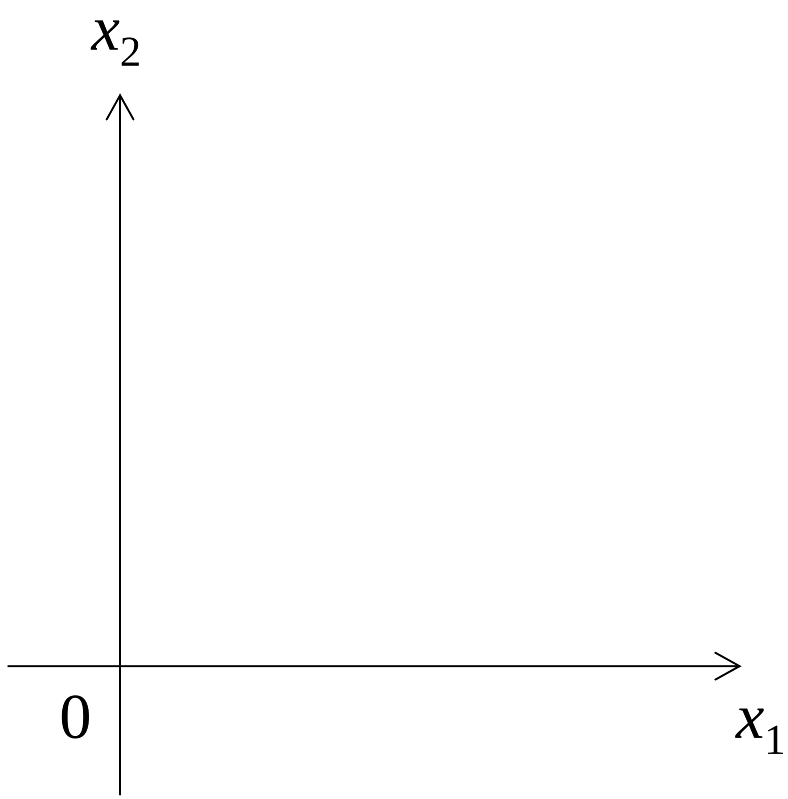
例題1(続) グラフを用いた解法

例題1を解いてみよう．

例題1を定式化

x_1：製品Pの生産量
x_2：製品Qの生産量

$$
\begin{aligned}
\text{max. } & z = 6x_1 + 5x_2 \\
\text{s.t. } & 3x_1 + x_2 \leqq 45 \\
& x_1 + 2x_2 \leqq 40 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$



作業1：制約式をx_1-x_2平面に図示せよ．

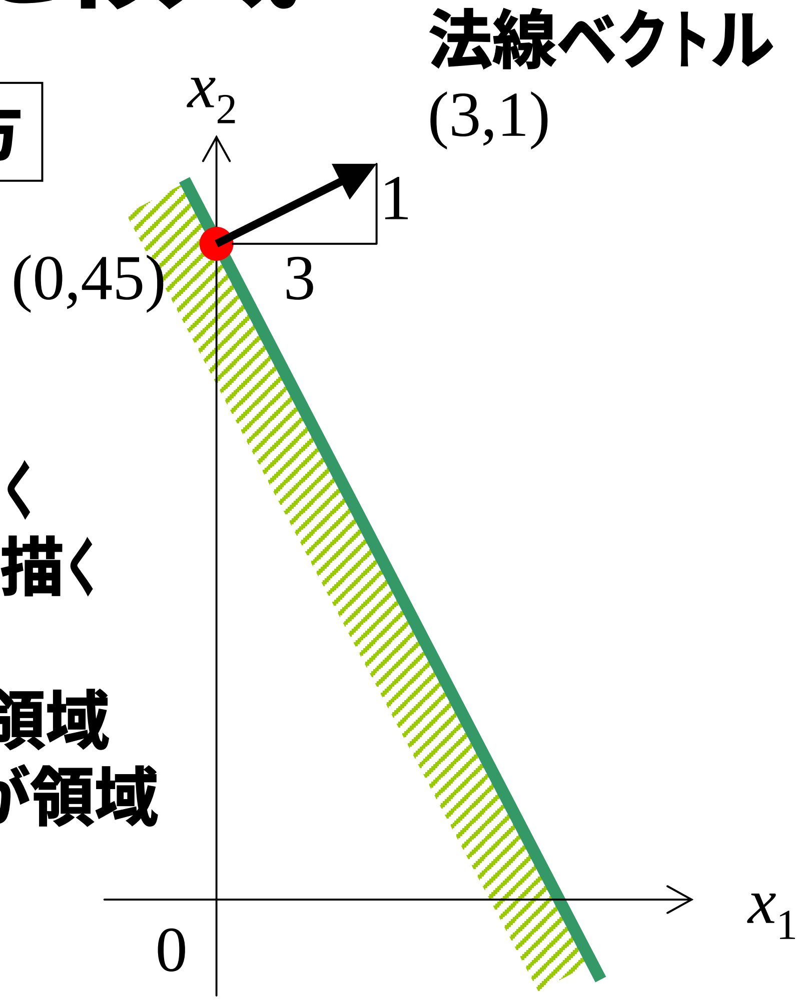
不等式と領域

$3x_1+\ x_2 \leqq 45$ の示す領域の描き方

① $3x_1+\ x_2=45$の直線を描く

- 直線が通る一点を見つける
- その点から法線ベクトルを描く
- 法線ベクトルに直交し直線を描く

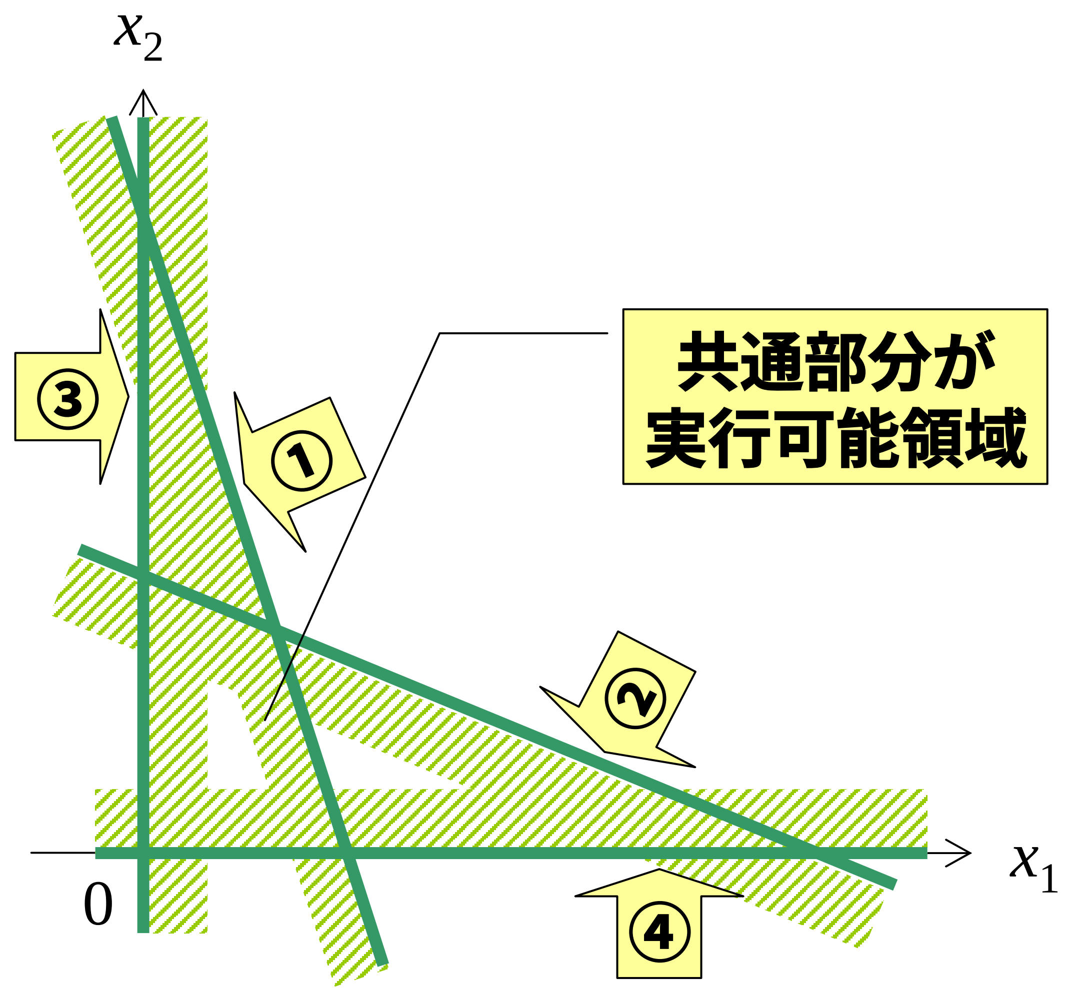
② ≧の時:法線ベクトルの向きが領域
　 ≦の時:法線ベクトルと逆向きが領域



実行可能領域の図示

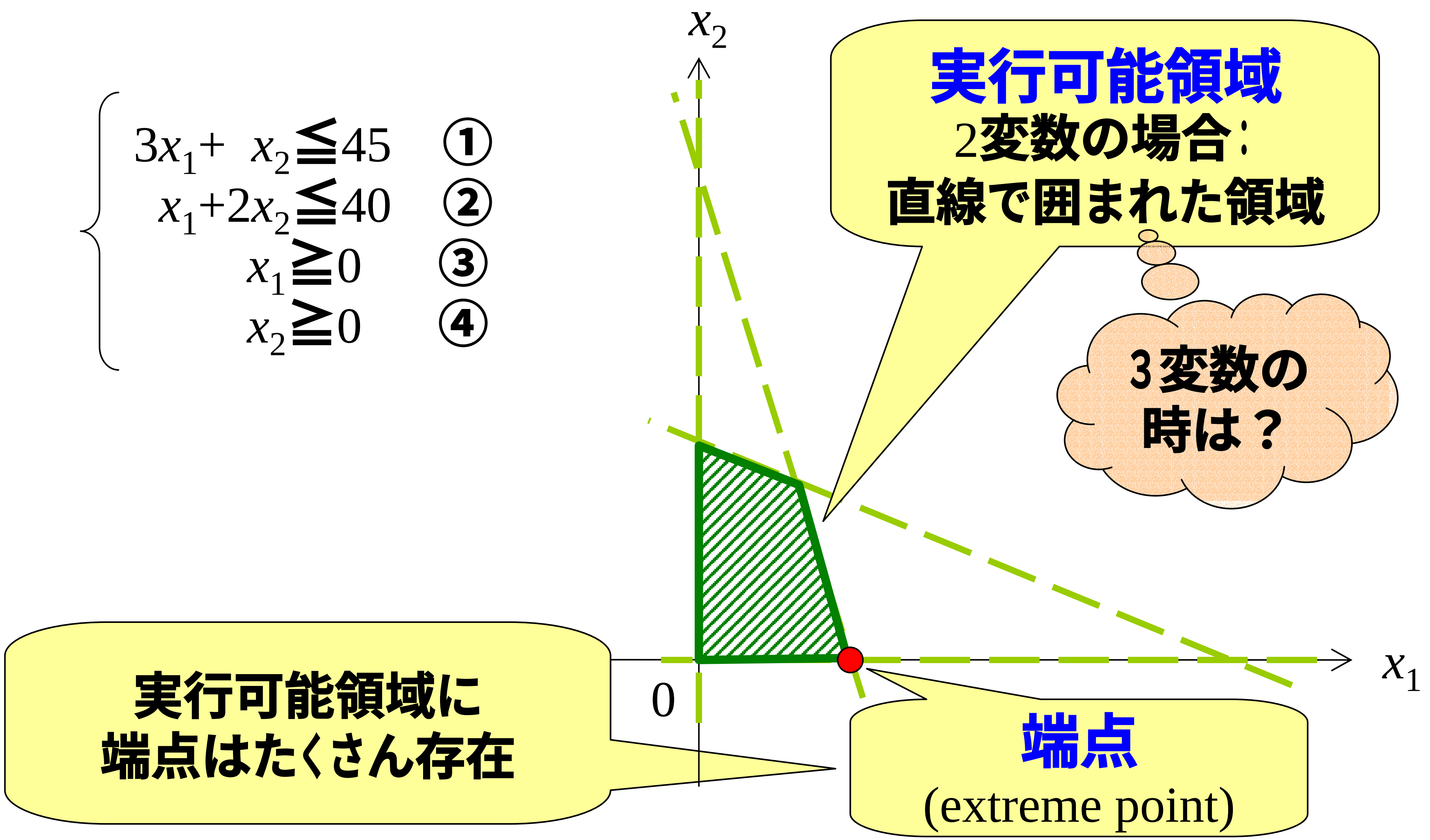
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leqq 45 & ① \\ x_1 + 2x_2 \leqq 40 & ② \\ x_1 \geqq 0 & ③ \\ x_2 \geqq 0 & ④ \end{cases}$$

実行可能領域は
これらの不等式を
全て満たす点の集合



実行可能領域の特徴

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leqq 45 & \text{①} \\ x_1 + 2x_2 \leqq 40 & \text{②} \\ x_1 \geqq 0 & \text{③} \\ x_2 \geqq 0 & \text{④} \end{cases}$$

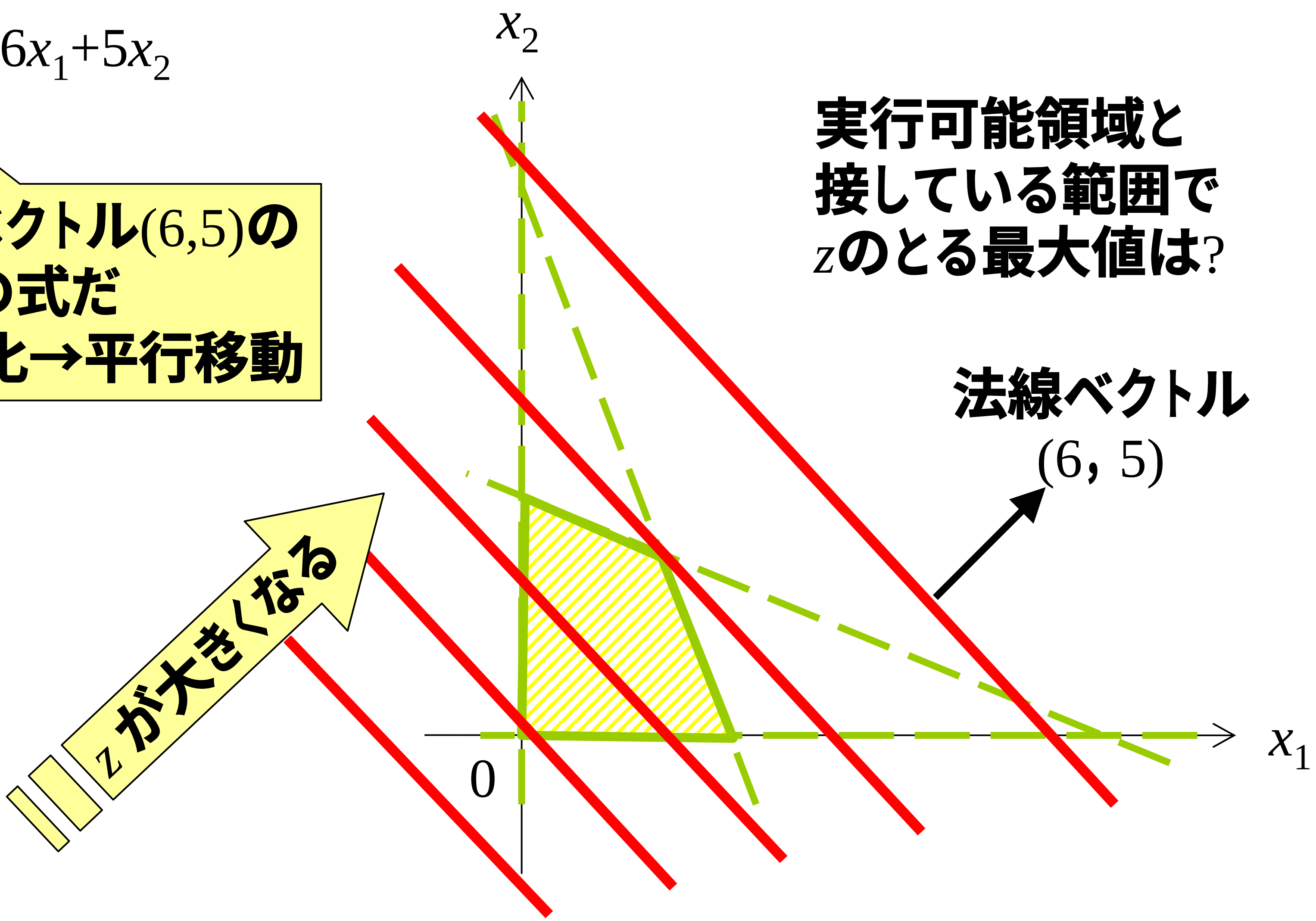


目的関数を動かす

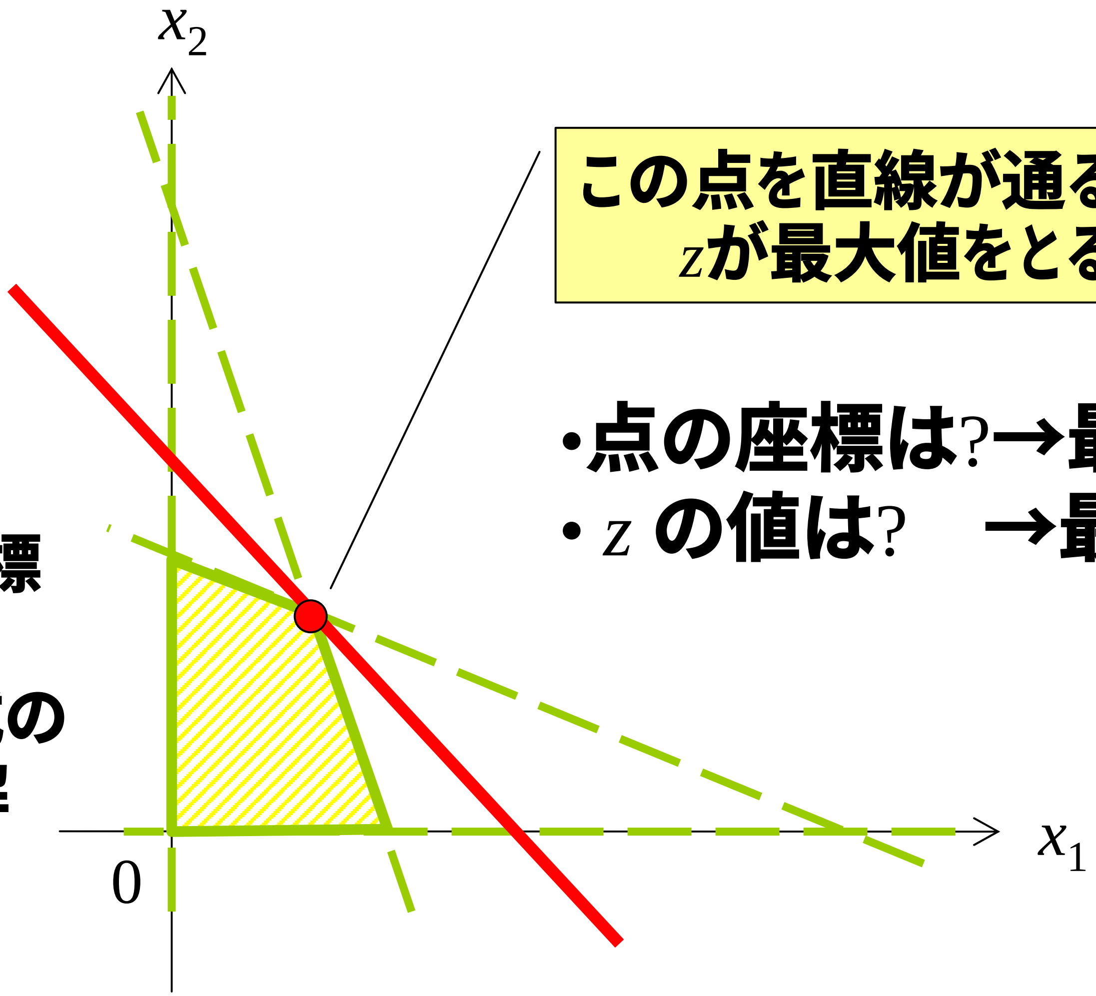
目的関数 $z=6x_1+5x_2$

- **法線ベクトル**(6,5)**の直線の式だ**
- z**が変化→平行移動**

実行可能領域と接している範囲でzのとる最大値は?



最適値・最適解を見つける



この点を直線が通るとき
zが最大値をとる

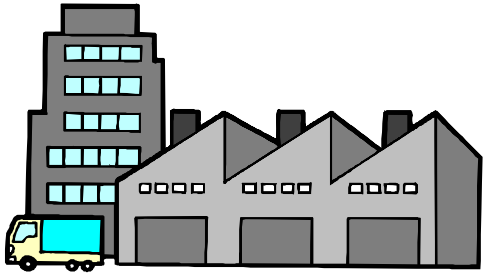
- 点の座標は?→最適解
- z の値は?　→最適値

直線の交点の座標

⇕

関係する直線の式の
連立方程式の解

演習1　生産計画(2)



文教工業では，3種類の原料M1, M2, M3を用いて,二つの製品A,Bを製造している．

	A	B	利用可能量
M1	15	11	1650
M2	10	14	1400
M3	9	20	1800
利益	5 万円	4 万円	

(1単位当たり)

利益が最大になる製品AとBの生産量を求めたい．
定式化し，最適解と最適値を求めてみよう．

復習：連立方程式を解く

実行可能領域の端点を求める

||

連立方程式を解く

計算機向きの
うまい解き方があるんだよな．
高校までは習わないけど…

⇒(復習)　ガウスの消去法

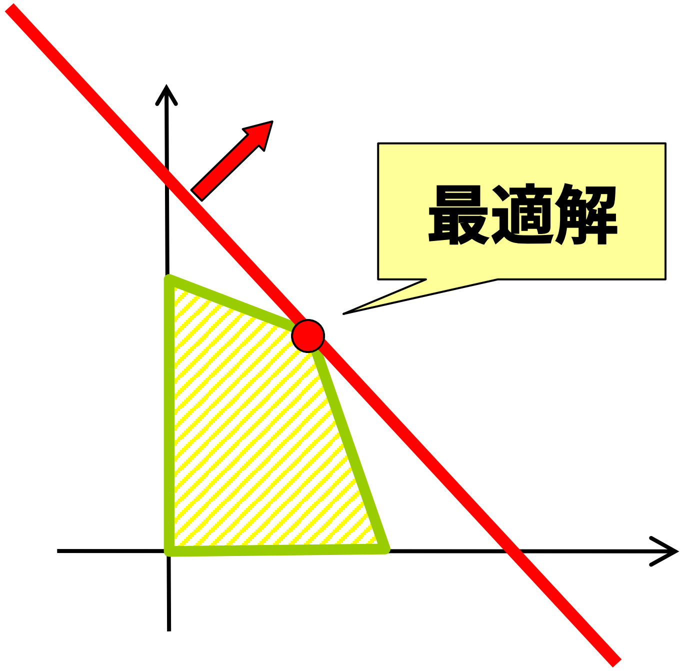
図を用いる解法の欠点

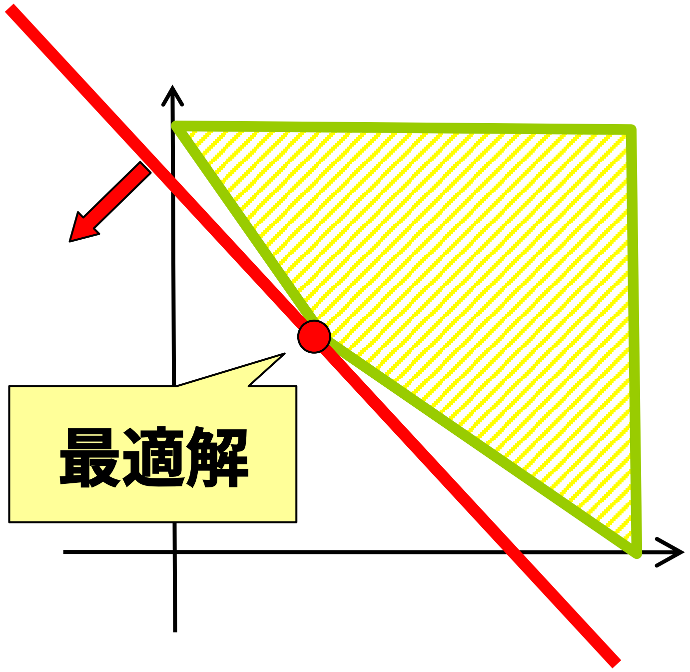
- 2～3変数までの問題にのみ適応可能
  - 現実的に解きたい問題：数十～数百万変数
- 計算機で実行しにくい

図を用いない解法を考えよう!!

最適解を発見するヒント

最適解は実行可能領域のどんな場所にある?





最適解の持つ性質

重要な性質：
最適解（の少なくとも一つ）は<u>実行可能領域の端点</u>に存在

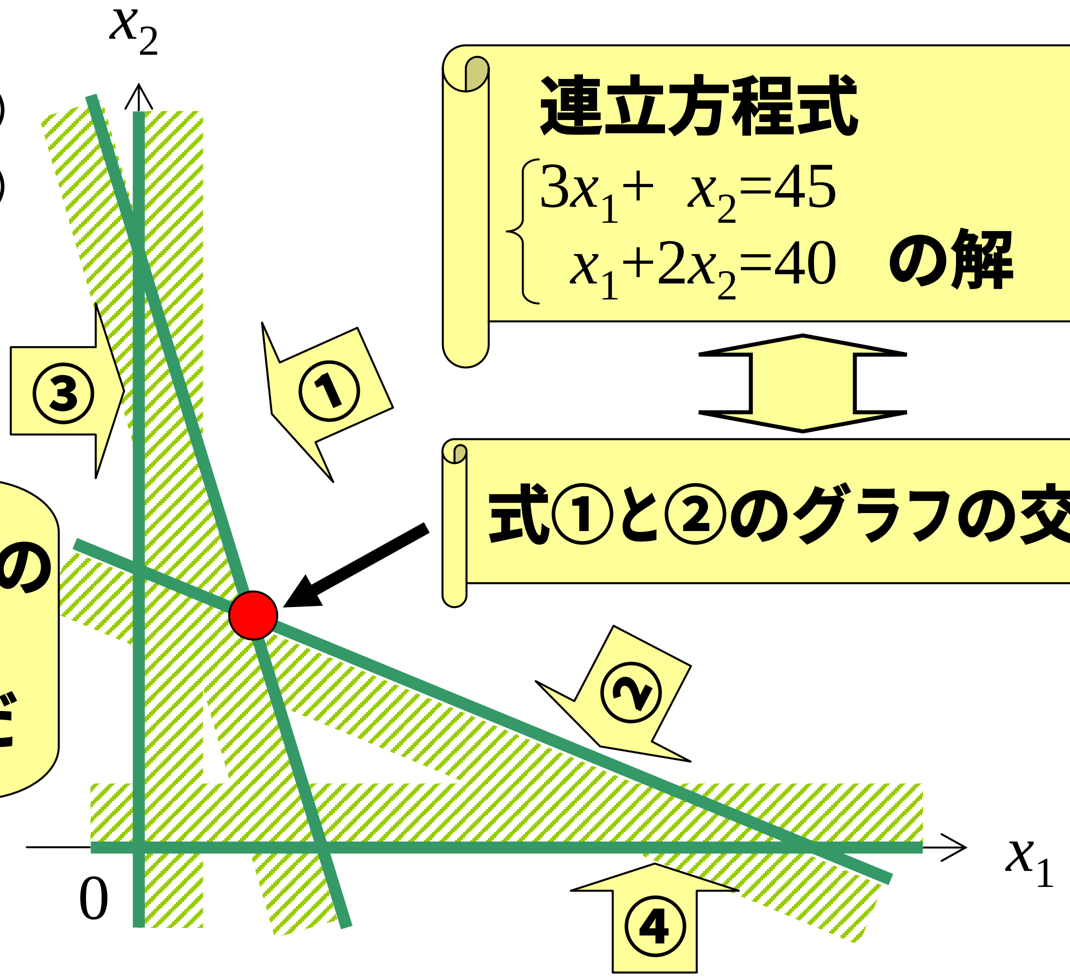
実行可能解の端点をすべて探索
↓
その中から最適解を見つける

総当たり法

実行可能領域の端点と式の関係

例題1より

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leqq 45 & ① \\ x_1 + 2x_2 \leqq 40 & ② \\ x_1 \geqq 0 & ③ \\ x_2 \geqq 0 & ④ \end{cases}$$

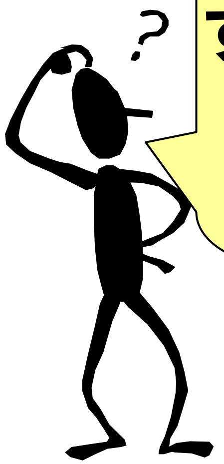


連立方程式

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 45 \\ x_1 + 2x_2 = 40 \end{cases}$$ **の解**

⇕

式①と②のグラフの交点



すべての組合せの連立方程式を解けばいいんだ

解いてみよう!!

演習2　例題1のすべての交点を探そう

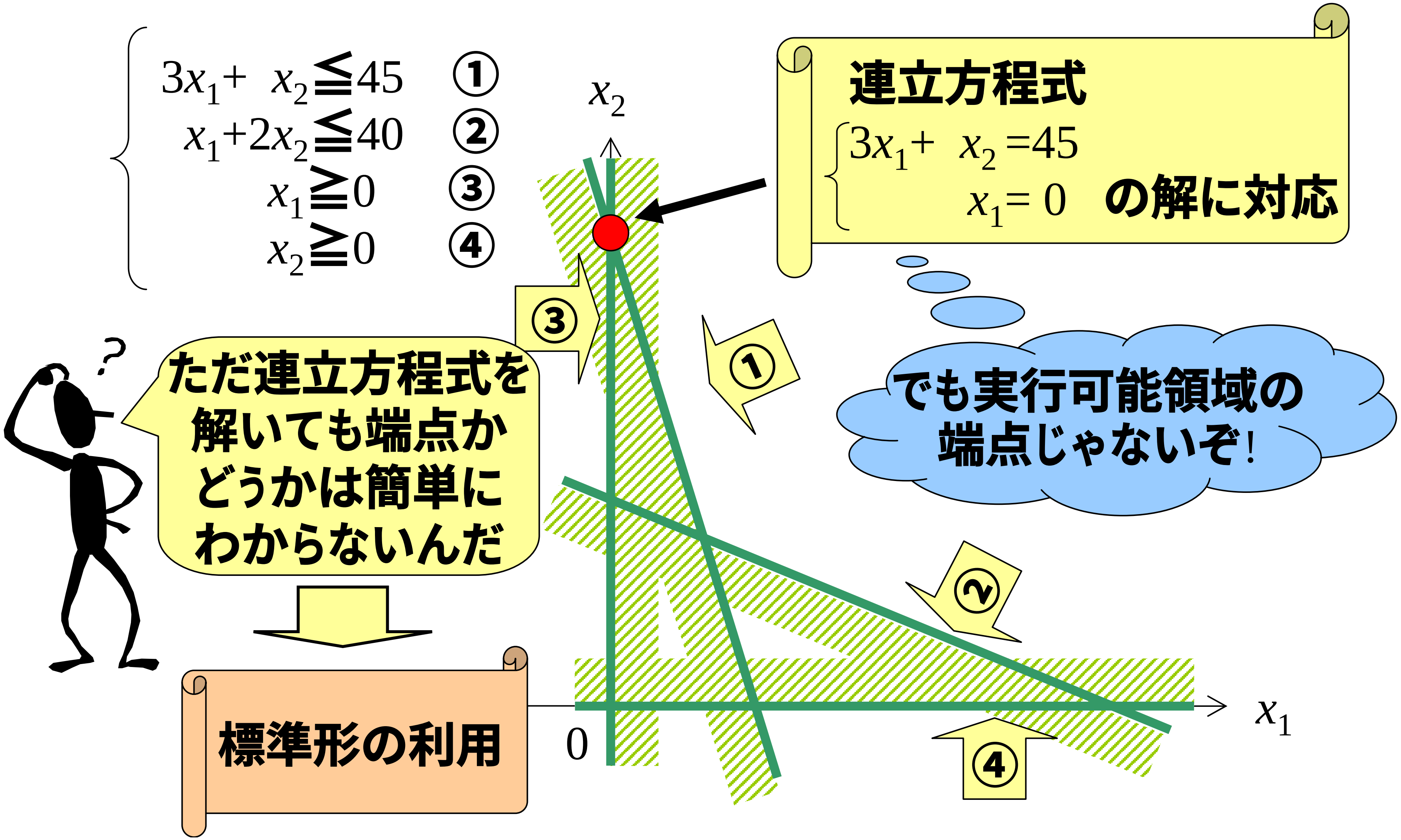
すべての組合せの連立方程式とその解

式の組合せ	x1の値	x2の値	実行可能解？	目的関数値
式①と②				
式①と③				
式①と④				
式②と③				
式②と④				
式③と④				

目的関数：max. $z=6x_1+5x_2$

実行可能領域の端点？

$$
\begin{cases}
3x_1 + \ \ x_2 \leqq 45 & ① \\
x_1 + 2x_2 \leqq 40 & ② \\
x_1 \geqq 0 & ③ \\
x_2 \geqq 0 & ④
\end{cases}
$$



線形計画問題の標準形

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \\
\text{subject to} \quad & a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\
& \qquad \vdots \\
& a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \\
& x_1, \cdots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

標準形 (standard form)

- **目的関数は最大化**
- **条件式は (非負条件以外) 等式で表現**
- **条件式の右辺(b_i)は 非負**
- **すべての変数が非負**

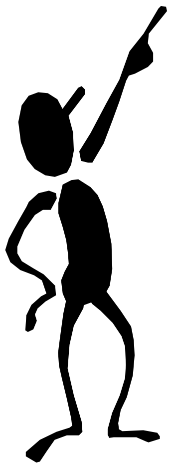
標準形の例

標準形で表現された制約式

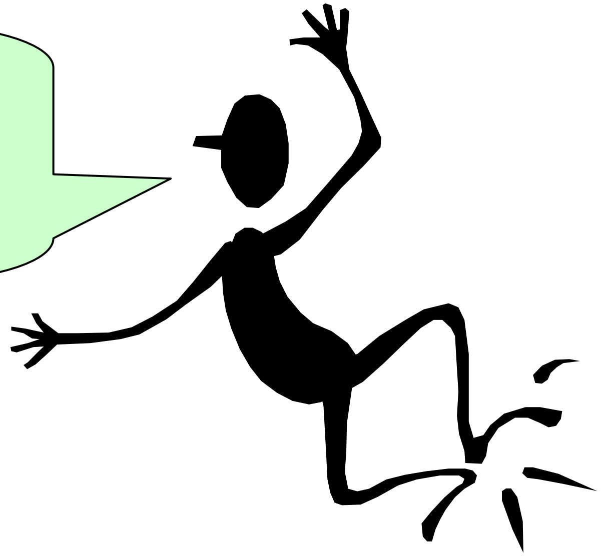
$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 + s_1 \quad &= 45 \\
x_1 + 2x_2 \quad + s_2 &= 40 \\
x_1, x_2, s_1, s_2 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

標準形ではない表現の制約式

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 &\leqq 45 \\
x_1 + 2x_2 &\leqq 40 \\
x_1, x_2 &\geqq 0
\end{aligned}
$$



表現している内容は同じ!!
異なるのは，見た目だけ



すべてのLPは標準形で表現できる

対処法

① 目的関数が最小化の時
- 両辺に負を掛け，最大化問題に変形

② 条件式に不等式が含まれている時
- ≦の時：スラック変数の導入⇒等式化
- ≧の時：サープラス変数を導入⇒等式化

③ 右辺の定数bが負の数の時
- 両辺に(ー1)を掛ける

④ 非負条件の無い変数（自由変数）が含まれる時
- 正と負の部分に分けて2変数に置き換える

個別に詳しく

① 目的関数の標準形への変換

最小化問題の時
⇒式を(ー1)倍し，最大化問題に変形する

(例) minimize $z=4x_1 - 7x_2$

$\Updownarrow$

maximize $(-z) = -4x_1 + 7x_2$

参考

z=min{3,-2}

$\Updownarrow$

(-z)=max{-3,2}

$\Updownarrow$

z= -2

② 制約式の等号化

(右辺) ≦b の時

新たな非負変数を導入

(右辺)＋s＝b

s≧0

スラック変数
(slack:緩い)

(右辺) ≧b の時

(右辺)－t＝b

t≧0

サープラス変数
(surplus:過剰)

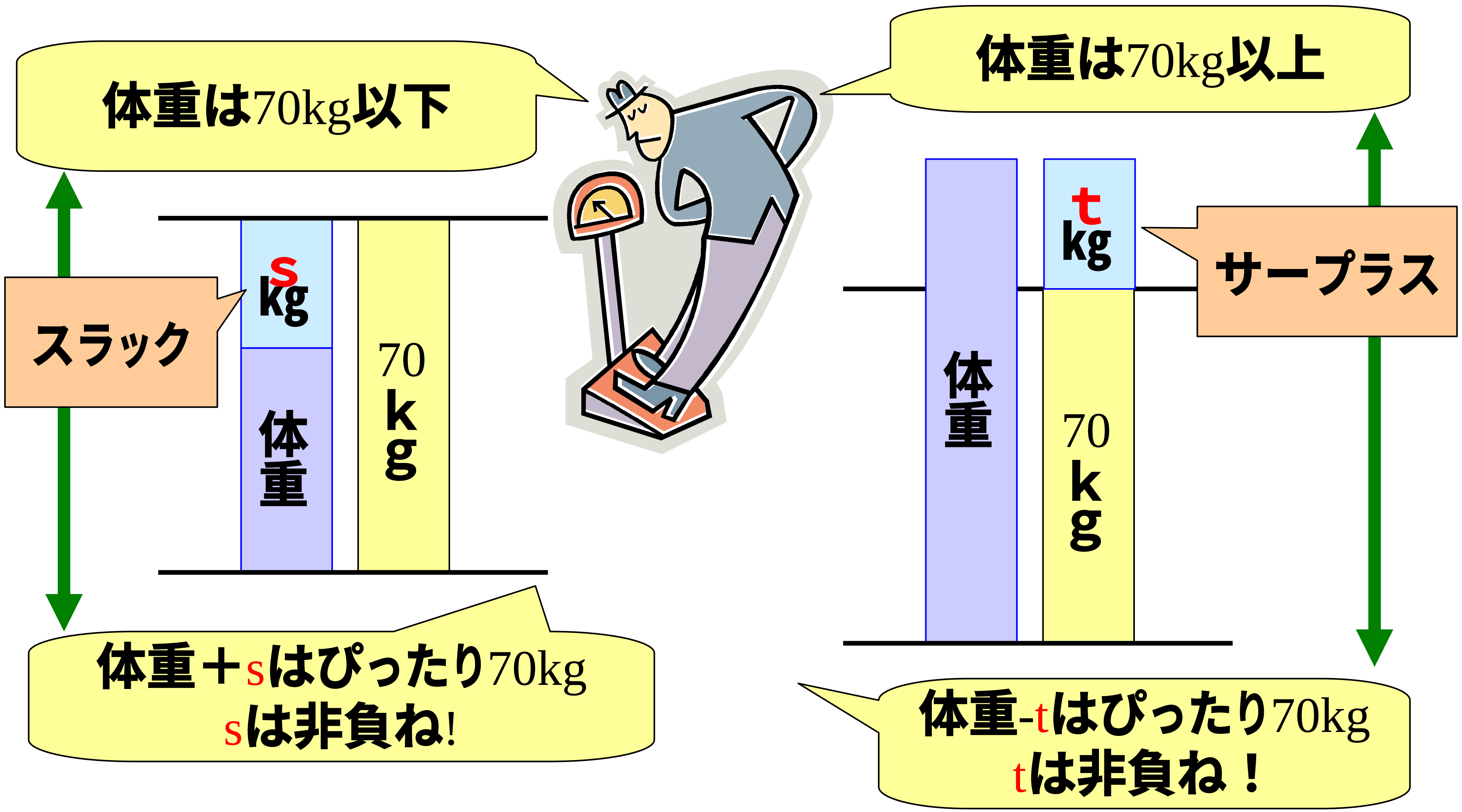
(例) $4x_1 - 7x_2 \leqq 12$

$$4x_1 - 7x_2 + s = 12$$

(例) $4x_1 - 7x_2 \geqq 12$

$$4x_1 - 7x_2 - t = 12$$

スラック変数･サープラス変数



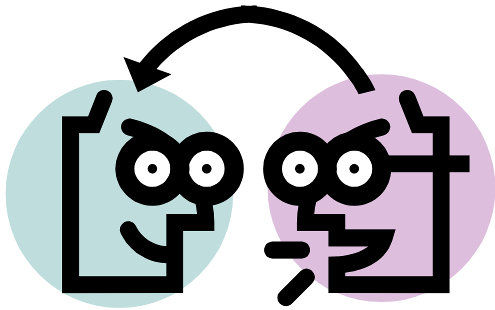
③ 右辺(定数)bを正の数にする

制約式右辺の定数部分(b)が負の数のとき
⇒両辺に(−1)を掛ける

(例) $4x_1 - 7x_2 \leqq -9$

$-4x_1 + 7x_2 \geqq 9$

※ 両辺にマイナスの数を掛けると不等号は逆転する



④ 自由変数の非負制約化

非負制約の無い変数（自由変数） x
⇒ふたつの非負変数 x^+, x^- の差に置き換える

⇕

自由変数 x ⇒ $x = x^+ - x^-$, $x^+ \geqq 0$, $x^- \geqq 0$

自由変数

（例） $4x_1 - 7x_2 \leqq 6$, $x_1 \geqq 0$

⇕

$4x_1 - 7(x_2^+ - x_2^-) \leqq 6$, $x1 \geqq 0$, $x_2^+ \geqq 0$, $x_2^- \geqq 0$

標準形への変形例 (1)

一般形

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 20x_1 + 30x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \le 800 \\ & -3x_1 - 4x_2 \ge -1800 \\ & 3x_1 + \ \ x_2 \le 1500 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

→ **正準形**

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 20x_1 + 30x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \le 800 \\ & 3x_1 + 4x_2 \le 1800 \\ & 3x_1 + \ \ x_2 \le 1500 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

↓

標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 20x_1 + 30x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + s_1 = 800 \\ & 3x_1 + 4x_2 + s_2 = 1800 \\ & 3x_1 + \ \ x_2 + s_3 = 1500 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \ge 0 \end{aligned}$$

スラック変数の導入

標準形への変形例 (2)

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = 3x_1 - 5x_2 \\
\text{subject to} \quad & 9x_1 - 4x_2 \geq -5 \\
& -7x_1 + 5x_2 = 8 \\
& 6x_1 - 2x_2 \geq 1 \\
& x_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & -z = -3x_1 + 5(x_2^+ - x_2^-) \\
\text{subject to} \quad & -9x_1 + 4(x_2^+ - x_2^-) + s_1 = 5 \\
& -7x_1 + 5(x_2^+ - x_2^-) = 8 \\
& 6x_1 - 2(x_2^+ - x_2^-) - s_3 = 1 \\
& x_1, x_2^+, x_2^-, s_1, s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

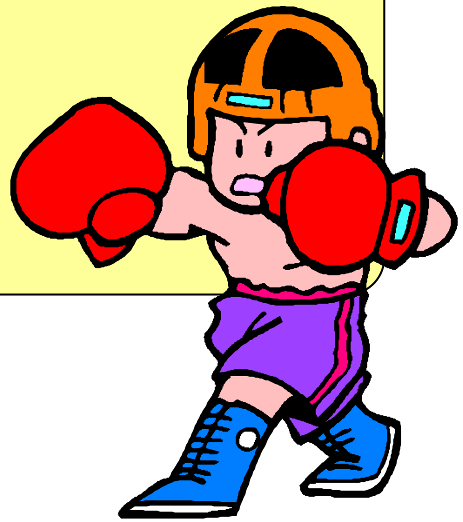
演習2　標準形に変形せよ

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = 2x_1 - x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \le 120 \\
& x_1 \le 50 \\
& x_2 \le 90 \\
& x_1 + x_2 \ge 60 \\
& x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

標準形の利用
実行可能領域の端点を見つける

その前にもう少し知識をためよう

- 連立方程式の<u>**変数の数**</u>と<u>**式の数**</u>と<u>**解**</u>の関係
- 独立変数
- 基本解
- 基底変数と非基底変数



連立方程式と解の関係

m変数, n本の方程式から成る連立方程式

- m=nの時:
  - 解が一意に定まる or 不定 or 不能 (解なし)
- m<nの時:
  - 基本的にm=nの時と同じ.
- m>nの時:
  - m-n個の変数の解は一意に定まらない (**独立変数**).
    ⇔ m-n個の独立変数の値を定めると,
    残った変数の方程式の解が定まる.

例えば…

以下の連立方程式の解は？

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + s_1 = 800 \\
3x_1 + 4x_2 + s_2 = 1800 \\
3x_1 + x_2 + s_3 = 1500
\end{cases}
$$

変数の数：5個
方程式の数：3個

⇩

(5-3=)2個の独立変数に値を与えれば解を持つ

例えば, x_1, x_2を独立変数に選び, 値に0を与えてみよう.

→連立方程式の解はどうなるだろうか?

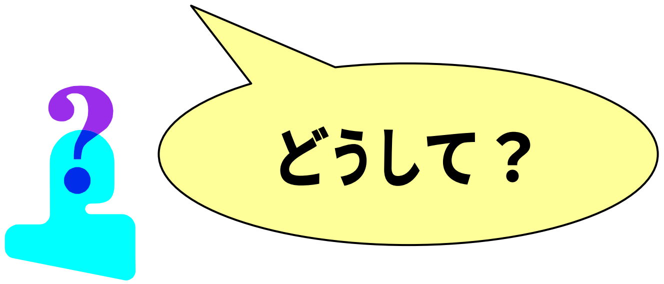
実行可能領域の端点の見つけ方

① 制約条件式を**標準形**にする．

② 連立方程式の解が定まるように独立変数を適当に決めて，それらの値を0にする．
→連立方程式の解が得られる．（**基本解**）

※実際に解を求める変数＝**基底変数**
⇔値が0に定められた変数＝**非基底変数**

③ 基本解が非負なら，実行可能領域の端点



例題3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + s_1 \qquad\qquad\qquad = 800 \\ 3x_1 + 4x_2 \qquad + s_2 \qquad = 1800 \\ 3x_1 + x_2 \qquad\qquad + s_3 = 1500 \end{cases}$$

(1) すべての独立変数を選ぶパターンを書き出せ。
(2) (独立変数に0を与えた場合の) 基本解を求めよ。

例題3 すべての基本解

x1	x2	s1	s2	s3	端点？	目的関数値
0	0	800	1800	1500	○	0
0	400	0	200	1100	○	12000
200	300	0	0	600	○	13000
366.7	100	133.3	0	0	○	12333
500	0	300	300	0	○	10000
0	450	-100	0	1100	×	
0	1500	-2200	-4200	0	×	
440	180	0	-240	0	×	
800	0	0	-600	-900	×	
600	0	200	0	-300	×	

値が0になっている変数が選んだ独立変数.

演習3

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\ & z=5x_A+4x_B \\
\text{s.t.}\ & 15x_A+11x_B \leqq 1650 \\
& 10x_A+14x_B \leqq 1400 \\
& 9x_A+20x_B \leqq 1800 \\
& x_A, x_B \geqq 0
\end{aligned}
$$

図を用いない素朴な解法
総当たり法

手順1 標準形にする.

手順2 すべての基本解を導く.

手順3 実行可能領域の端点かどうか調べる.

手順4 実行可能領域の端点である基本解の中で目的関数値を最大(最小)にする基本解を見出す→最適解が見つかる

演習4 総当たり法で解いてみよう

(1)

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 4x_2 - 2x_3 \ge 120 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 60 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

総当たり法の欠点

- 標準形がn個の変数とm本の等式条件の時
  - 基本解はどのくらい存在するか?

    →膨大な数の連立方程式を解く.
    (変数の数が多くなったら事実上実行不可能)
- 実行可能領域の端点に関係ない基本解も計算している. (←無駄)

⇒ より無駄の無い解法 <u>シンプレックス法</u>