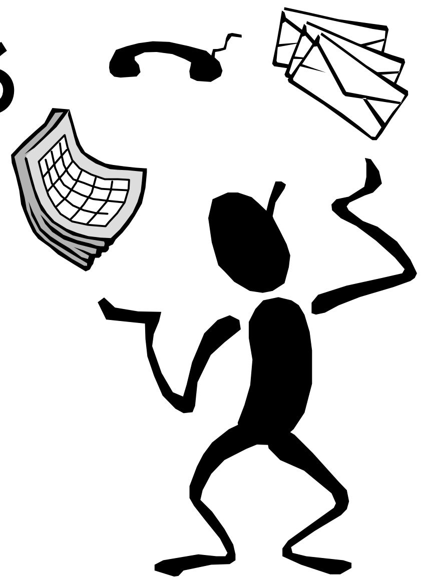
双対問題

別な観点から問題を眺める



例題1

- 文教工業：2つの素材Q,Rを製造販売
- 素材Q,R共, 原液A,Bから生産
- 利益最大の生産計画は？

	素材Q 1kg当たり	素材R 1kg当たり	使用可能量
原液A	2(kl)	1(kl)	70(kl/日)
原液B	3(kl)	4(kl)	180(kl/日)
利益	6(千円)	4(千円)	

定式化してみよう！

定式化

製品Aの製造量をx_1，製品Bの製造量をx_2とおく．

$$
\begin{array}{lll}
\max & 6x_1 + 4x_2 & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \leq 70 & \cdots ① \\
 & 3x_1 + 4x_2 \leq 180 & \cdots ② \\
 & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

最適値はどの程度？
見積もってみよう

見積もり例

制約式①×2+制約式②×1：$7x_1+6x_2 \leqq 70 \times 2+180=320$

$\geqq$

目的関数：$6x_1+4x_2$

$x_1,x_2 \geqq 0$**より**

⇨ **最適値の上界は320**

演習1：もっと良い見積もりをしてみよう

最適値の上界･下界

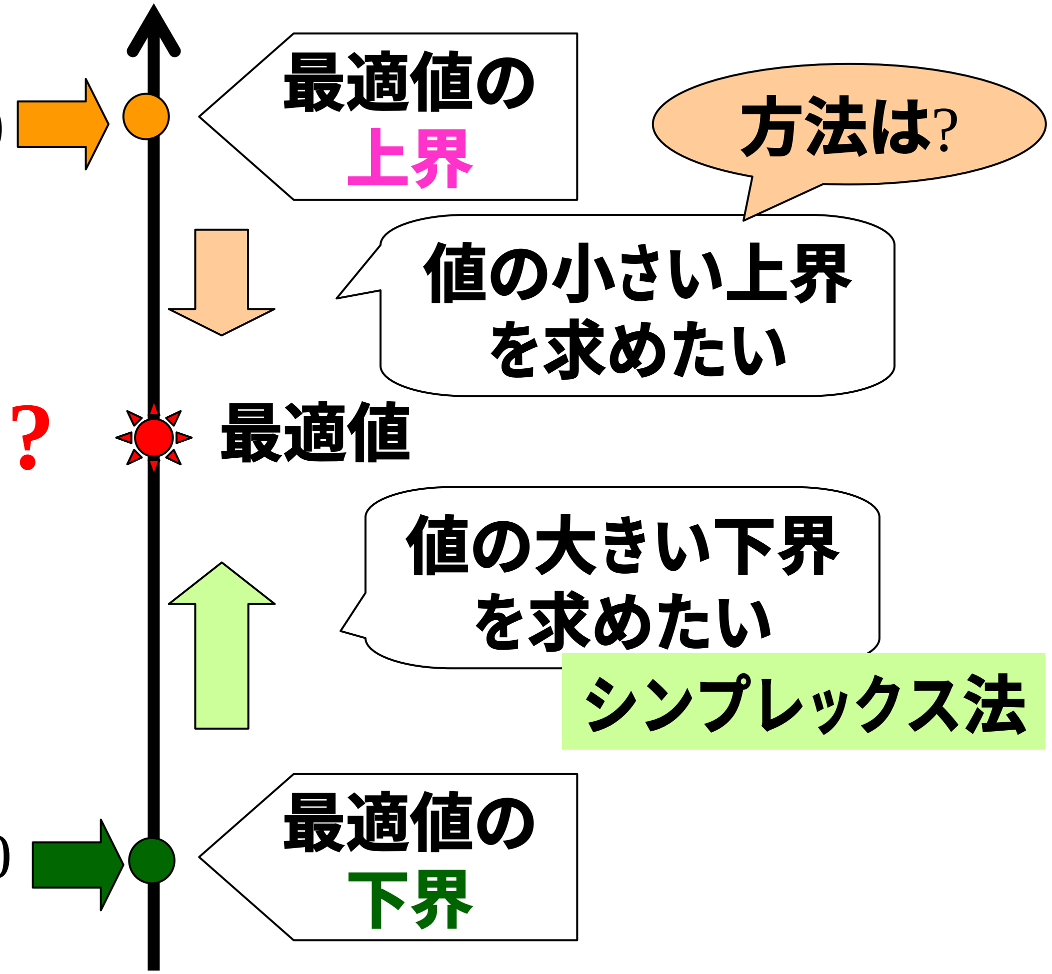
前ページの見積もり 320

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 6x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \le 70 \\
& 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

実行可能解

$x_1=10$, $x_2=30$

⇒（目的関数値）＝180



より良い上界の見積もり方法

各制約式を何倍するのが適切かを考える

小さくしたい

制約式①×y_1+制約式②×y_2：

$$(2x_1+x_2)\times y_1+(3x_1+4x_2)\times y_2 \leqq 70y_1+180y_2$$

$$\|$$

$$(2y_1+3y_2)\times x_1+(y_1+4y_2)\times x_2$$

$$\geqq$$

目的関数：$6x_1+5x_2$

$$2y_1+3y_2 \geqq 6$$
$$y_1+4y_2 \geqq 5$$

$$\begin{array}{ll} \min & 70y_1+180y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1+3y_2 \geq 6 \\ & y_1+4y_2 \geq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

この問題の最適解が
最良の上界を与える

演習2

次の問題の最適値のより良い下界を求める線形計画問題を作ってみよう

$$
\begin{array}{lr}
\min & 70y_1 + 180y_2 \\
\text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\
 & y_1 + 4y_2 \geq 4 \\
 & y_1, y_2 \geq 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow$

どのような線形計画問題が得られるか？

双対な関係

問題(P)

$$\begin{array}{ll} \max & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + \quad x_2 \le 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

問題(D)

$$\begin{array}{ll} \min & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \ge 6 \\ & y_1 + 4y_2 \ge 4 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{array}$$

主問題 ⟶ 双対問題

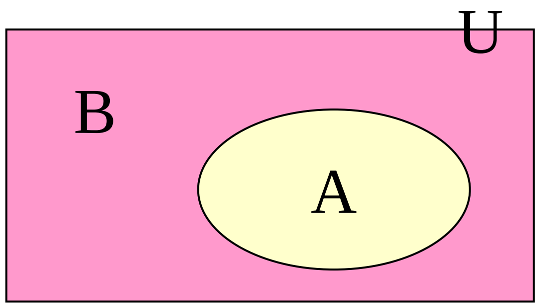
双対問題 ⟵ 主問題

「双対（そうつい）」とは

- あるAに，ある操作αを行ったら，Bを得た．
- Bに，操作αを行ったら，Aを得た．

AとBは（操作αに関し）**双対**の関係

（例）　集合Uの部分集合A：
集合Aの補集合を集合Bとする．
集合Bの補集合は集合A．



⇒集合Aと集合Bは（補集合という操作に関し）双対．

面白そうな双対の関係

- (射影) 幾何学の分野：点と線は双対.
  - 定理「2点を通る直線は1つ」
  - 定理「2直線を通る点は1つ」

  $\Big\}$ **双対性** (duality)

- いろいろな数理的な場面で双対の関係が本質的に重要役割を演じることが多い.
- 線形計画 (数理計画) の分野にも…

演習3:解いてみよう

シンプレックス法で最適解と最適値を求めよ

主問題(P)

$$\begin{array}{lrl} \max & 6x_1 + 4x_2 & \\ \text{s.t.} & 2x_1 + \quad x_2 & \le 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 & \le 180 \\ & x_1, x_2 & \ge 0 \end{array}$$

双対問題(D)

$$\begin{array}{lrl} \min & 70y_1 + 180y_2 & \\ \text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 & \ge 6 \\ & y_1 + 4y_2 & \ge 4 \\ & y_1, y_2 & \ge 0 \end{array}$$

各々の最終的なシンプレックス表を比較⇒

主問題

製品Qの製造量：x_1

製品Rの製造量：x_2

$$\begin{aligned}
\max \quad & 6x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \le 70 \\
& 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

シンプレックス法で解く

シンプレックス表
(最終)

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	4/5	-2/5	20
x2	0	0	1	-3/5	2/5	30
z	1	0	0	12/5	2/5	240

最適解 x_1＝20，x_2＝30

双対問題

$$\begin{aligned}\min \quad & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\max \quad & (-z) = -70y_1 - 180y_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + 3y_2 - s_1 = 6 \\ & y_1 + 4y_2 - s_2 = 5 \\ & y_1, y_2, s_1, s_2 \geq 0\end{aligned}$$

2段階シンプレックス表（最終）

基底変数	(-z)	y1	y2	s1	s2	定数項
y1	0	1	0	-4/5	3/5	12/5
y2	0	0	1	1/5	-2/5	2/5
(-z)	1	0	0	20	30	240

比較

主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \le 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	4/5	-2/5	20
x2	0	0	1	-3/5	2/5	30
z	1	0	0	12/5	2/5	240

双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + 3y_2 \ge 6 \\ & y_1 + 4y_2 \ge 4 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

基底変数	(-z)	y1	y2	s1	s2	定数項
y1	0	1	0	-4/5	3/5	12/5
y2	0	0	1	1/5	-2/5	2/5
(-z)	1	0	0	20	30	-240

主問題の最適値⇔双対問題の最適値

主（双対）問題の最適解⇔双対（主）問題の限界価値

偶然？

主問題	双対問題
$\max.\ \mathbf{c}^t\mathbf{x}$	$\min.\ \mathbf{b}^t\mathbf{y}$
s.t. $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$	s.t. $\mathbf{A}^t\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

線形計画問題での主問題と双対問題の関係

- ◆双対問題の双対問題は主問題
- ◆（主問題の最適値）＝（双対問題の最適値）
- ◆（主問題の限界価値）⇔（双対問題の最適解）
  （主問題の最適解）⇔（双対問題の限界価値）

双対定理

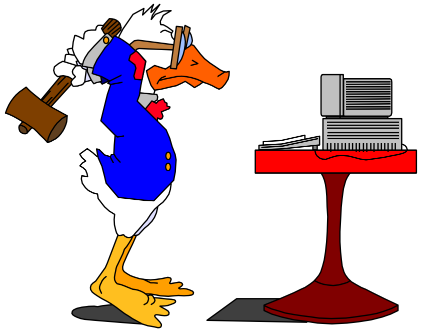
双対定理

- 主問題に有界な最適解が存在するとき，双対問題にも有界な最適解が存在し，それぞれの目的関数値は一致する．

•さまざまな社会活動の動きの一面を説明できる．

•さまざまなアルゴリズムにこの事実は応用できる．

•主問題を解くより，双対問題を解き，双対定理を用いて解を導いたほうが楽なときがある．



演習4

以下の線形計画問題を解きなさい．

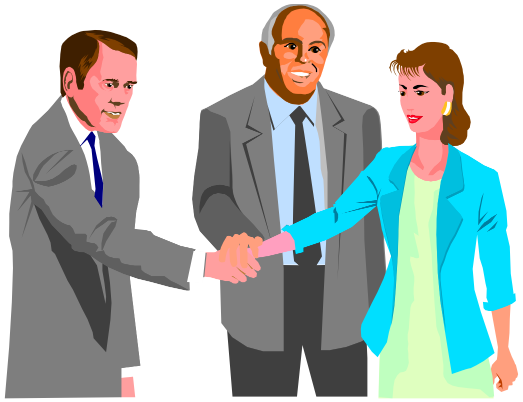
(1)
$$\begin{aligned} \min\ & 10x_1 + 20x_2 + 30x_3 \\ \text{s.t.}\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} \min\ & 30x_1 + 10x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & 5x_1 + x_2 \geq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

双対問題を作り，双対定理を利用することにより

上記の問題を解きなさい

例題2 双対問題の解釈(1)



原料奪取作戦

- 湘南商事は, 原料A,Bが不足
  - 文教工業から1日の使用量すべてを買い取りたい
- **問題** 文教工業に各原料の買取価格をいくらで提示する?
  - **目標** 買取の総費用はなるべく少なくしたい
  - **制約** 文教工業は自製造で得る利益以下の額では売らないだろう

湘南商事が把握している文教工業の情報

	素材Q 1kg	素材R 1kg	使用可能量
原液A	2(kl)	1(kl)	70(kl/日)
原液B	3(kl)	4(kl)	180(kl/日)
利益	6(千円)	4(千円)	

例題2(続) 湘南商事側の問題

原料A: 買取価格をy_1(円/kl)

原料B: 買取価格をy_2(円/kl)

制約

(製品P(Q)1kg製造に使用する原料量を買取価格)
≧ (製品P(Q)1kgが生む利益)

目的 買取の総費用最小化

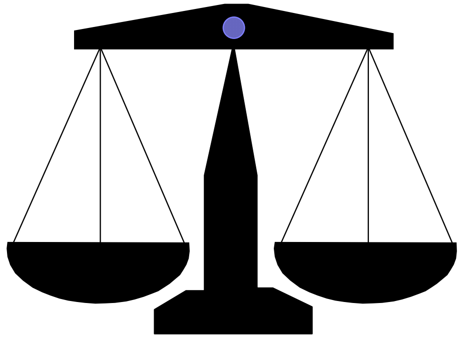
買取費用の合計 $70y_1 + 180y_2$

定式化

$$
\begin{array}{lr}
\min & 70y_1 + 180y_2 \\
\text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\
 & y_1 + 4y_2 \geq 4 \\
 & y_1, y_2 \geq 0
\end{array}
$$

双対問題になる

練習 双対問題の解釈(2)



ある国（国民数100人）では，
文教製薬が薬品を独占製造販売

	薬P 1g	薬Q 1g
成分A	200mg	100mg
成分B	200mg	300mg
販売価格	5千円	6千円

薬を買う側の問題

- 国民1人当たりの必要摂取量：
  - 成分A 400mg/日以上（全国民で40g/日必要）
  - 成分B 600mg/日以上（全国民で60g/日必要）
- 政府は薬Pと薬Qを購入し，国民に配分
- 薬Pと薬Qの成分・価格は既知
- 購入価格は最小にしたい
- 質問 政府は各薬を1日何グラム購入？
  定式化し，最適な購入計画を提案せよ

例題3(続) 定式化

薬Pの購入量: y_1 (g)
薬Qの購入量: y_2 (g)

どう解釈できる?
1. 各変数の意味は?
2. 目的関数,制約式の意味は?

買う側の問題

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 5y_1 + 6y_2 \\
\text{s.t.} \quad & 0.2y_1 + 0.2y_2 \geq 40 \\
& 0.1y_1 + 0.3y_2 \geq 60 \\
& y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

双対問題

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 40x_1 + 60x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 0.2x_1 + 0.1x_2 \leq 5 \\
& 0.2x_1 + 0.3x_2 \leq 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

解釈の例 原料を売る側の問題

- 湘南商事は全原料を文教薬品に卸している
- 薬P,Qの成分データ･販売価格は既知
- 変数の意味
  - x_1：成分A1gの卸値
  - x_2：成分B1gの卸値
- 目的関数
  - 卸値総額を最大
- 制約式
  - 販売価格より高くては買わない

$$
\begin{array}{lr}
\max & 40x_1 + 60x_2 \\
\text{s.t.} & 0.2x_1 + 0.1x_2 \le 5 \\
 & 0.2x_1 + 0.3x_2 \le 6 \\
 & x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

演習5

製品P,Q,Rは職人A,Bの手作業で完成する.

(例：製品Pは, 職人Aが3時間, 職人Bが2時間加工し完成)

(1) 利益を最大にする生産計画を求める問題を定式化せよ.

(2) 双対問題を作成せよ.

(3) 双対変数の意味を自由に発送し解釈せよ.

	製品P 1個	製品Q 1個	製品R 1個	労働制限
職人A	3時間	2時間	4時間	40時間/週
職人B	2時間	4時間	3時間	42時間/週
利益	8千円	7千円	10千円	