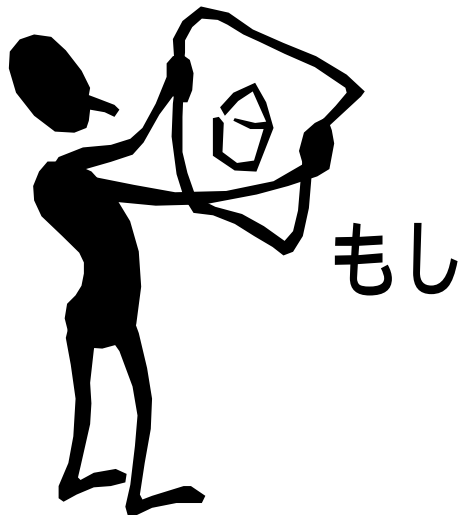
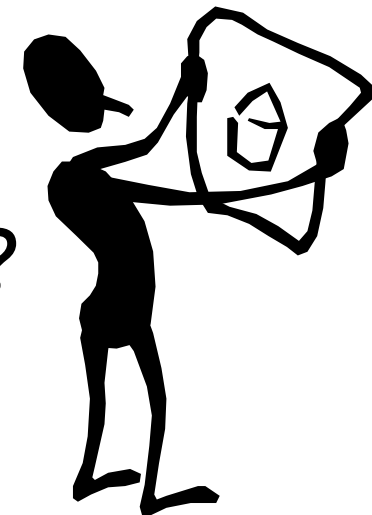


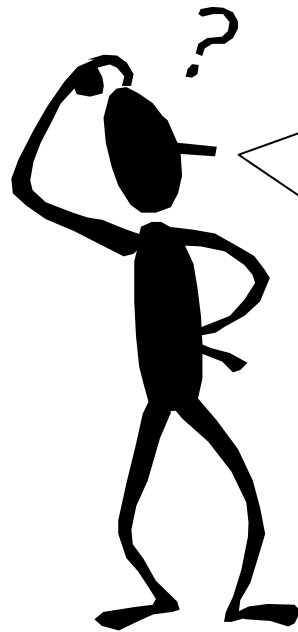
# Sensitivity Analysis



感度分析  
だったどうする？



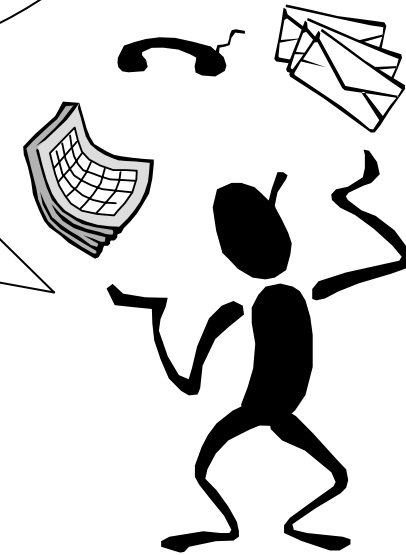
# 線形計画は 最適解を出すだけではない

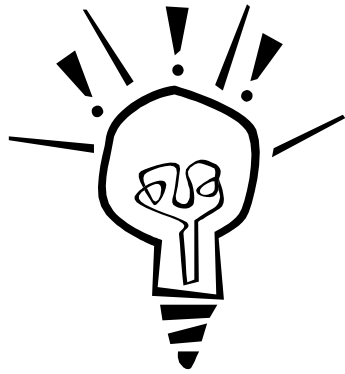


もし原料の在庫量が増えたら  
生産計画はどう変える？  
はじめから計画し直すようかな？

その必要はないよ  
最適計画を導出した時の  
データを使えば簡単さ

感度分析





# 感度分析

## Sensitivity Analysis

- 条件・数値の変化 最適解の変化を分析
    - What-if分析
  - 数理モデルで用いられる数値
    - 変化しやすい場合あり
    - 不正確な場合あり
- 解が受ける影響を知ることが重要。



# 例題



- 文教工業が2つの薬品P, Qを売り出す
- 2つの製品とも原液A, Bから生産
- 利益最大になる1日当たりの生産量は？

	薬品P	薬品Q	使用可能量
原液A	3 kl	1 kl	45 kl/日
原液B	1 kl	2 kl	40 kl/日
利益	6千円/kl	5千円/kl	

# シンプレックス法で解く

$$\max z = 6x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 \leq 45 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$$\max z = 6x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 + s_1 = 45 \\ & x_1 + 2x_2 + s_2 = 40 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

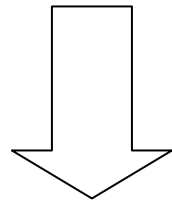
シンプレックス表  
(初期)

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
s1	0	3	1	1	0	45
s2	0	1	2	0	1	40
z	1	-6	-5	0	0	0

練習：最適解を求めてみよう。

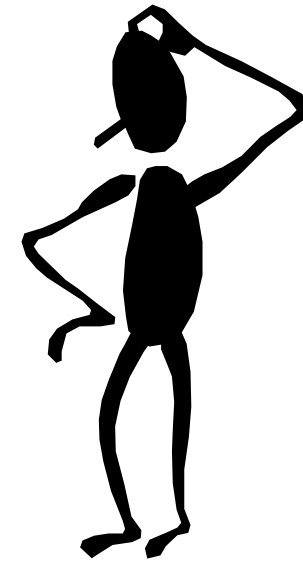
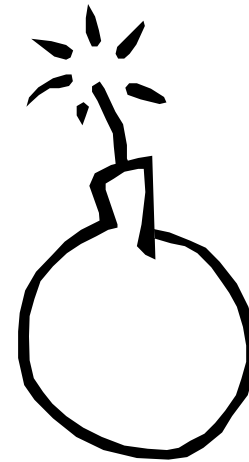
# 条件の変化(1)

原液AかBどちらかの  
使用可能量を10増やせる  
どちらを増やす?



疑問のポイントは2点

- 原液A,Bのどちらを増やすのが得か?
- 10増やす効果は?



# 限界価値 (影の価格)

marginal price (shadow price)

シンプレックス表 (最終)

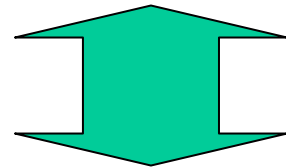
$s_1$  は原液Aの残量  
 $s_2$  は原液Bの残量



基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	2/5	-1/5	10
x2	0	0	1	-1/5	3/5	15
z	1	0	0	7/5	9/5	135

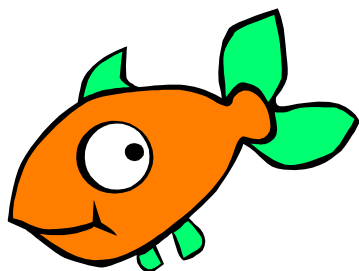
$$z = 0x_1 + 0x_2 - \frac{7}{5}s_1 - \frac{9}{5}s_2 + 135$$

仮に、原液A(B)を1単位残す 利益が $7/5$ ( $9/5$ )千円減少



**限界価値**  
(影の価格)

原液A(B)の使用可能量が1単位増える 利益が $7/5$ ( $9/5$ )千円増加



## 限界価値の解釈

- 原液 A , B の使用可能量を増加させようとした場合のコストの限界 .
- 原液 B のほうが会社にとって価値が高い .
- 原液 B の使用可能量を1増やすためのコストが  $9/5$  千円以下なら , 増やしたほうが良い .

原液 B を無制限に増加しても利益を生むか？ **増加限界**

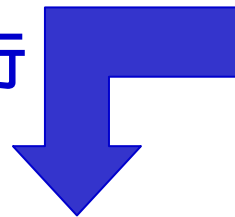


# 増加限界

原液Aの使用可能量を変えずに、  
原液Bの使用可能量を 増やしたと仮定

- 現在の使用可能量 40 40 + に変更

同順で掃出し実行



基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
s1	0	3	1	1	0	45
s2	0	1	2	0	1	40+
z	1	-6	-5	0	0	0

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	2/5	-1/5	10 - 1/5
x2	0	0	1	-1/5	3/5	15 + 3/5
z	1	0	0	7/5	9/5	135 + 5/9

$\left\{ \begin{array}{l} 10 - 1/5 \quad 0 \\ 15 + 3/5 \quad 0 \end{array} \right.$   
 の時, 実行可能

→ -25

50 →

原液Bの使用可能量増加が利益を生む増加量(増加限界)は50まで

# 増加限界 (別な導出法)

原液Aの使用可能量を変えず( $s_1=0$ )に,  
原液Bの使用可能量( $s_2$ )を増やしてみよう

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	2/5	-1/5	10
x2	0	0	1	-1/5	3/5	15
z	1	0	0	7/5	9/5	135

$$1x_1 + 0x_2 + \frac{2}{5}s_1 - \frac{1}{5}s_2 = 10$$

$$x_1 = \frac{1}{5}s_2 + 10 \geq 0$$

$$s_2 \geq -50$$

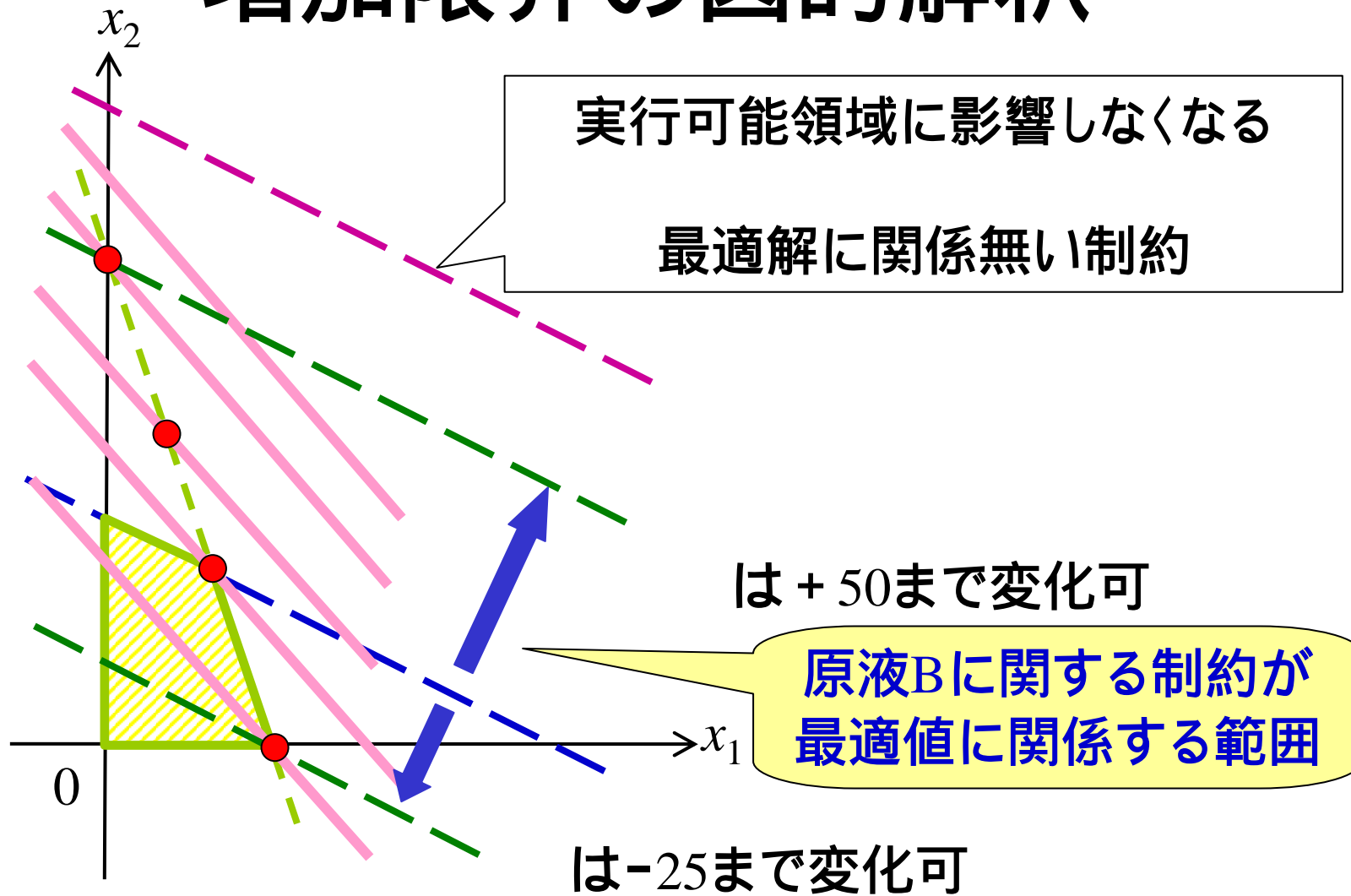
$$0x_1 + 1x_2 - \frac{1}{5}s_1 + \frac{3}{5}s_2 = 15$$

$$x_2 = -\frac{3}{5}s_2 + 15 \geq 0$$

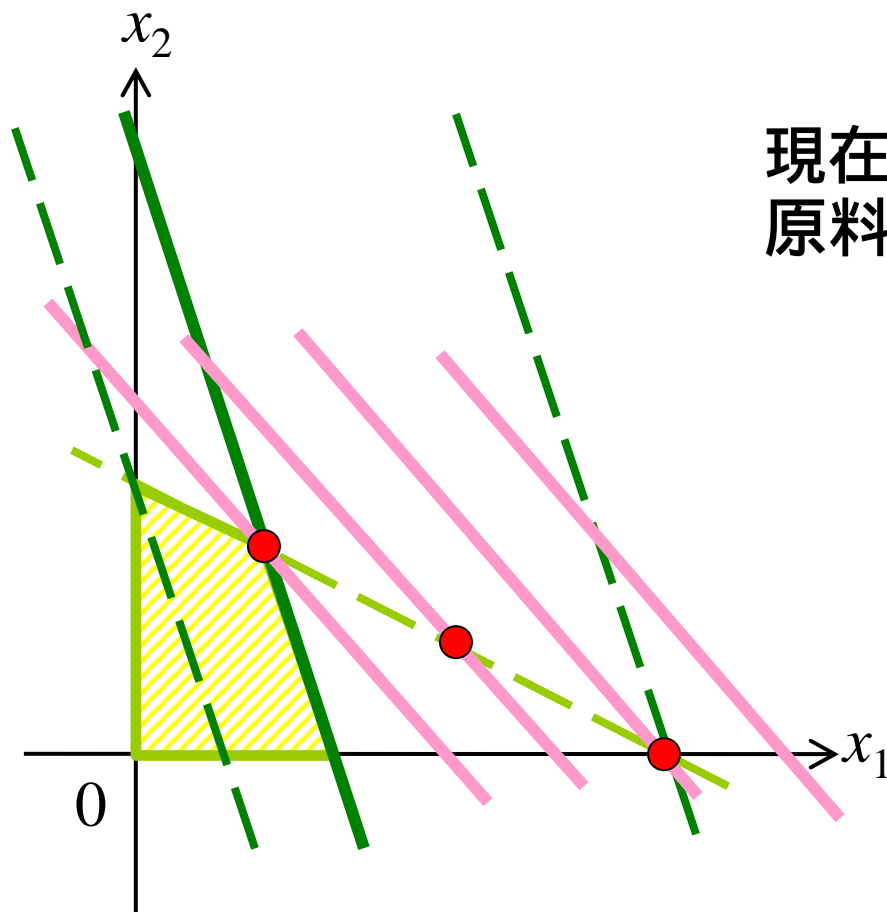
$$s_2 \leq 25$$

$s_2$ は非負制約を50まで破れる  $\implies$  原料Bの使用可能量増加が利益を生む増加量(増加限界)は50まで

# 増加限界の図的解釈



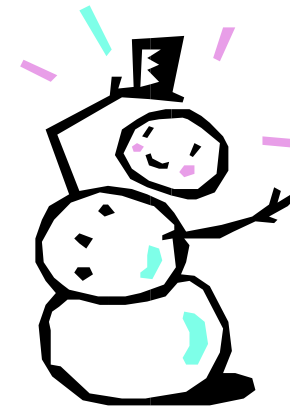
# 練習 原料Aについて



現在の最適解に対して、  
原料Aの増加限界を求めよう



# 演習1



文教工業では原料A,B,Cを使って2種類の粉製品P,Qを作っている。

	製品P	製品Q	1週間当たり 使用制限量
原料A	1(kg)	7(kg)	140(kg)
原料B	2(kg)	4(kg)	100(kg)
原料C	3(kg)	2(kg)	120(kg)
利益/1個	3(万円)	2(万円)	

## 問題：情報を読み取りなさい

利益を最大にする 1週間当たりの生産計画を求めよ。

原料A,B,Cの限界価値を求めよ。また、その数値の意味を具体的に説明せよ。

上記 で求めた生産計画を行ったとき、原料A,B,Cの増加限界を求めよ。



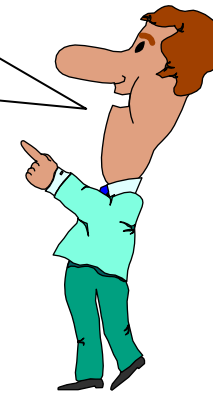
# 条件の変化(2)

## 新製品Rは投入すべきか？

### 新薬品Rの概要

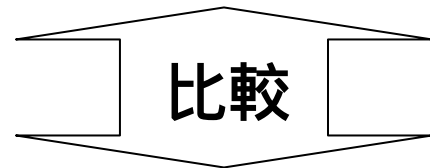
- 薬品Rを1(k1)生産に  
原液Aは3(k1), 原液Bは2(k1)必要
- 薬品Rの1(k1)当たりの予想利益は8(千円)。
- 原液A,Bの使用可能量は変化なし。

例題の設定で  
新たに薬品Rの生産を開始すべきか？



# 判断の基準

現在時点で薬品Rを1(k1)作るのに  
使用原材料の価値 = 既存製品減産による減収



限界価値の意味を  
もう一度考えよう

薬品Rが生み出す利益



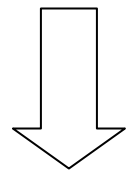


# 薬品R製造の影響評価

- 新たに薬品Rを製造する
    - 薬品P,Qは減産しなくてはならない
- 薬品R 1(kl)当たりの薬品P,Qの減収額は？

薬品Rを1(kl)製造

原液Aは3(kl), 原液Bは2(kl)必要

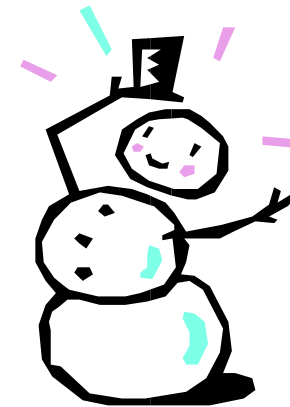


原液A 1(kl)当たりの現在の限界価値:  $7/5$

原液B 1(kl)当たりの現在の限界価値:  $9/5$

薬品Rを1(kl)製造に対する  
薬品P,Qの減収額:  $3 \times 7/5 + 2 \times 9/5 = 39/5$

## 演習2



演習1の設定において以下の問に答えよ.

- ある粉製品Cの生産に必要な原料A,B,Cは各々3, 2, 4(kg)
- 粉製品C1(kg)当たりの予想利益は1万円

製品Cの製造に踏み切るべきか？

# 利益の変化

	薬品P	薬品Q	使用可能量
原液A	3 kl	1 kl	45 kl/日
原液B	1 kl	2 kl	40 kl/日
利益	6千円/kl	5千円/kl	

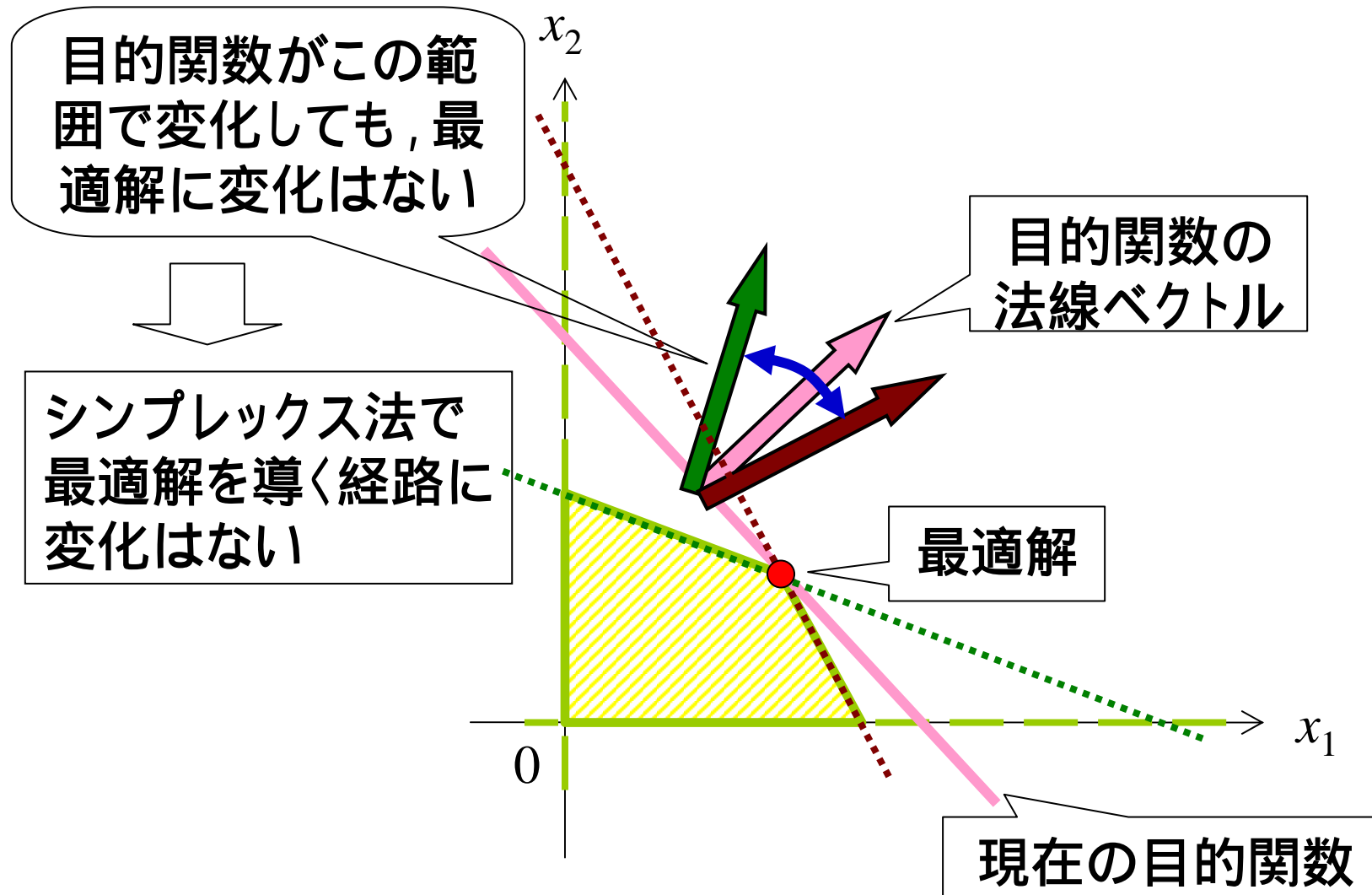
最適生産計画  
薬品P: 10 kl  
薬品Q: 15 kl

薬品Qの利益が8千円/klに変化した. 生産計画は変更必要?



現在の生産計画はどの程度  
利益が変化しても有効なの?

# 目的関数の係数の変化



# 観察: 目的関数を示すz行の変化

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
s1	0	3	1	1	0	45
s2	0	1	2	0	1	40
z	1	-6	-5	0	0	0

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	1/3	1/3	0	15
s2	0	0	5/3	-1/3	1	25
z	1	0	-3	2	0	90

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	2/5	-1/5	10
x2	0	0	1	-1/5	3/5	15
z	1	0	0	7/5	9/5	135

Z行の変化

ピボット列の  
z行の値

ピボット行

$$(z行) - \frac{-6}{3} \times (1行)$$

ピボットの値

$$(z行) - \frac{-3}{5/3} \times (2行)$$

# もし利益が だけ変化したら...

製品Pの利益: 6千円/k1 (変化無し)

製品Qの利益:  $(5 + \Delta)$  千円/k1 に変化した

変化後の最適解が変化前と同じなら, 同じ経路で最適解に辿りつくはず

Z行の変化

$$(z行) - \frac{-6}{3} \times (1行)$$

$$(z行) - \frac{-3 - \Delta}{5/3} \times (2行)$$



基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
s1	0	3	1	1	0	45
s2	0	1	2	0	1	40
z	1	-6	-5	0	0	0

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	1/3	1/3	0	15
s2	0	0	5/3	-1/3	1	25
z	1	0	-3	2	0	90

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	2/5	-1/5	10
x2	0	0	1	-1/5	3/5	15
z	1	0	0	7/5 - Δ/5	9/5 + 3Δ/5	135 + 15Δ

# 最適解が変化しない の範囲

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	2/5	-1/5	10
x2	0	0	1	-1/5	3/5	15
z	1	0	0	7/5 - Δ/5	9/5 + 3Δ/5	135 + 15Δ

現在の基底解が最適  
z行の要素がすべて非負

$$\frac{7}{5} - \frac{\Delta}{5} \geq 0$$

$$\Delta \leq 7$$

$$\frac{9}{5} + \frac{3\Delta}{5} \geq 0$$

$$\Delta \geq -3$$

よって,  $-3 \leq \Delta \leq 7$  の範囲の時, 最適解は変わらない

⇒ Qの1k当たりの利益が2千円 ~ 12千円の  
間で変化しても最適解に変化はない.

## 演習3



### 演習1において

- 製品Qの利益が30000円/kgに変化した最適解は変化するか判断せよ.
- 製品Pの利益は変化しないで, 製品Qの利益のみ変化する. 現在の(最適な)生産計画を変更せずに許容できる製品Qの利益の変化はどのような範囲の時か.

