



グラフと最適化

点と線で眺める世界

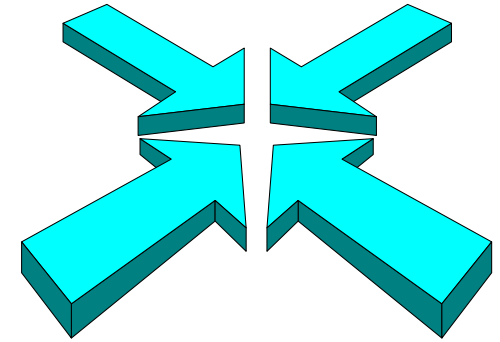


ここで学ぶこと

- 物事を表現する方法のひとつ：
グラフ・ネットワーク
- グラフ論の理論
- 最適化問題への利用
- 実際の問題での応用例



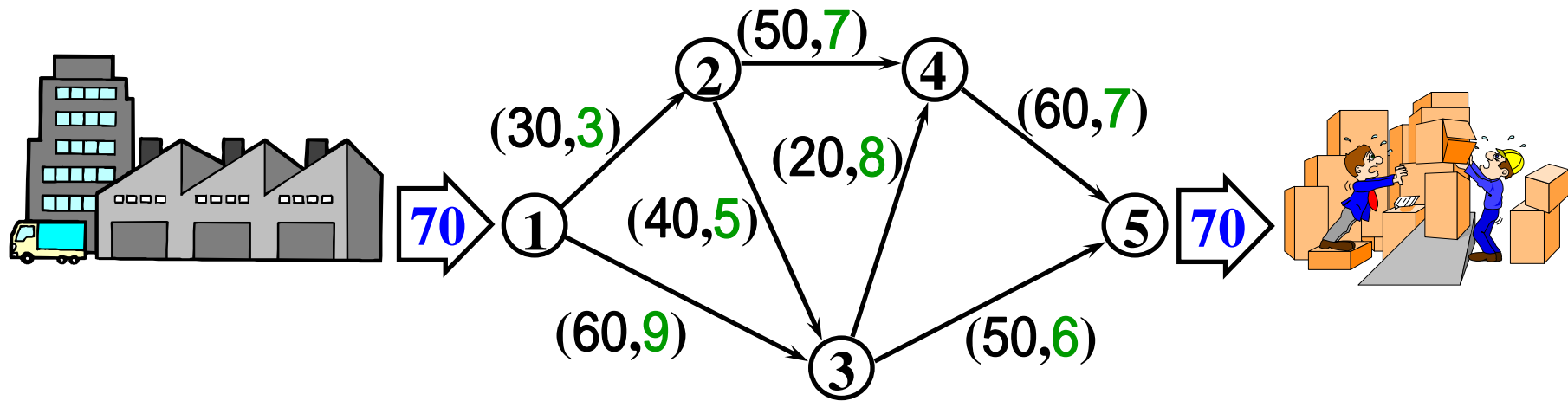
点と線で表現する



点と線で表現できるシステムは多い

- 例えば?
- 昔から考察の対象
グラフ理論の発生, ネットワーク計画
最適化: モデル表現の大きな柱

ネットワークの例



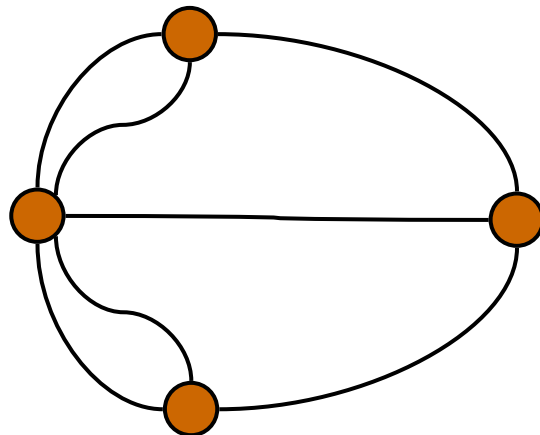
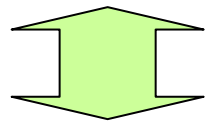
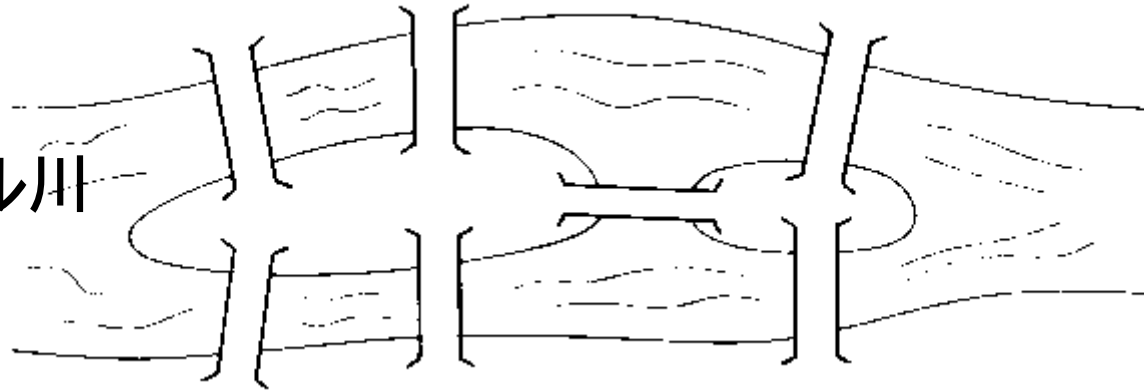
(道路の許容台数, 1台当たりの通行料)

構造部分: **グラフ**

+ (点, 枝上の情報) = **ネットワーク**

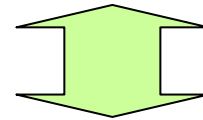
グラフ

プレーゲル川



Konigsbergの橋

ある地点から出発し
全ての橋を一度だけ渡り
出発地点に戻れるか？



一筆書きは可能？

準備運動 一筆書き

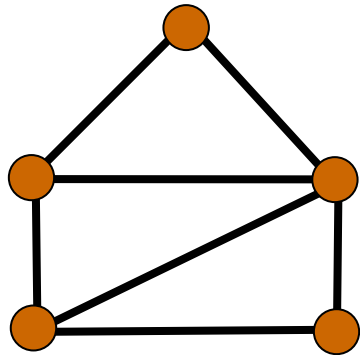
一筆書きは可能？

2つのバージョン

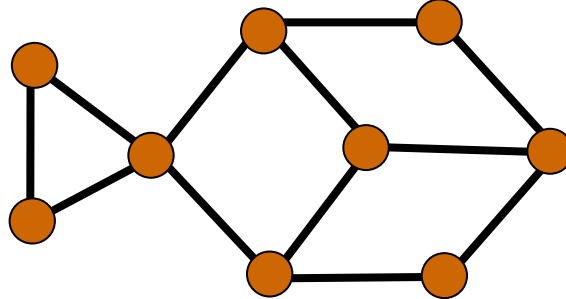
出発点に戻ってくる必要があるバージョン

戻ってこなくてもよいバージョン

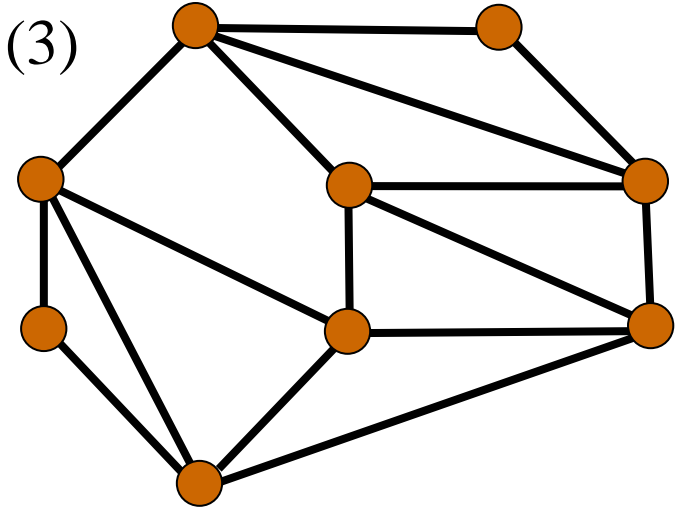
(1)



(2)



(3)



可能 一筆書きを具体的に示せばよい

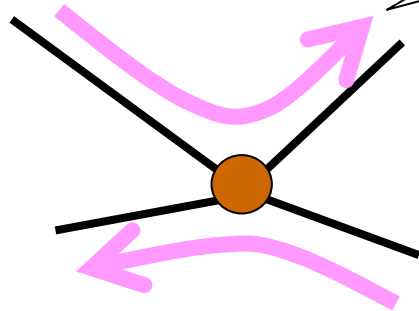
不可能 ??? できないことを示すには ???

一筆書きができる・できない

点に接続する枝数(次数)に注目

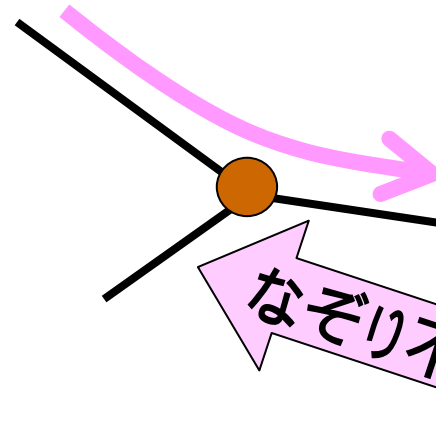
偶数本(偶点)の場合

一筆書き



可能!

奇数本(奇点)の場合



不可能!

示唆

奇点があると一筆書きはできない

疑問

全ての偶点なら一筆書き可能?

答え

オイラー

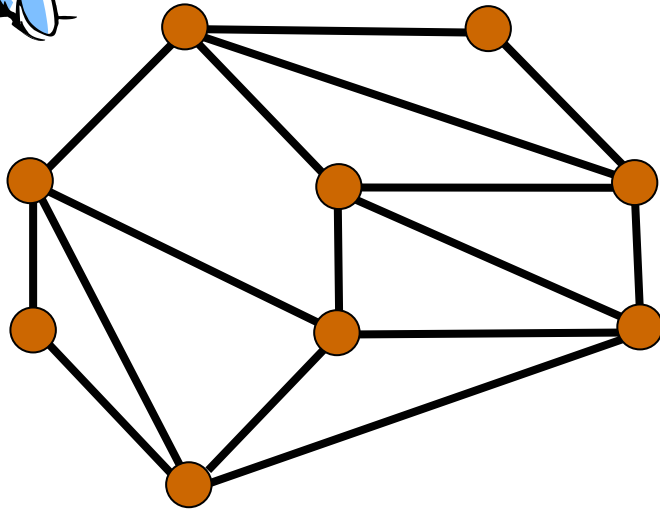
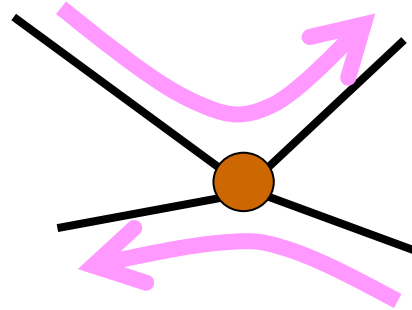
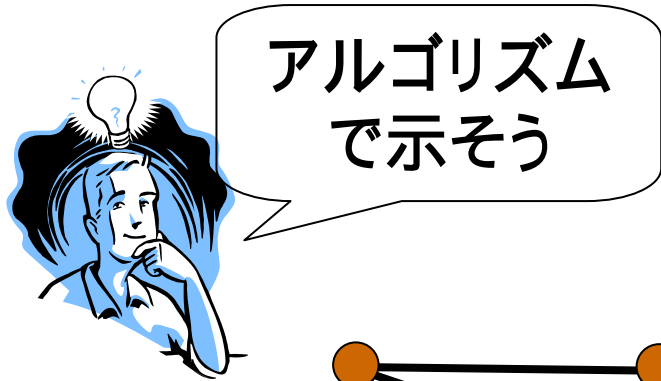


できるよ!

オイラーの定理

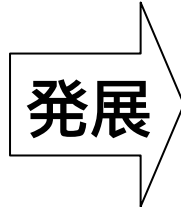
グラフ論のはじまり

オイラーの主張の正当性



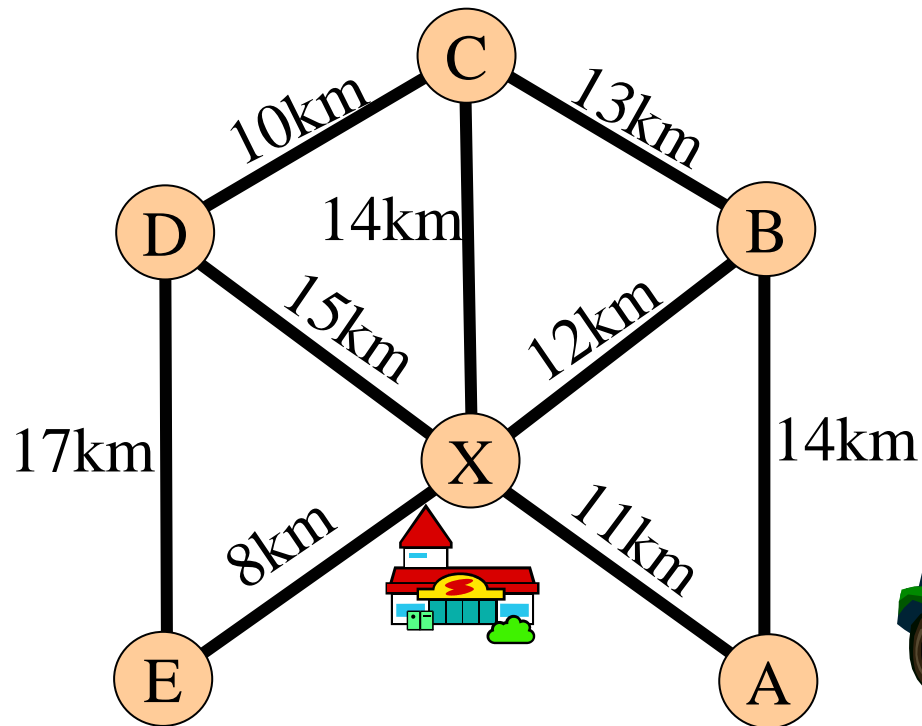
全点の次数が偶数のグラフ

奇点が2つのグラフ



もどってこなくても良い
一筆書きの方法は?

例題1 道路の点検ルート



事務所(点X)から出発し,
全ての道を点検し
事務所に戻ってくる

質問

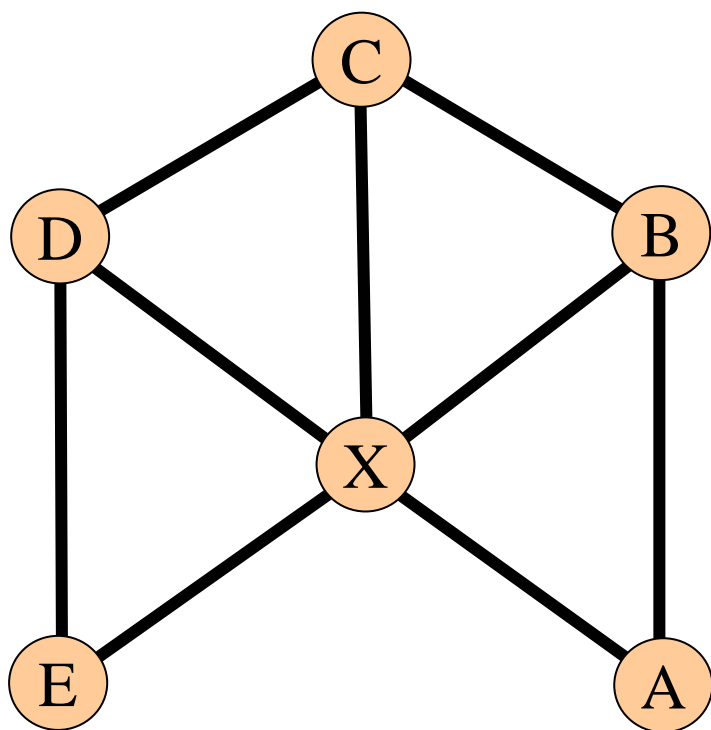
総移動距離最短の
点検ルートは？



「走行ルート」 = 「一筆書き」

道路の総距離: 114km

114kmで点検可(無駄無) 一筆書き可能



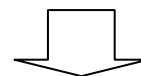
質問

一筆書きは可能?

答え

不可能

無駄な走行が不可避



無駄な走行(=回送)を最小化

質問

どこを回送する?



一筆書き可能

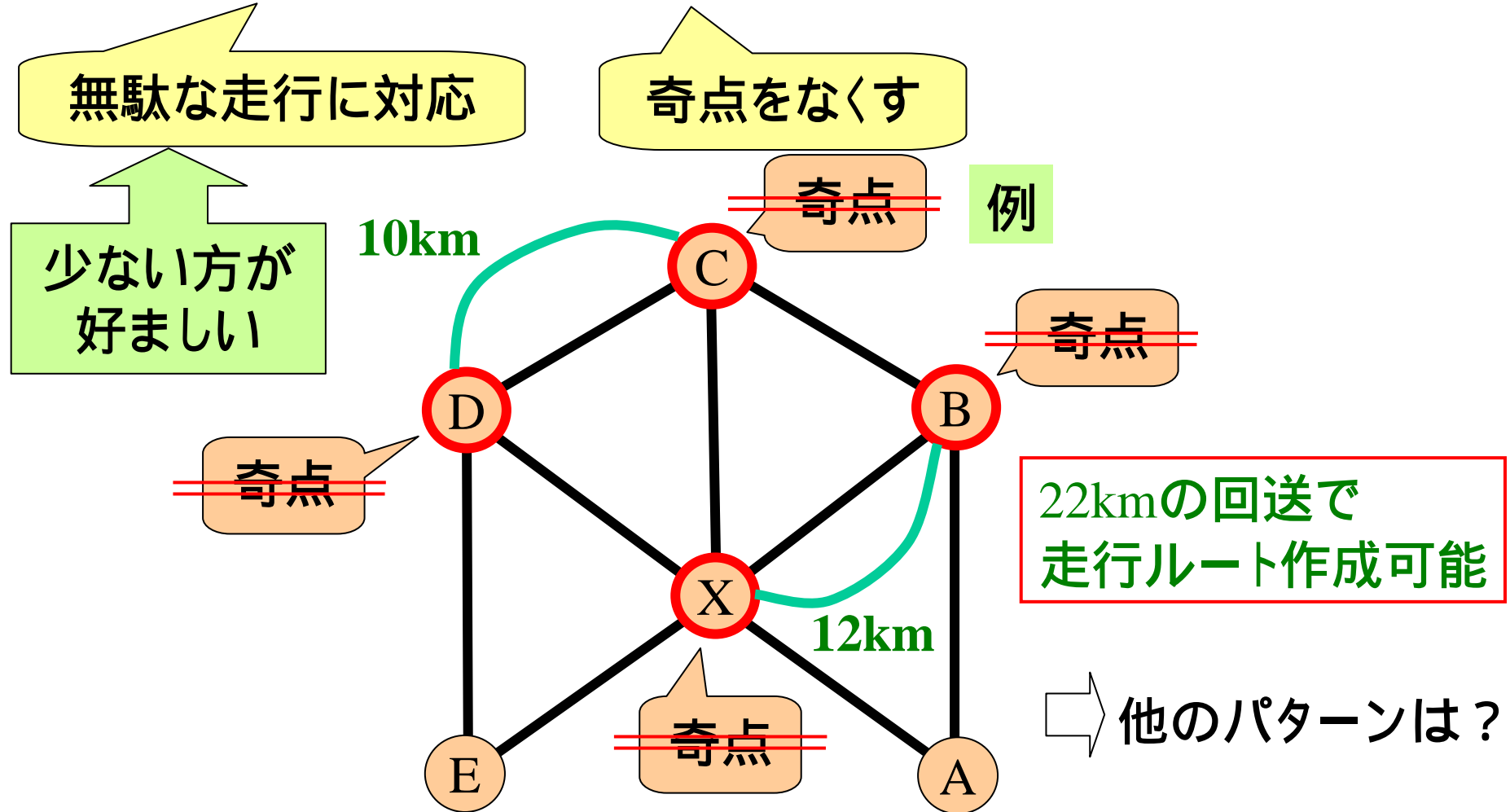
||

すべて偶点

一筆書きができるように枝を増やす

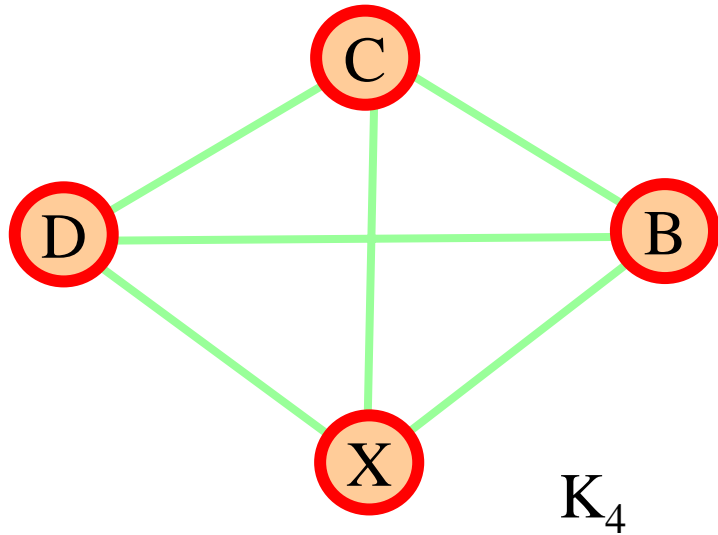
枝を増やして一筆書き可能状態を作る

走行ルート完成

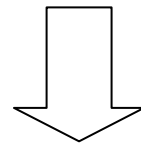




グラフの種類: 完全(完備)グラフ



奇点のすべてのペアに枝をつける



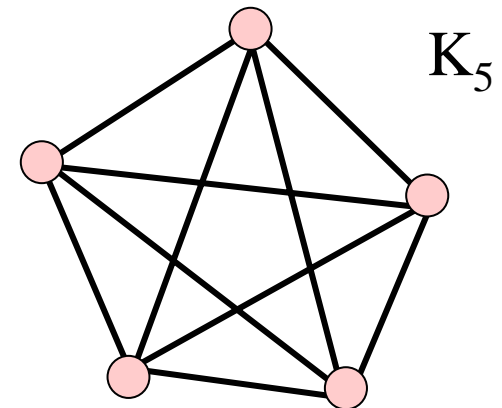
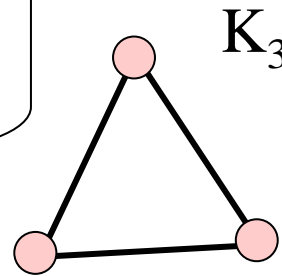
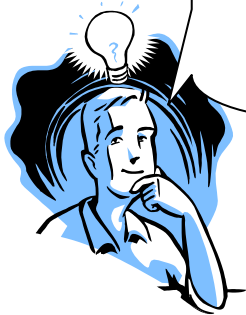
全点間に枝のあるグラフ

• **完全グラフ** or **完備グラフ**
(complete graph)

• n 点の完全グラフの記号: K_n

最大マッチング

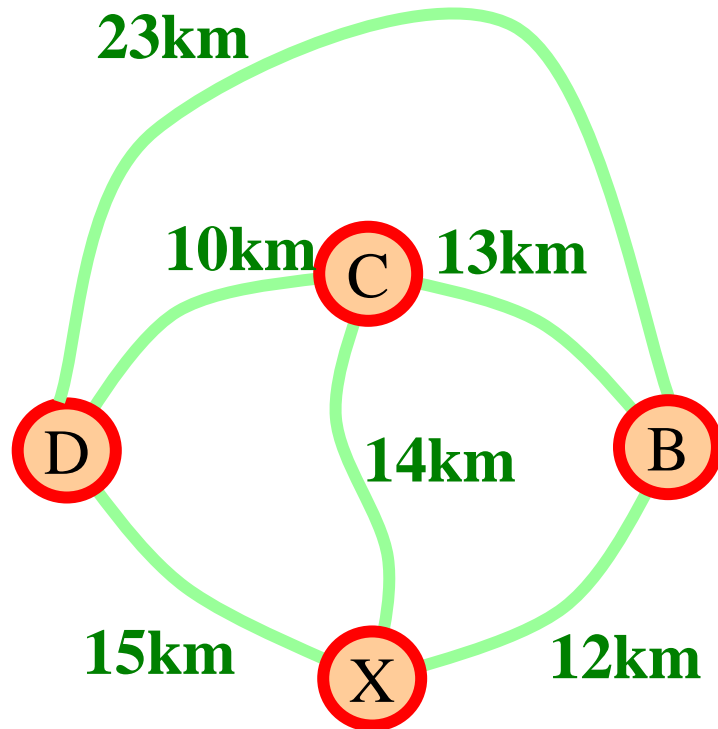
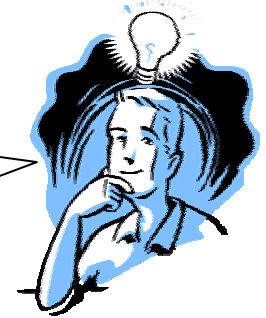
K_n で
枝数最大のマッチング
を見つけるのは簡単



回送距離の少ない枝の増やし方は?

🔑 奇点の次数を増やす
枝の付け方

同じ点に2枝追加は駄目



マッチング = 点を共有しない枝の集まり

(問1)最も枝数の多いマッチングは?

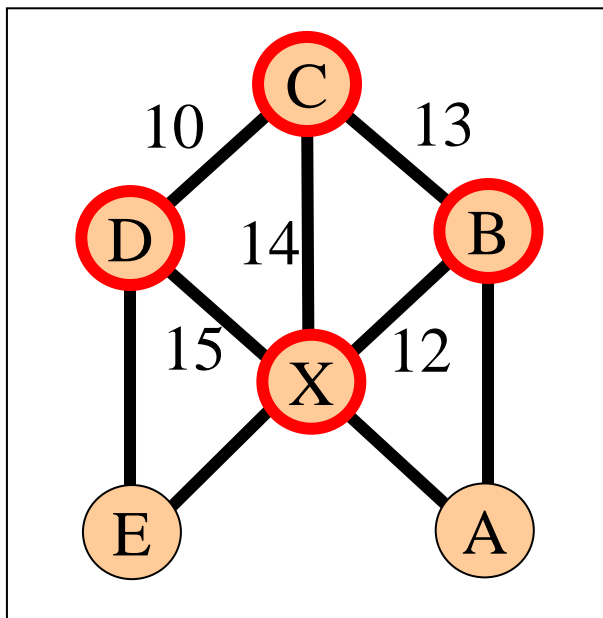
最大マッチング問題

(問2)最大マッチングの中で距離の
総和が最小のマッチングは?

最小重みマッチング問題

全ての
パターン

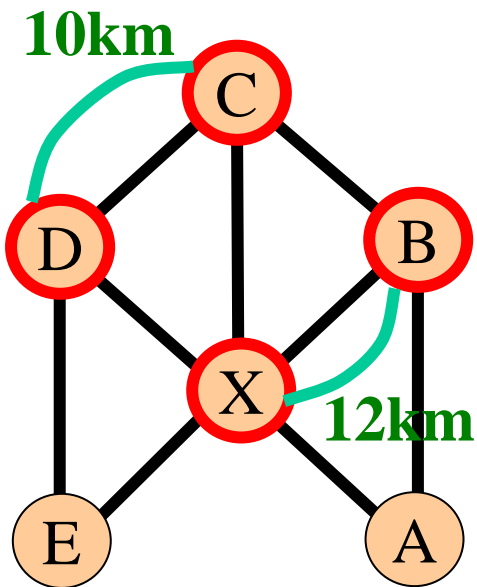
最適な回送プラン



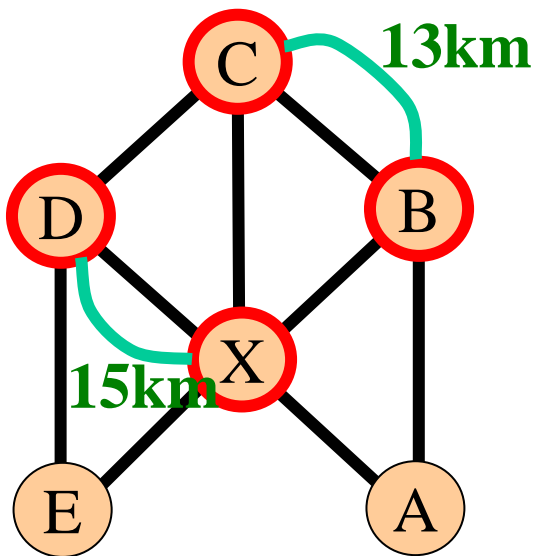
最適なパターンを
見つける問題:
最小費用
完全マッチング問題

最適化問題

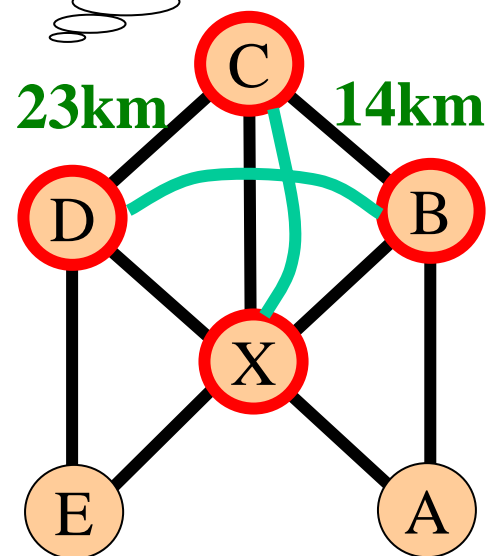
全列挙は面倒



回送: 22km

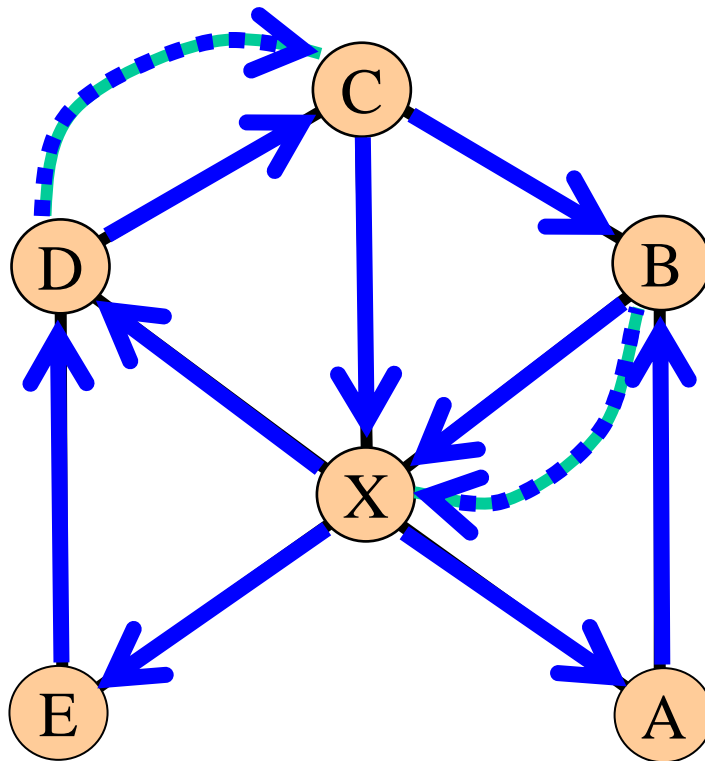


回送: 28km



回送: 37km

最適な走行ルート作成



最短走行ルート

走行距離: 134km

点検走行: 114km

回送: 22km

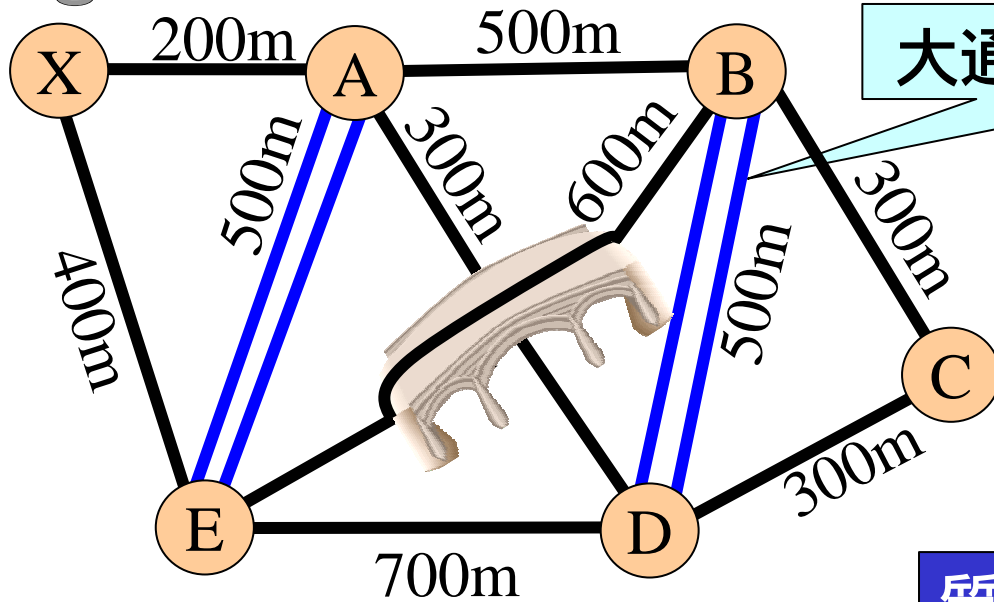
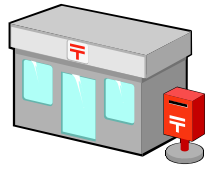
この部分を
最小化

この問題の本質だけを抜き出すと...

すべての枝を最小距離で巡回する経路を求めよ

枝順回路問題 or (中国人)郵便配達人問題

演習1 郵便配達ルート



大通り(片側ずつ配達)

質問

総移動距離最短の
配達ルートは？

郵便局(点X)から郵便を配達し
郵便局に戻ってくる



参考 実際の 郵便配達

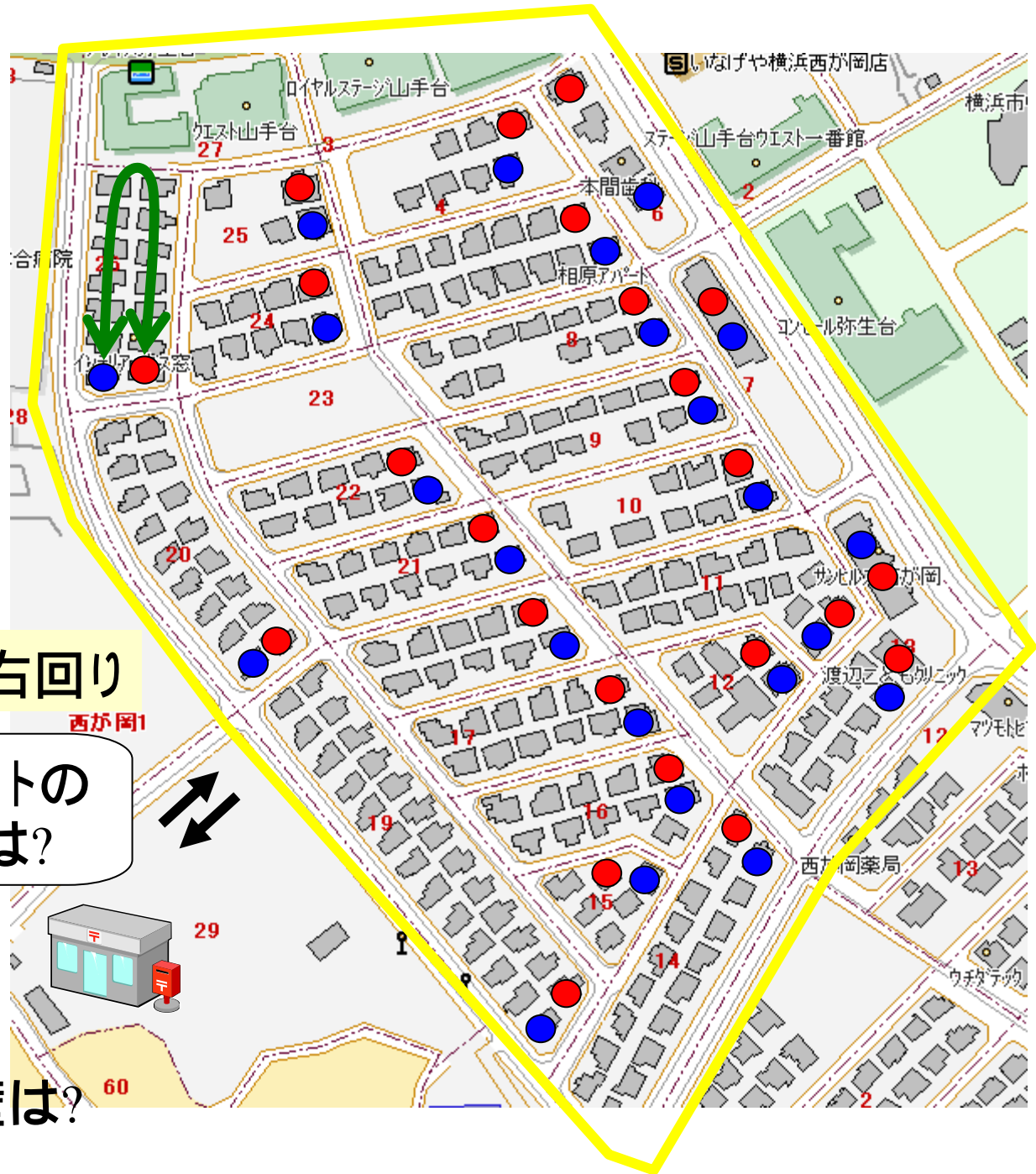
地区内配達順序
に自由度小

移動コストの算出: 右回り



最適ルート
の
作り方は?

適用で予想される壁は?

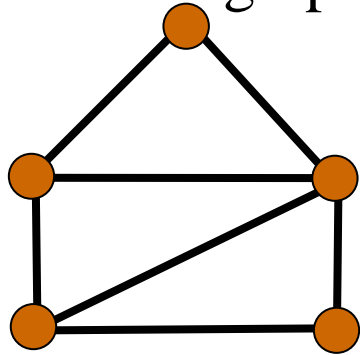




グラフの種類(枝での分類)

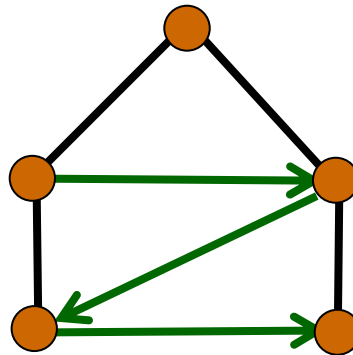
無向グラフ

undirected graph



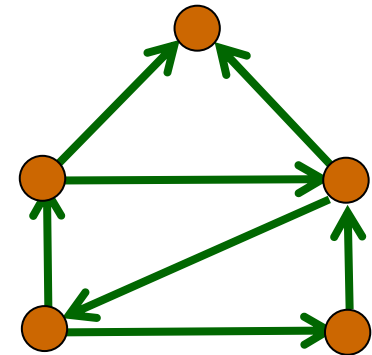
混合グラフ

mixed graph

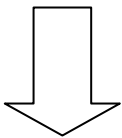


有向グラフ

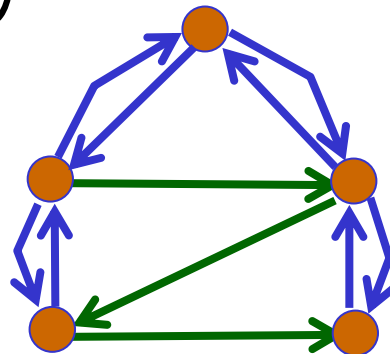
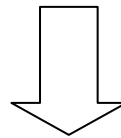
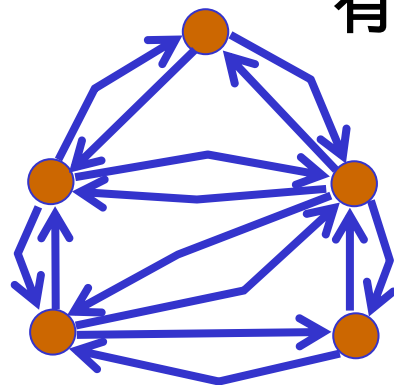
directed graph



双方向化

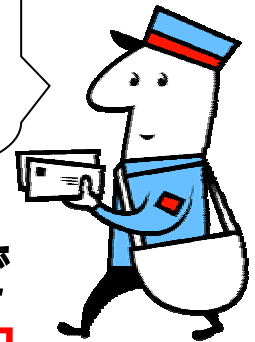


有向グラフ



一方を通ったら
もう一方も配達
済にしくちゃ

枝順回路問題で
双方向化は無力



様々な枝巡回回路問題

- 郵便配達人問題

- 無向グラフ上
- 有向グラフ上
- 混合グラフ上

短時間で求解
する解法有



解説
グラフの種類

クラスP

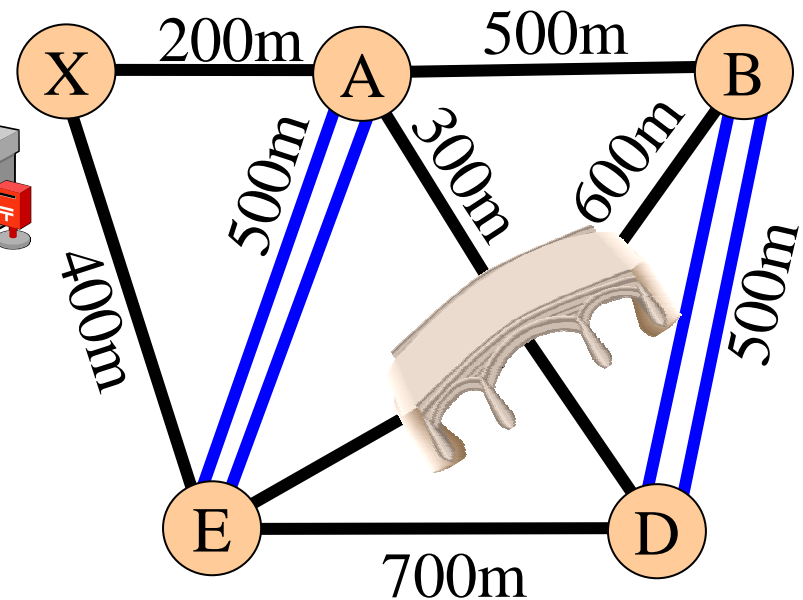
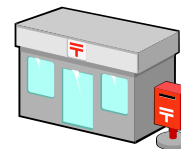
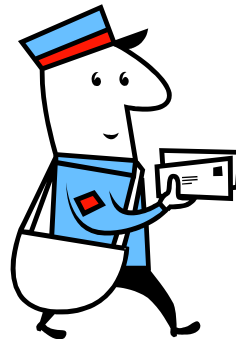
NP完全問題

素朴な方法で
は求解困難

- 田舎の郵便配達人問題

- 必ず通る枝は一部

- 容量制約付きの問題



考えられる類似問題

- 道路掃除 + スケジューリング N.Y. やD.C. にて事例有
- スクールバス経路
- 除雪の時間短縮 英国で事例有
- ごみ収集 米国・カナダにて事例有
- 電気・ガスメーター検針 米国・イスラエルにて事例有
- スーパーマーケットの床掃除の効率化

他には？

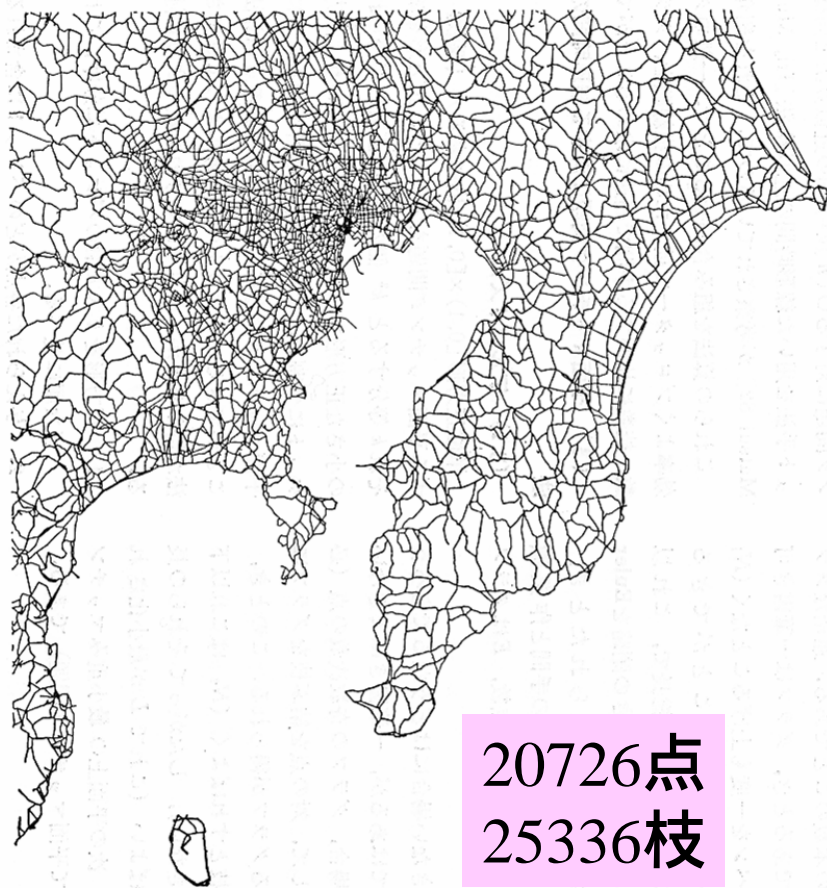


実際の適用例

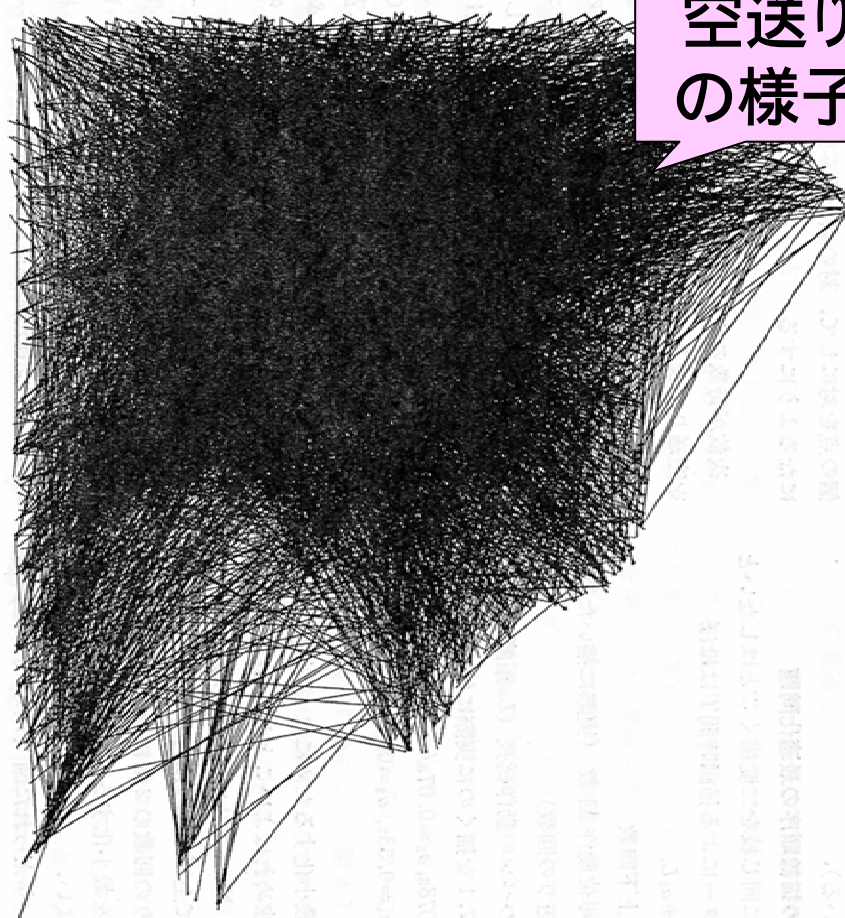


応用例 プロッター動作最適化

描きたい地図



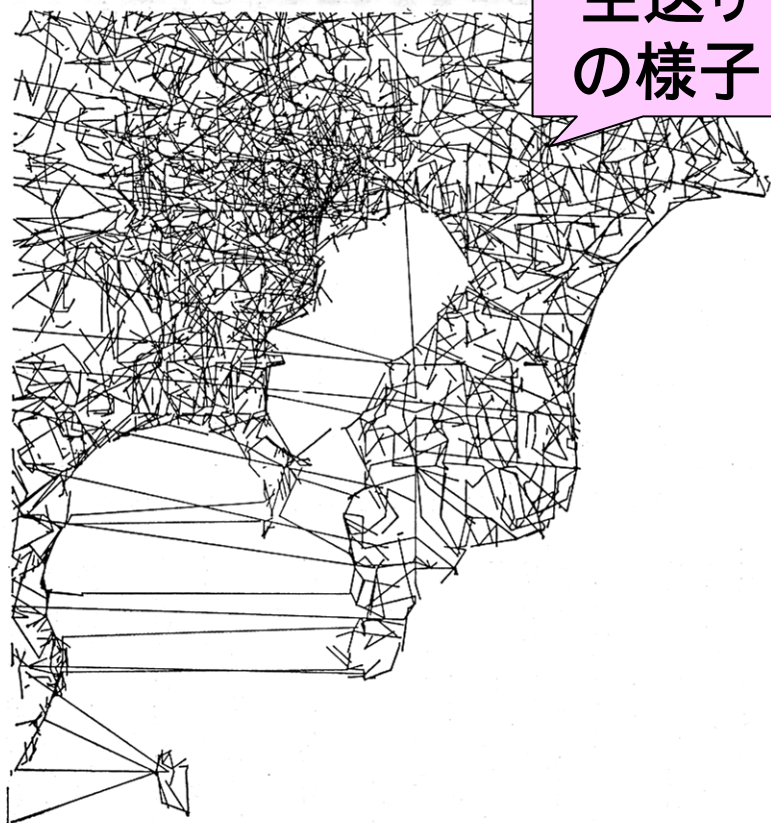
ランダムに枝を描画した時



出典: 計算機科学と地理情報処理, 別冊Bit, 共立出版

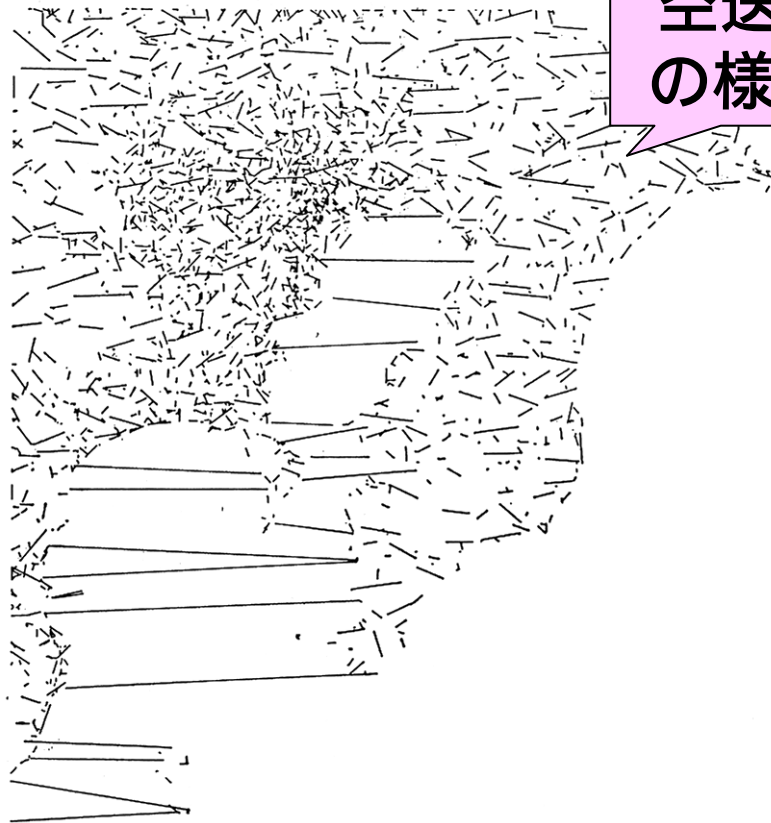
応用例 最適化の様子

人間による制御



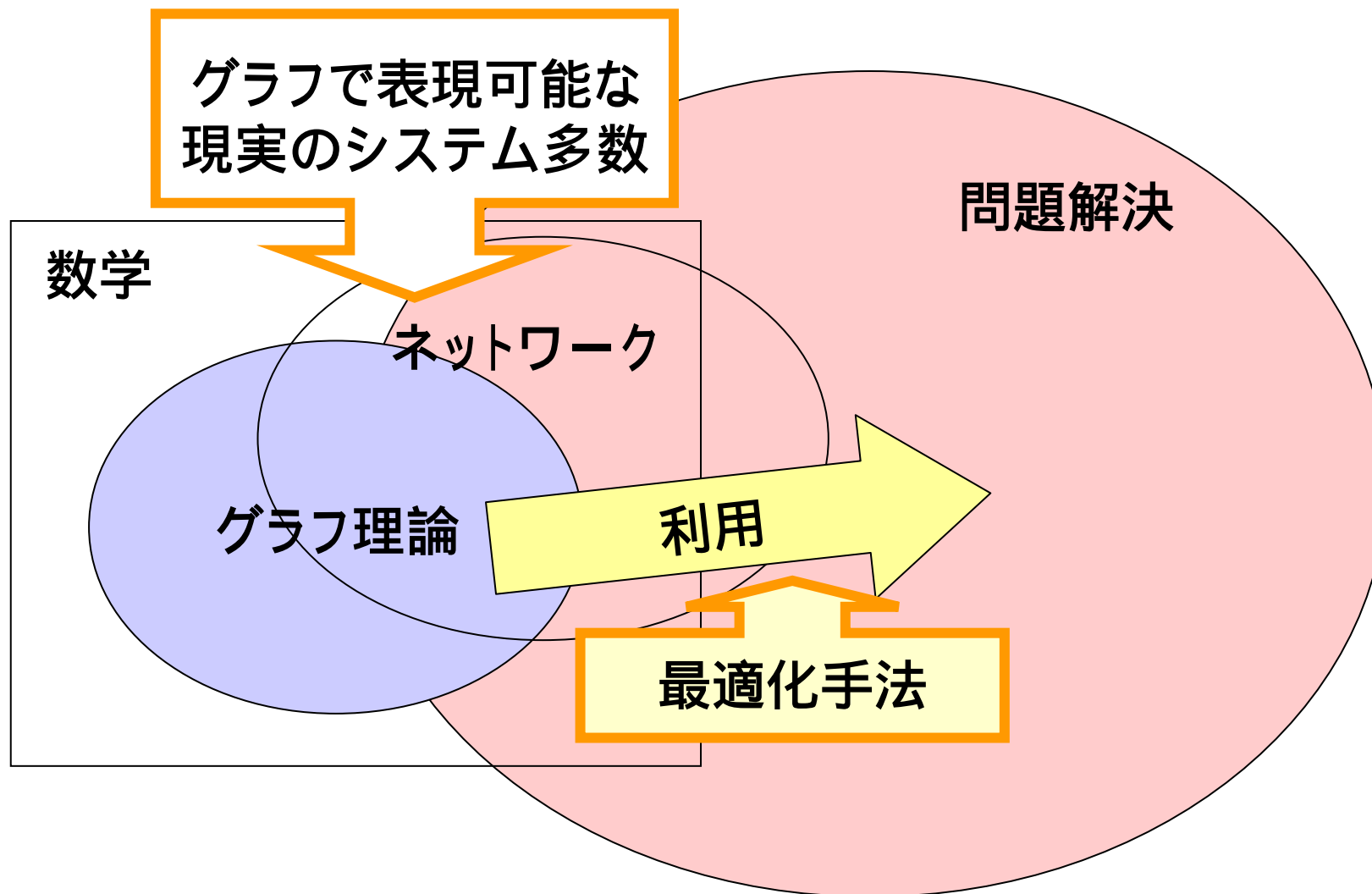
空送りの様子

最適化処理



空送りの様子

グラフ(ネットワーク)と最適化



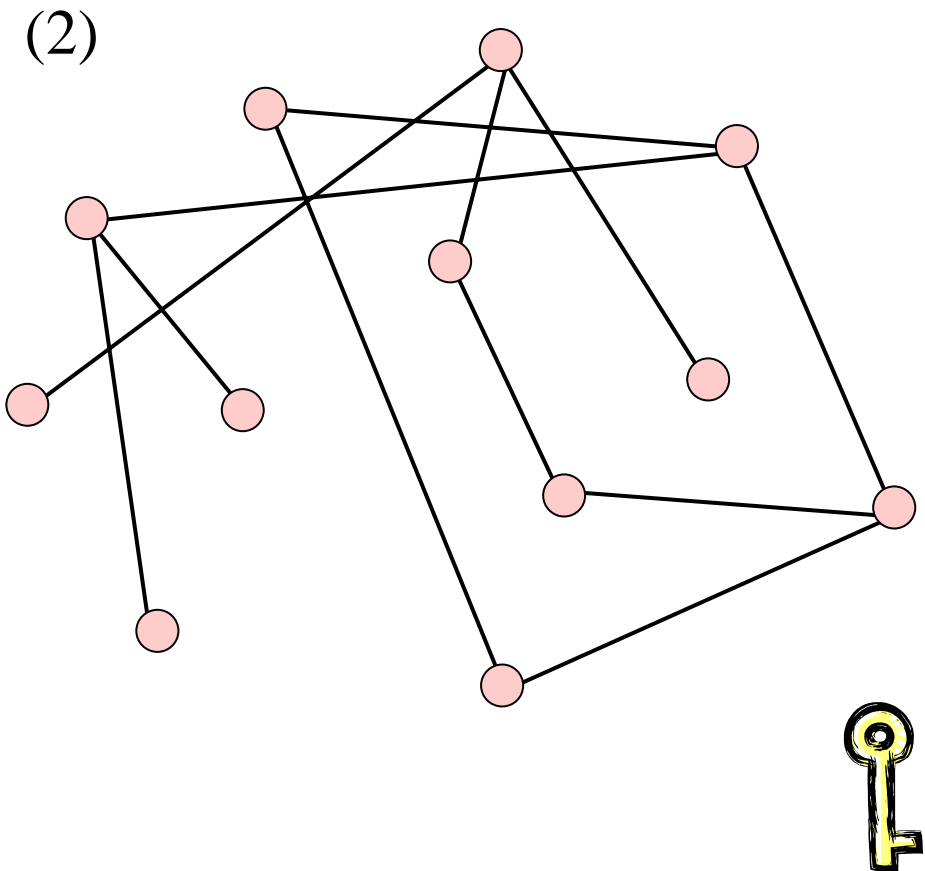
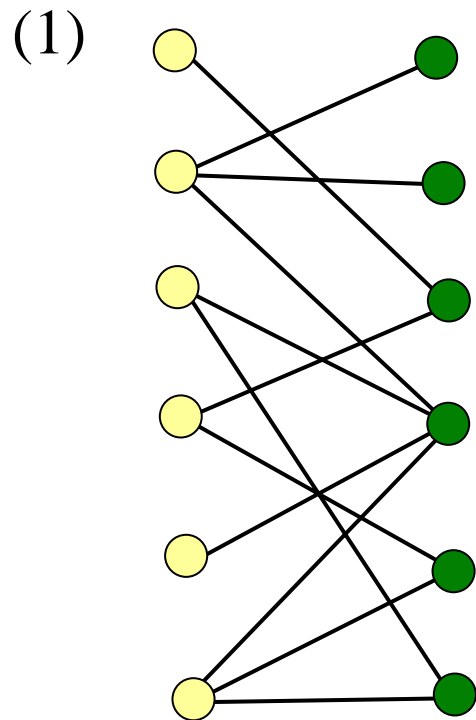
演習2 円卓問題

5カ国から各2人の代表が集まり(つまり10人で)円卓会議を開きます。各国の代表が残りのすべての国の代表と隣同士に座ることは可能でしょうか?



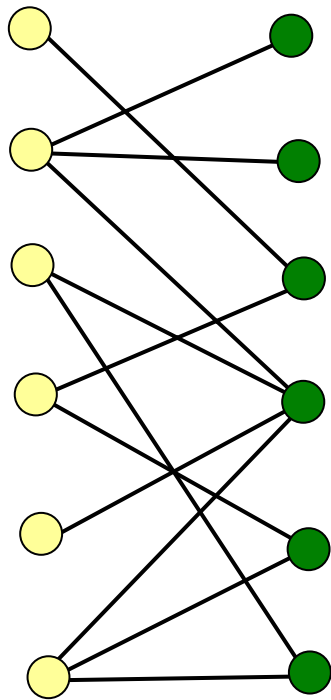
演習3 最大マッチング(1)

最大マッチングを求めよ

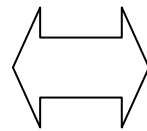


演習3 ヒント

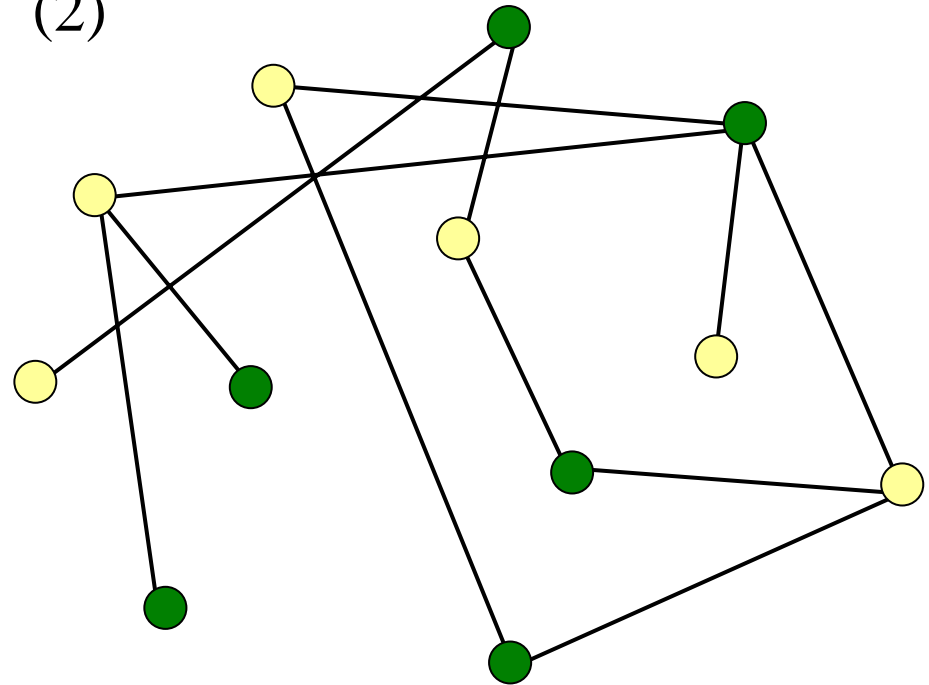
(1)



二部グラフ
(bipartite graph)



(2)

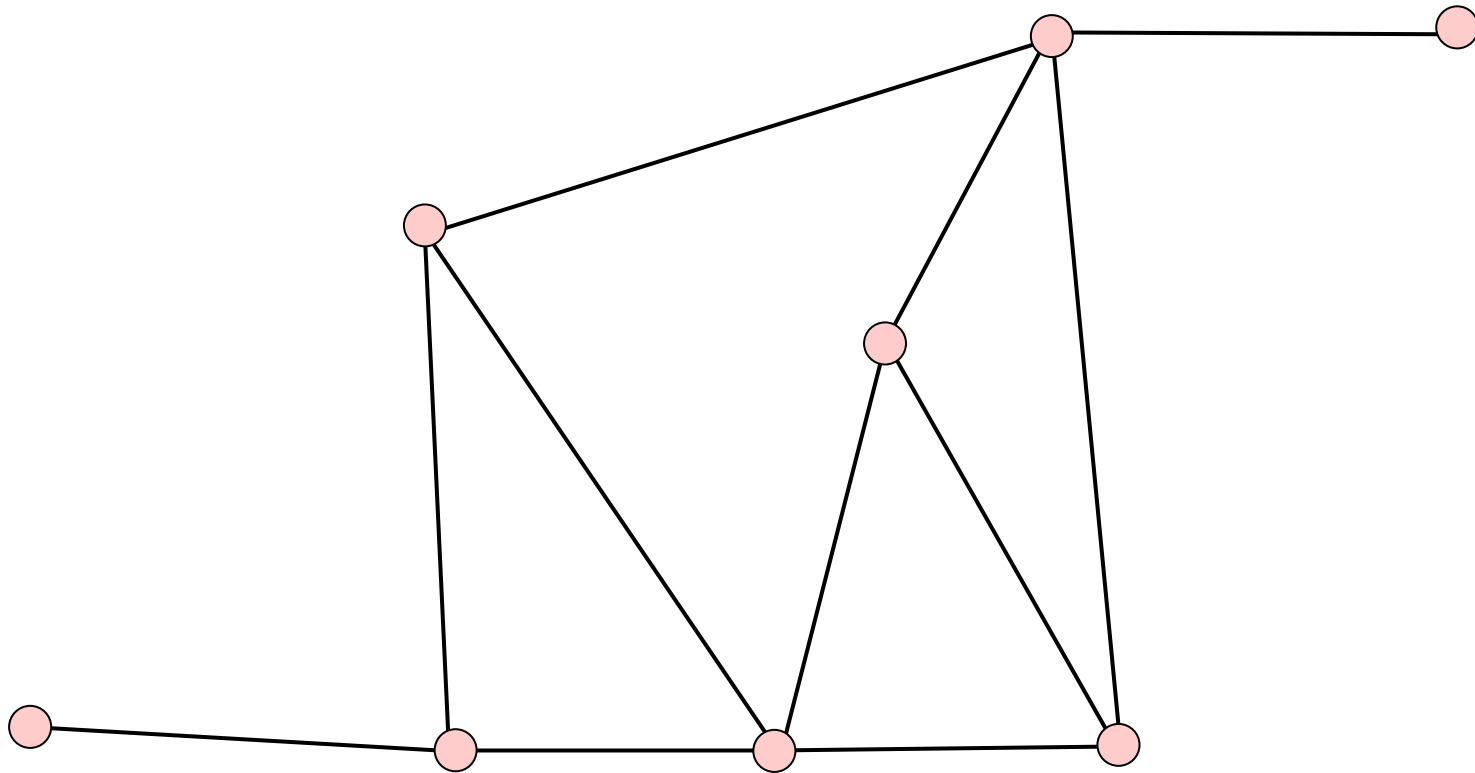


奇数本の枝で構成される閉路が無い

奇閉路

演習4 最大マッチング(2)

最大マッチングを求めよ



演習5 最小重みマッチング

重み最小の最大マッチングを求めよ

