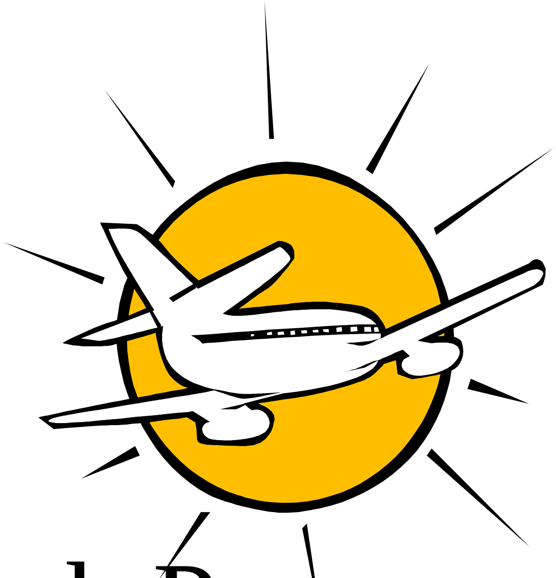


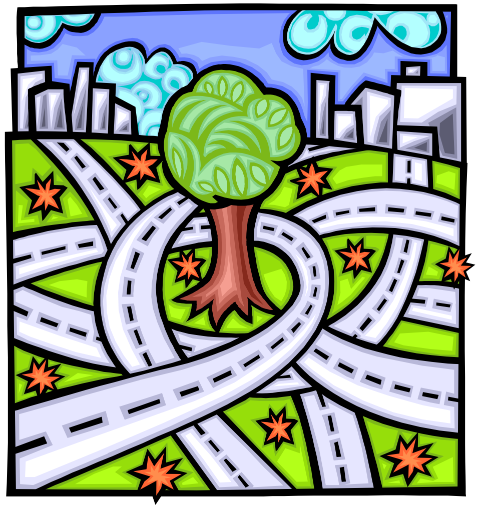
Network Programming I

ものをなるべく多く流す
最大フロー問題

ネットワーク上に“モノ”を流す

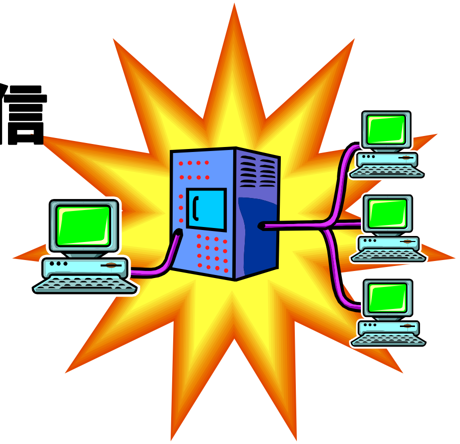
配送

道路

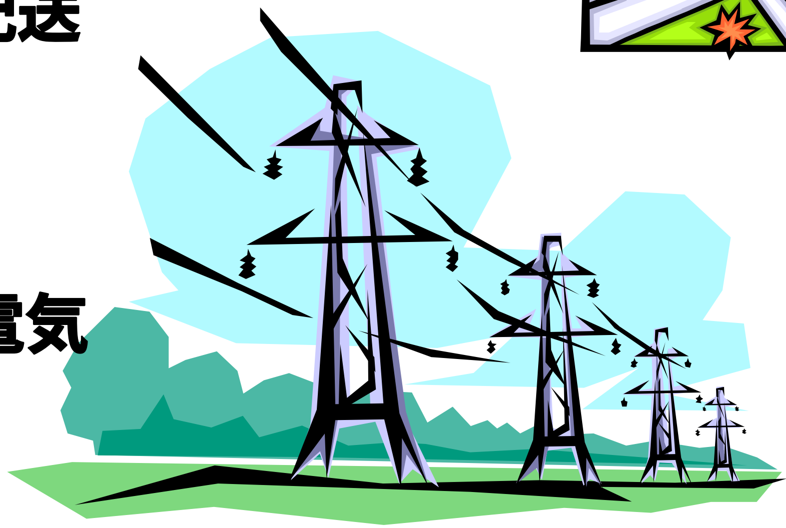


パイプライン

通信



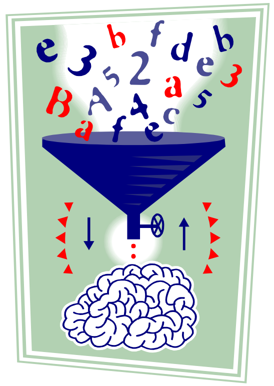
電気



モデル化

- グラフ＋容量＝ネットワーク
- フロー(流れ)

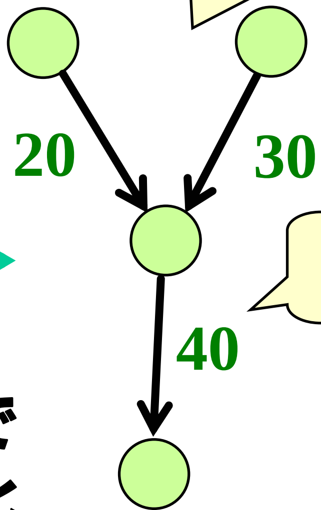
モノの流れのモデル化



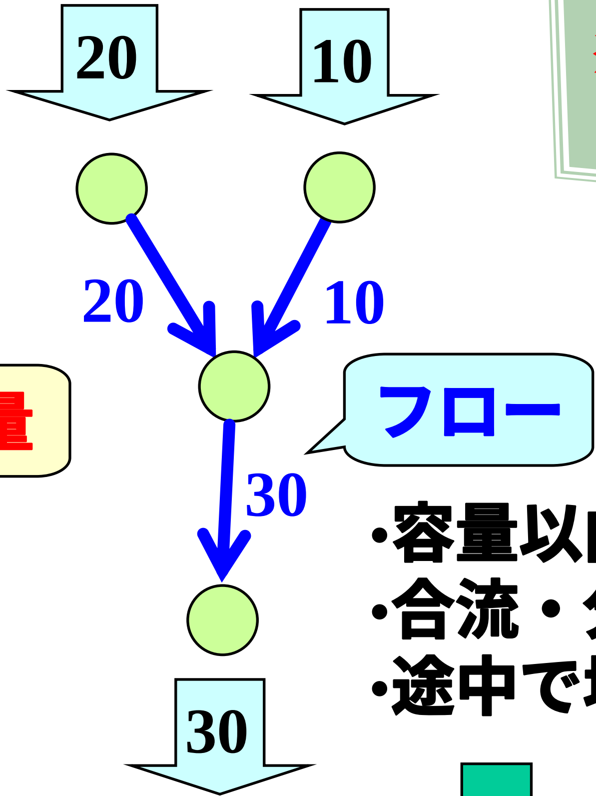
流れる量には
限界が有る

各枝に
容量情報を追加

舞台を
グラフで
モデル化



ネットワーク



・容量以内
・合流・分岐可
・途中で増減無

最適なフローの
制御方法は?

流れを数字でモデル化

ネットワークフロー計画問題

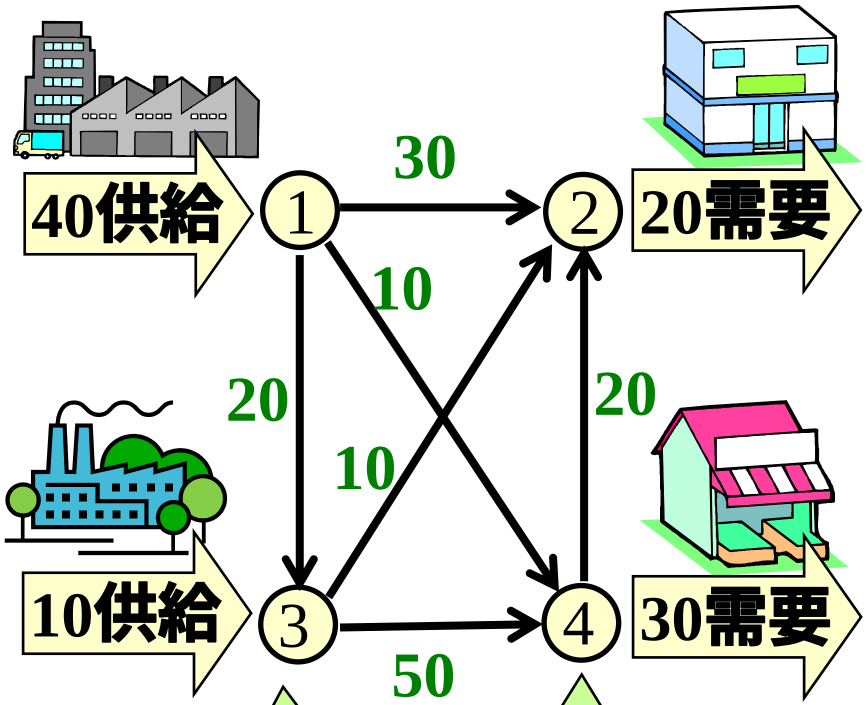
2端子ネットワーク

モノの流れをモデル化したネットワーク

変換 **2端子ネットワーク**

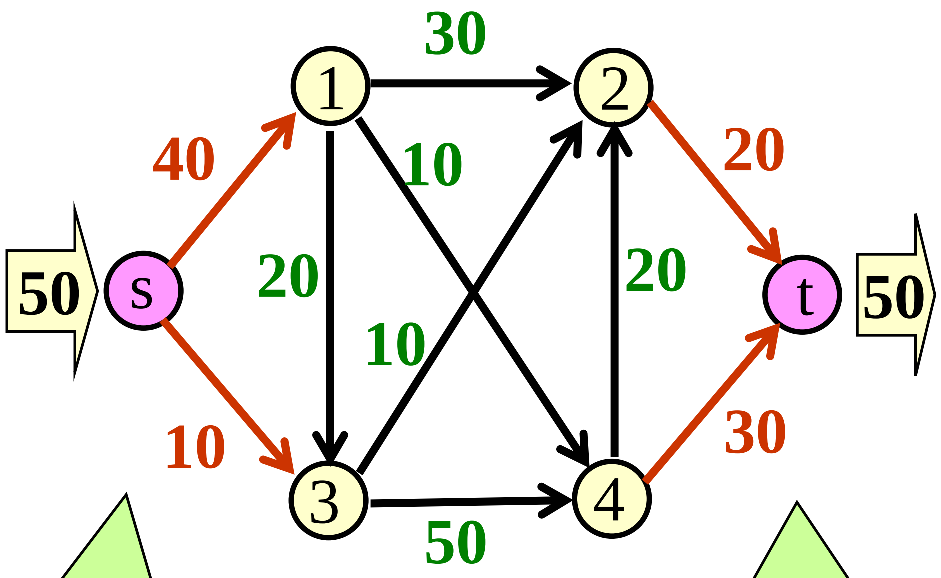
仮定 (総供給量)＝(総需要量)

需要・供給点が各1つ



供給点
source

需要点
sink

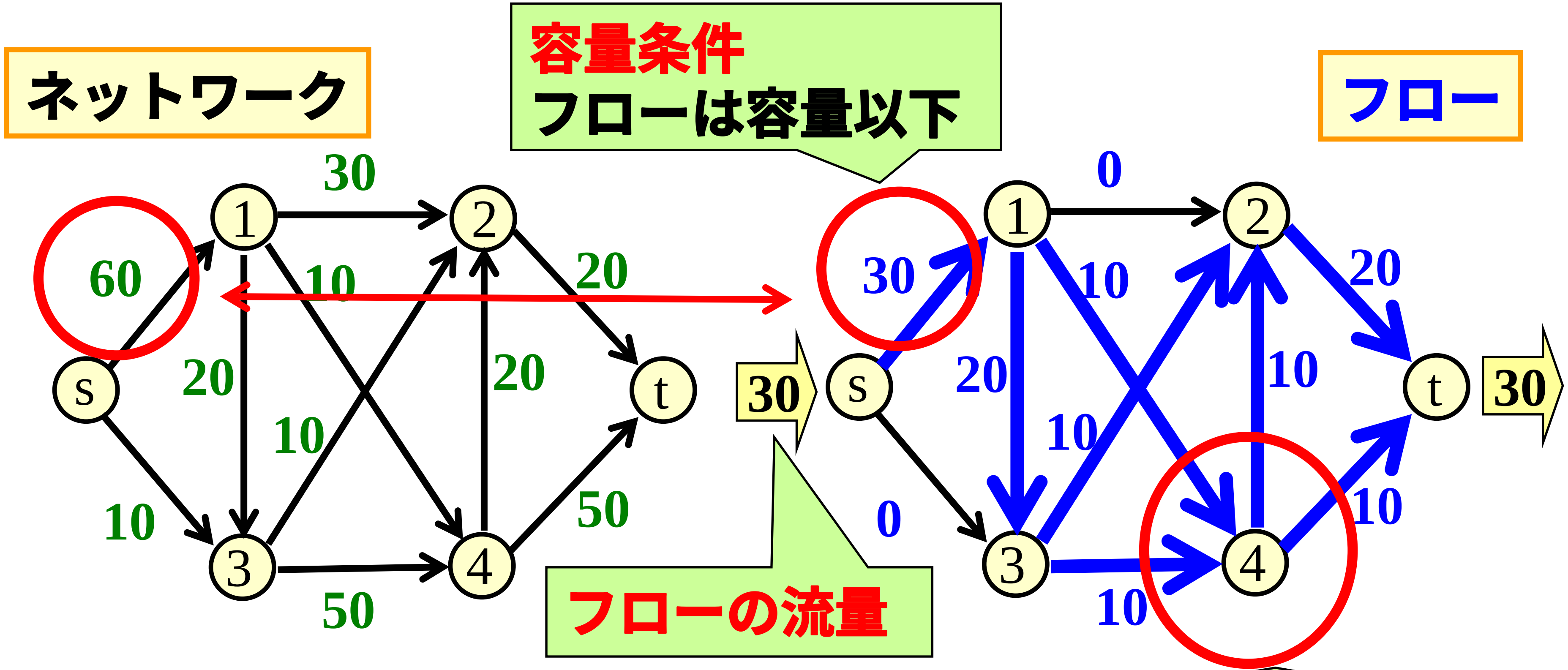


仮想供給点
super source

仮想需要点
super sink

フロー

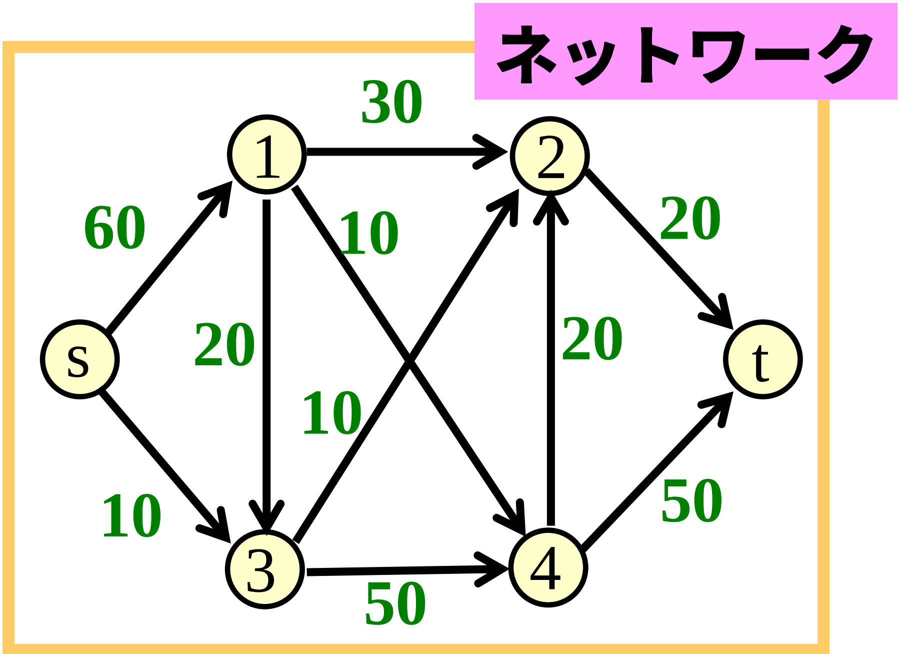
容量条件と流量保存条件の両方を満たす枝に付いた数字



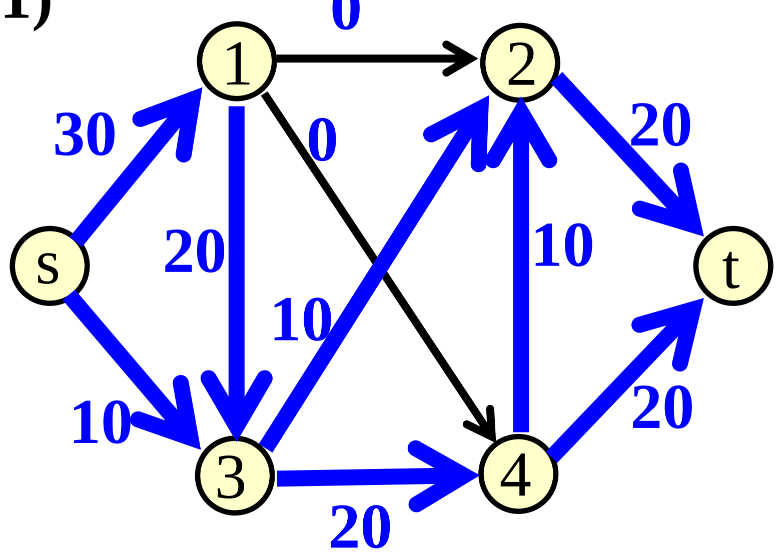
流量保存条件
s,t以外の全点で，
(流入フロー合計)＝(流出フロー合計)

一般化フロー ← **条件緩和**
多少増減可

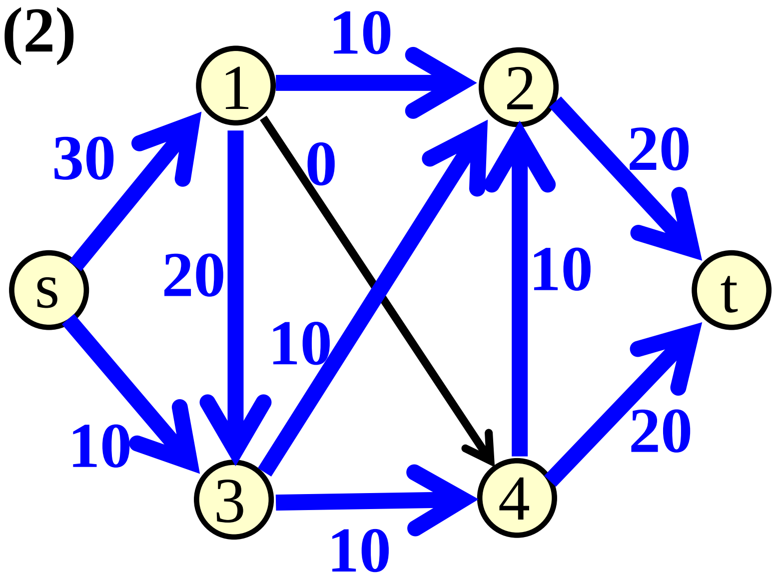
練習 フローはどれ?



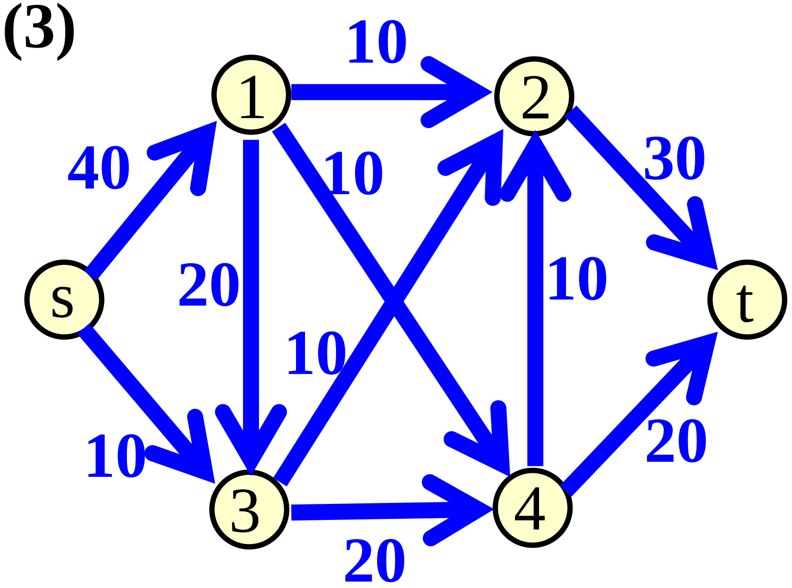
(1)



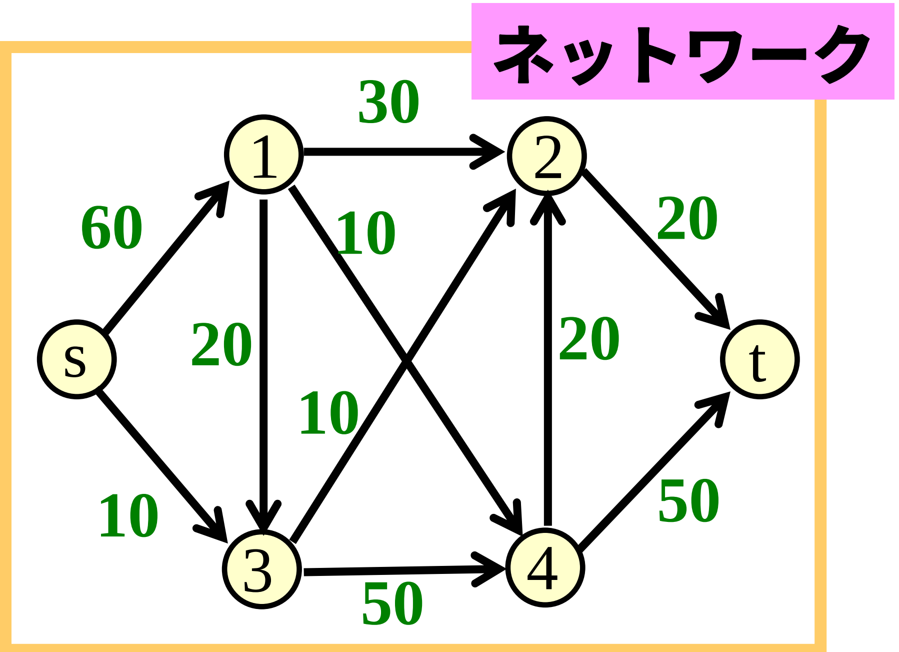
(2)

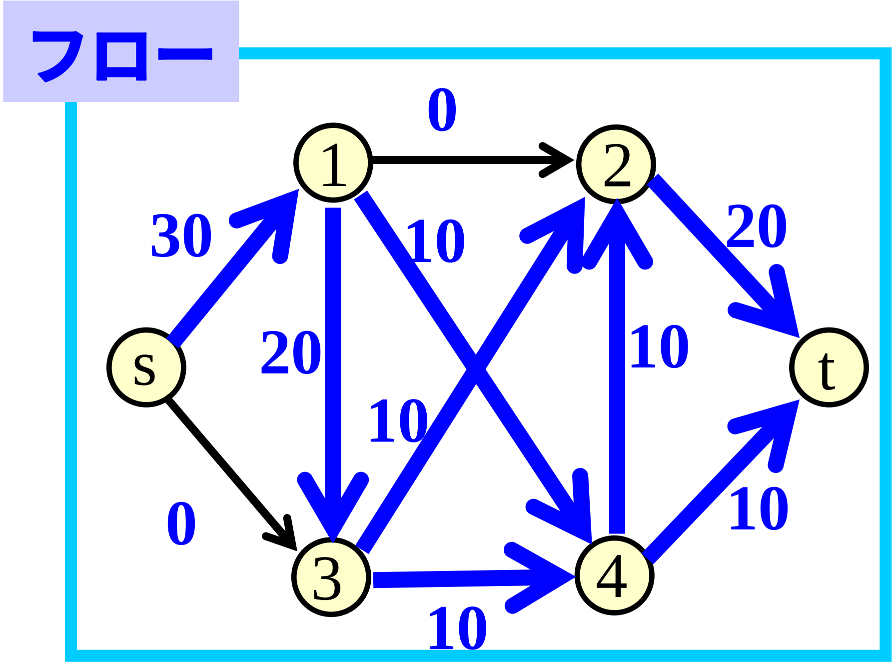


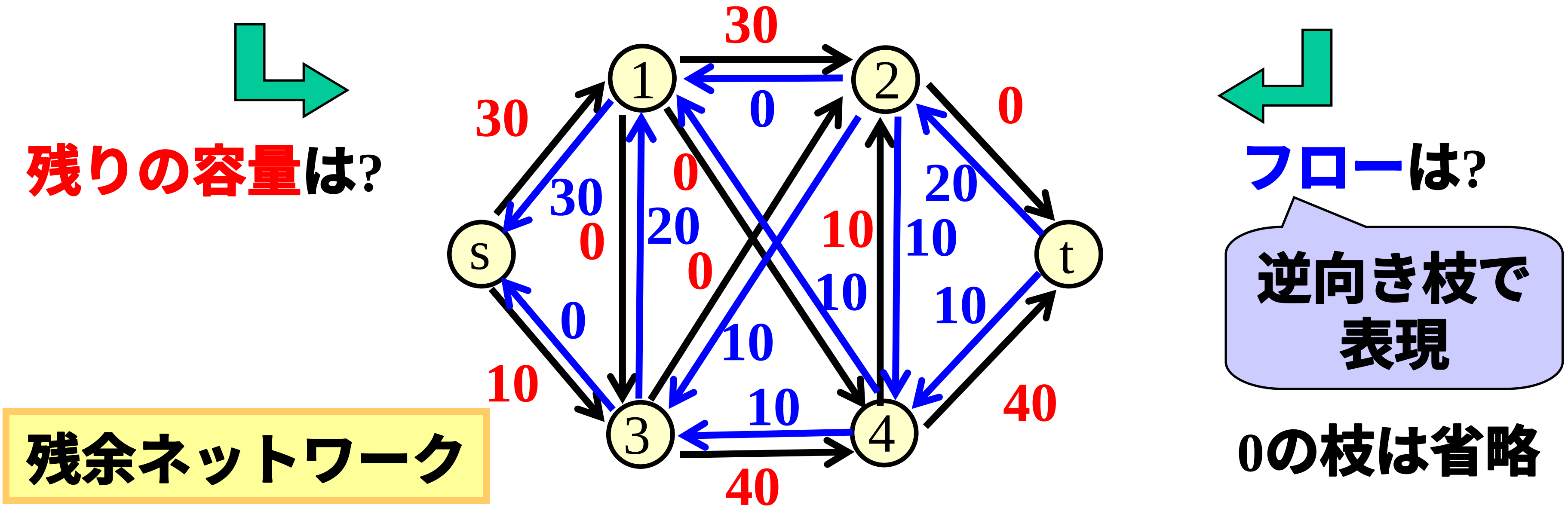
(3)



容量とフローを同時に表現するアイディア

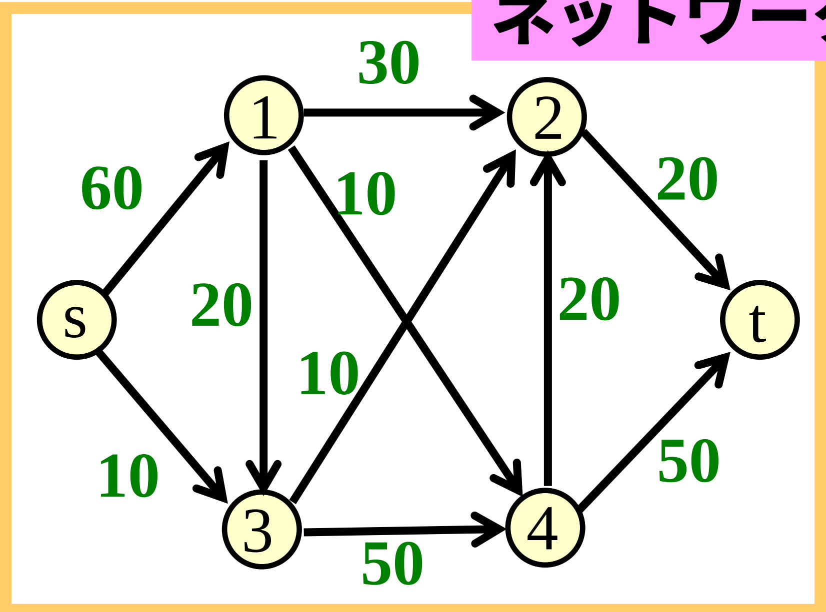




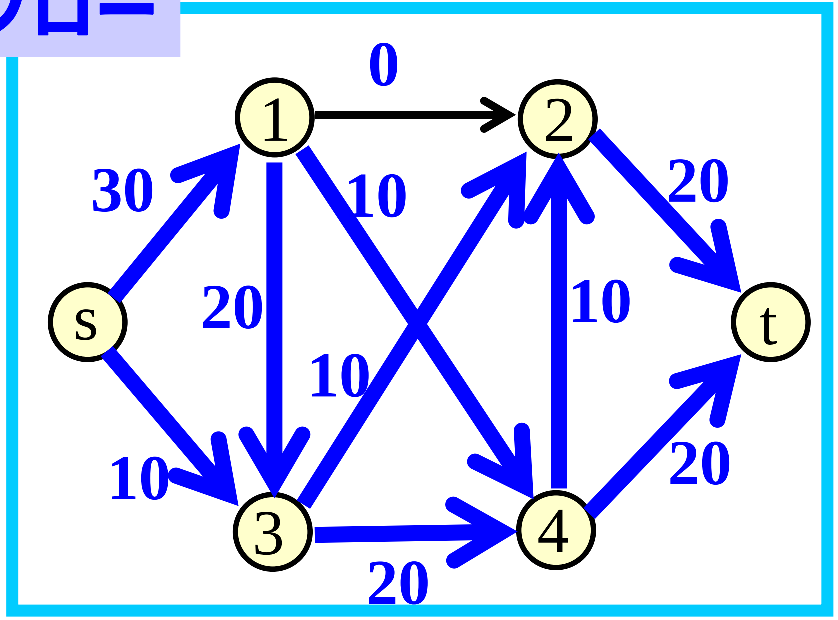


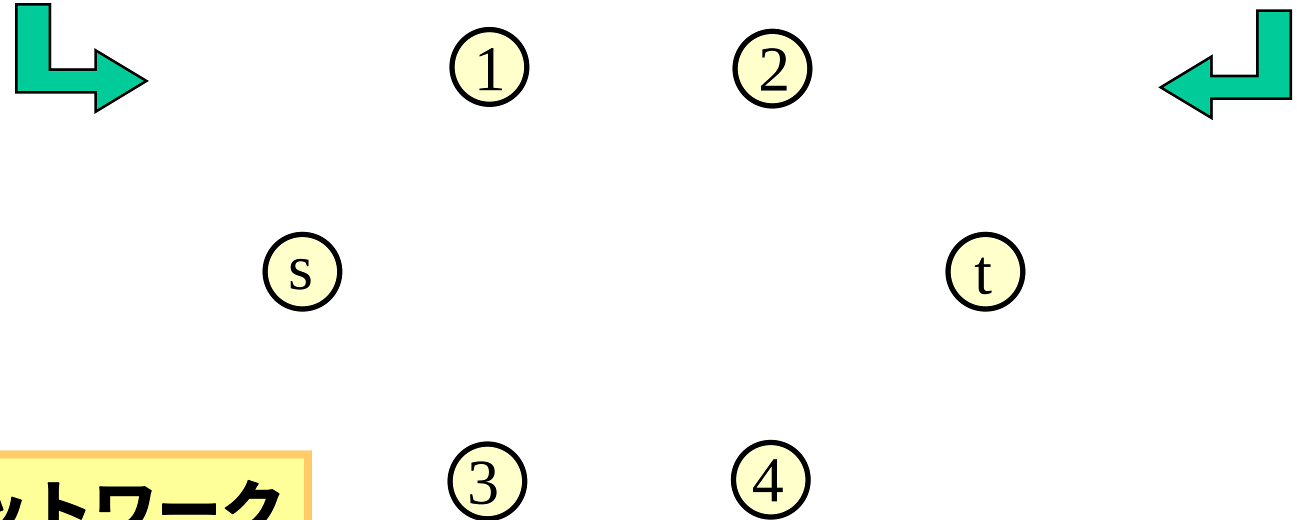
練習 残余ネットワークで表現してみよう

ネットワーク



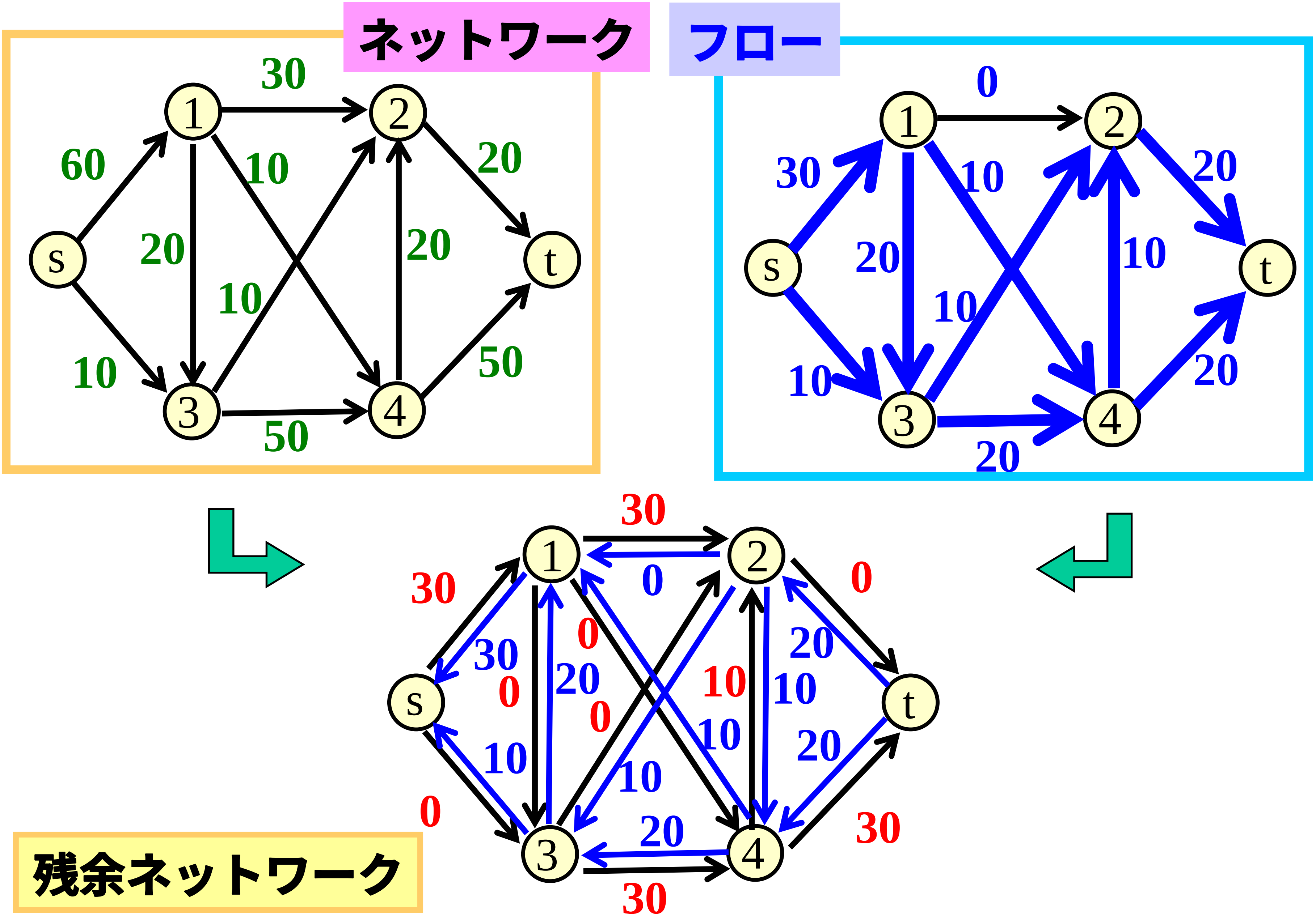
フロー



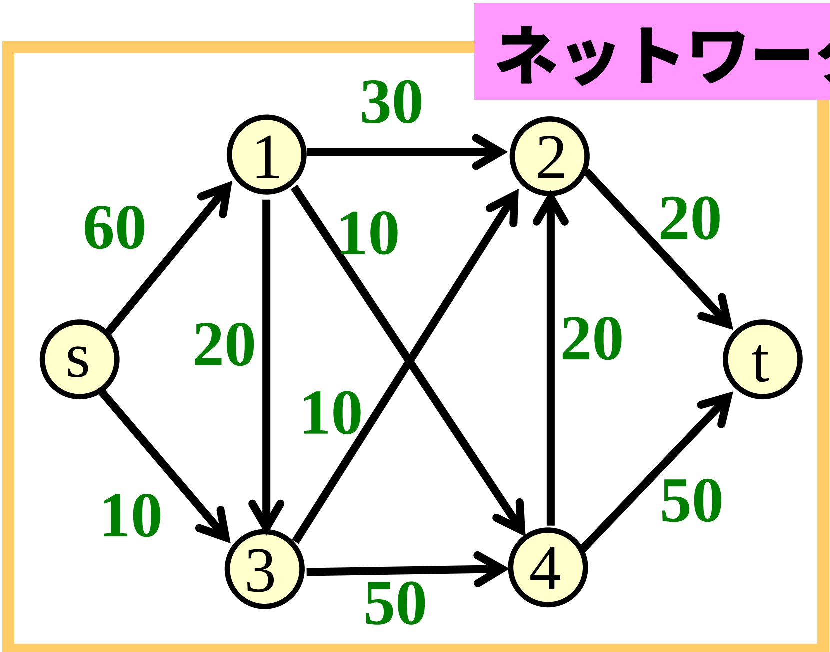


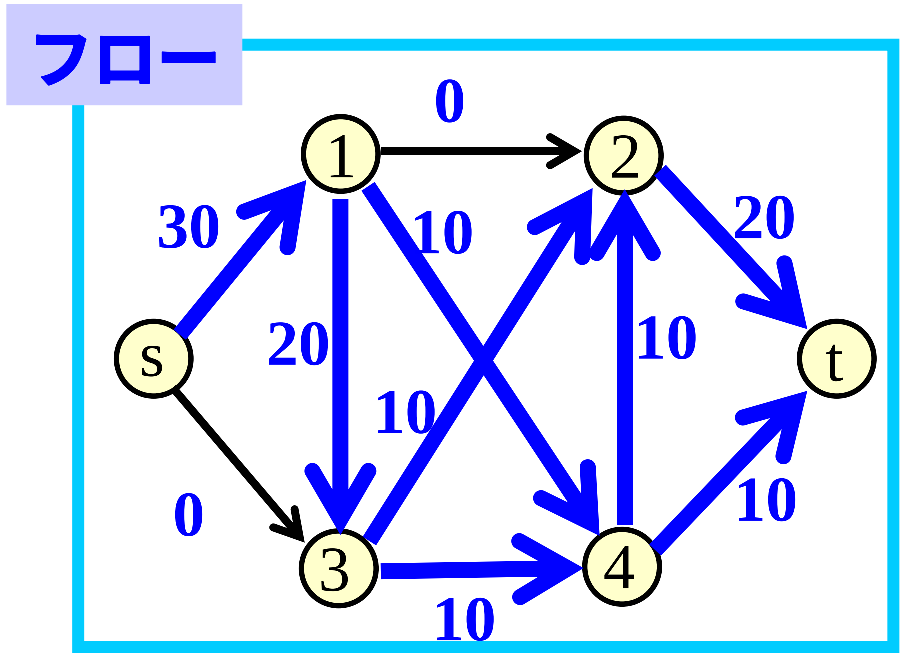
残余ネットワーク

練習 解答例

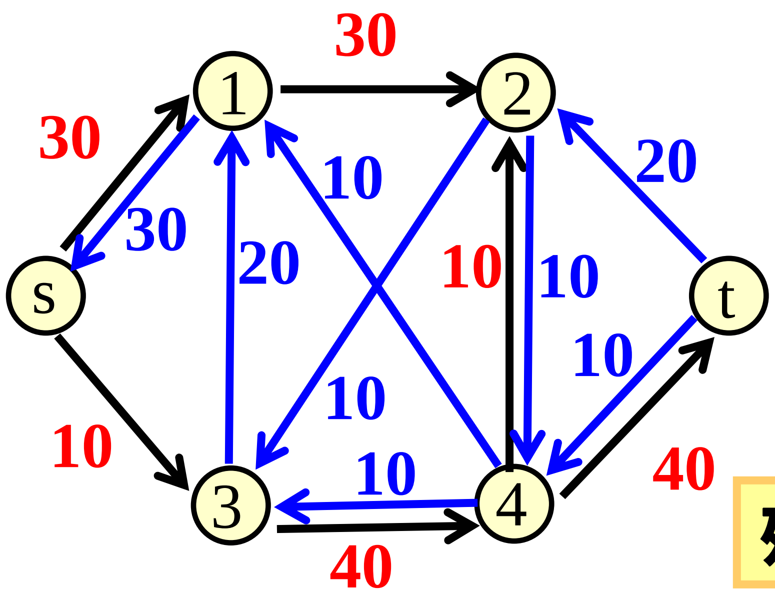


残余ネットワーク表現の利点





質問：フローの流量を
増やす余地がある?

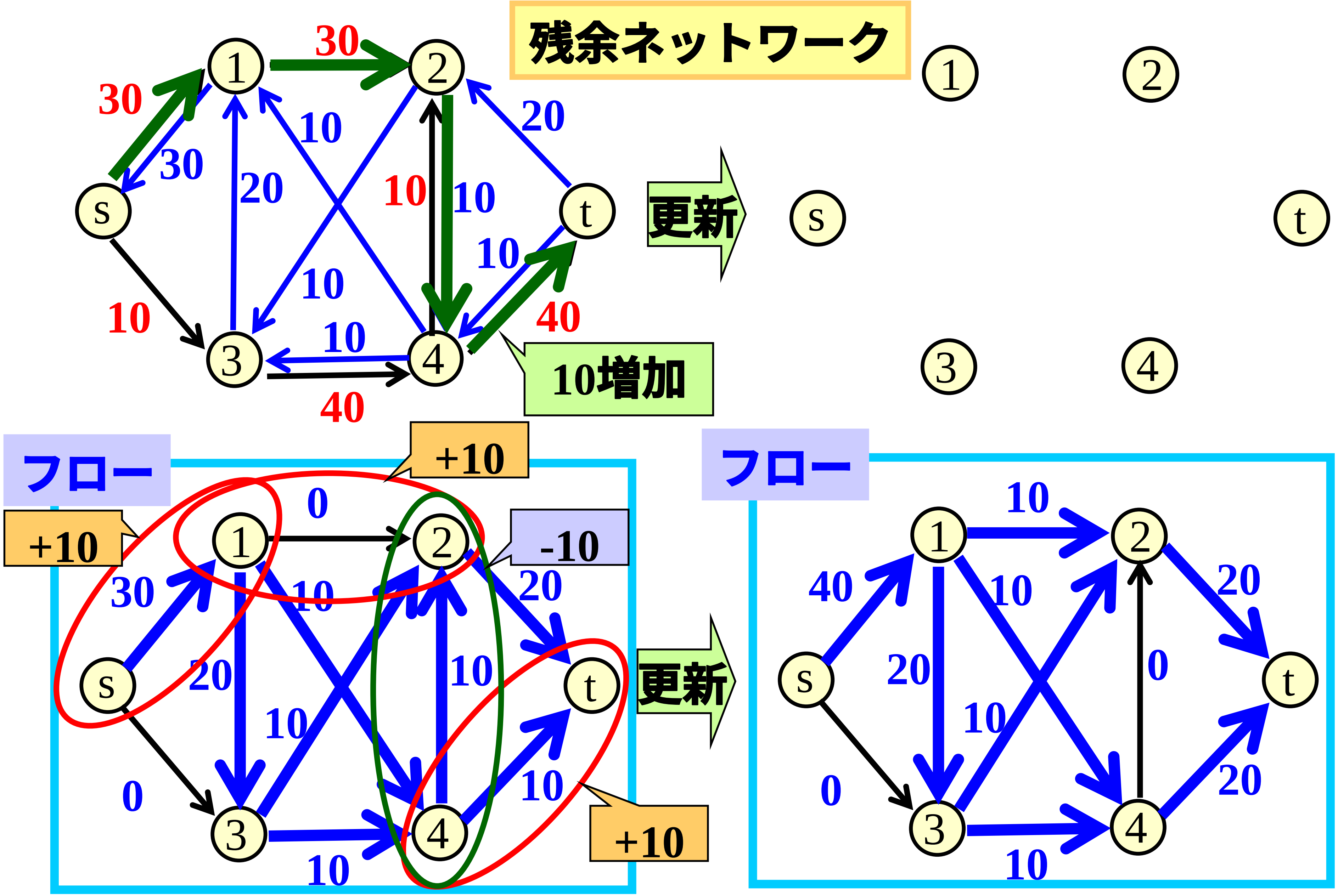


sからtへパスがある
⇔余地がある

探索で
発見可

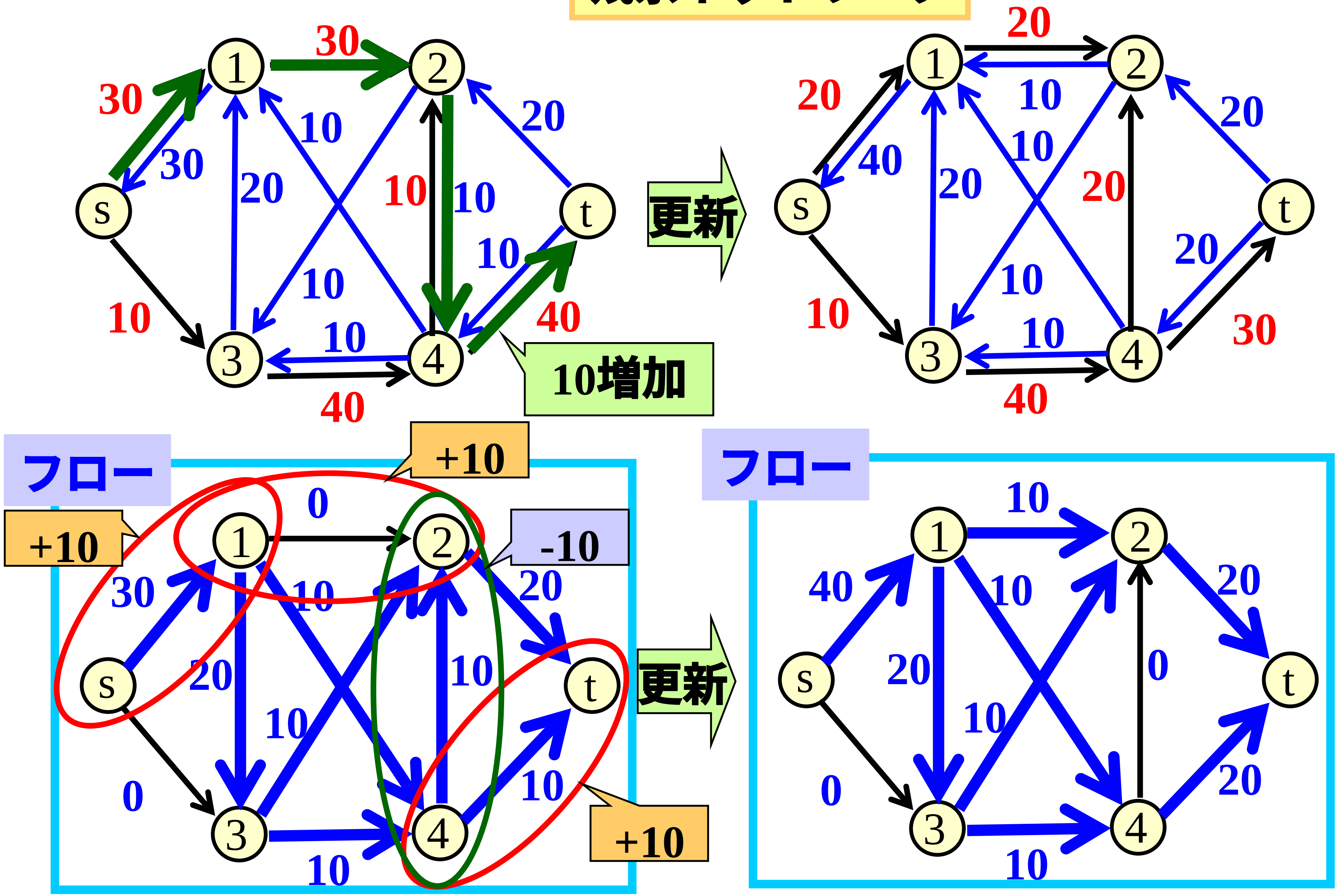
残余ネットワーク

練習 残余ネットワーク上でのフローの変化



練習 解答例

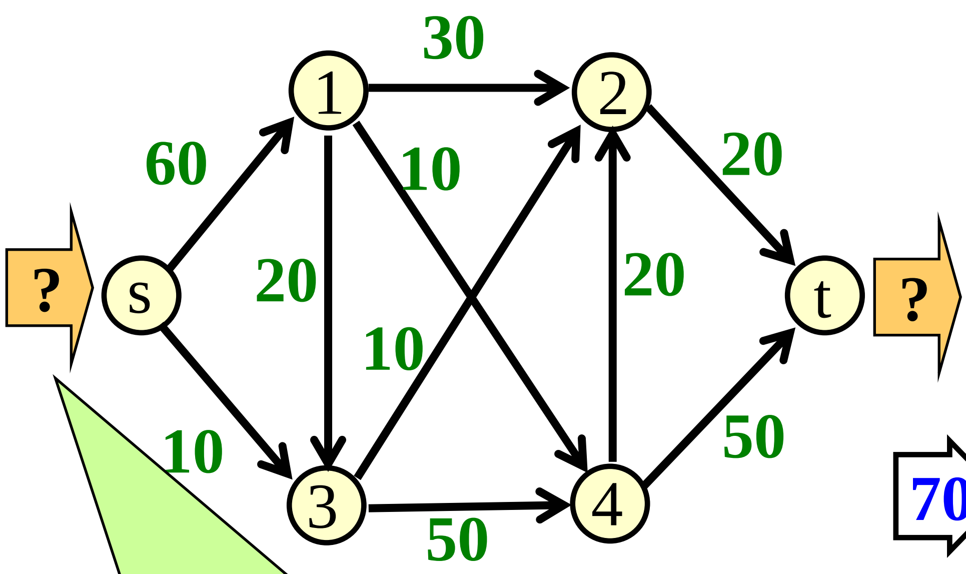
残余ネットワーク



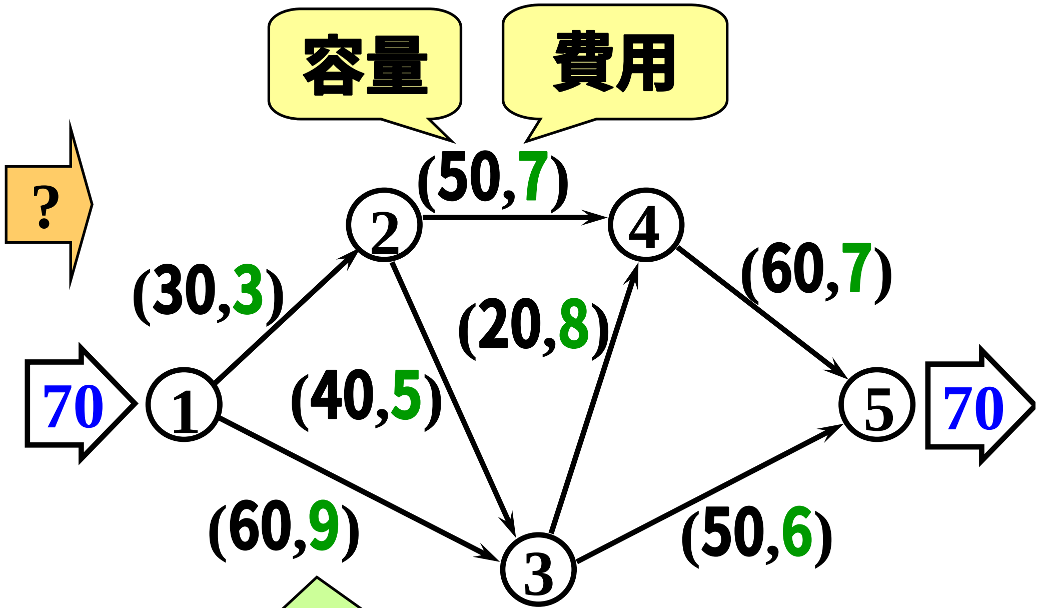
フローに関する基本的な最適化問題

最大フロー問題

最小費用フロー問題



フロー流量の最大は?

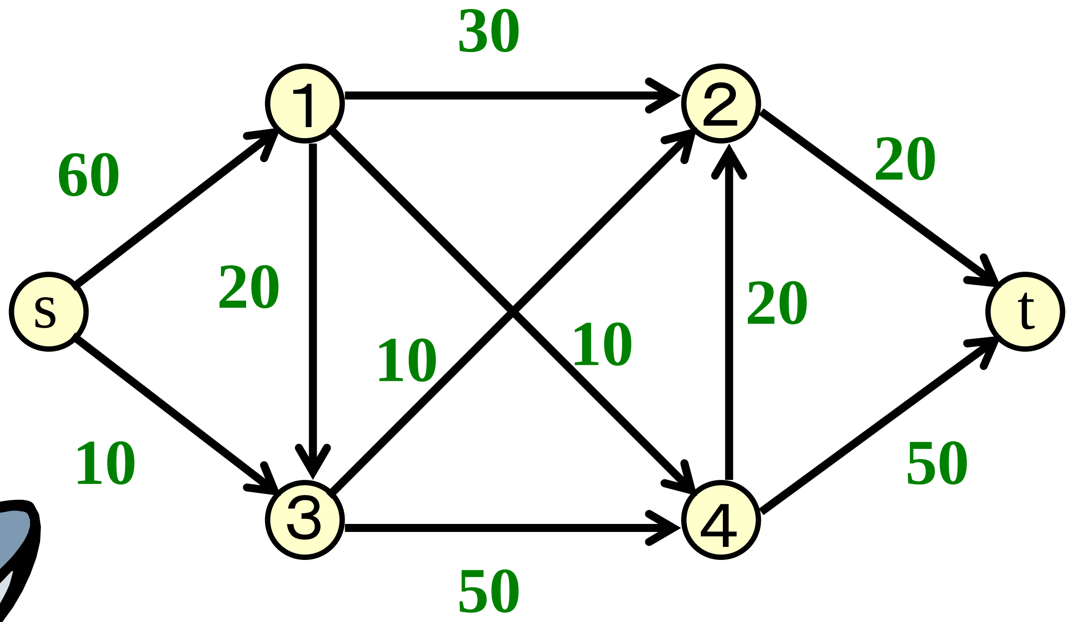


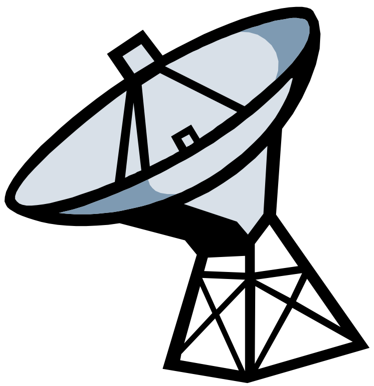
費用最小の流し方は?

ネットワークの能力を計りたい

例題1 最大フロー問題

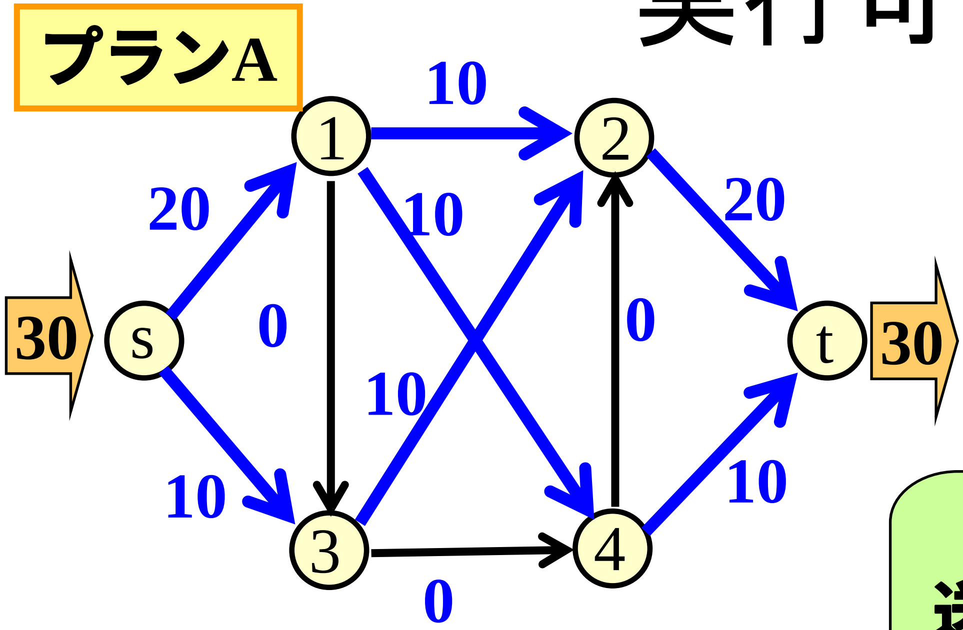
通信所sからtまで同時に送信できる最大データ量は？

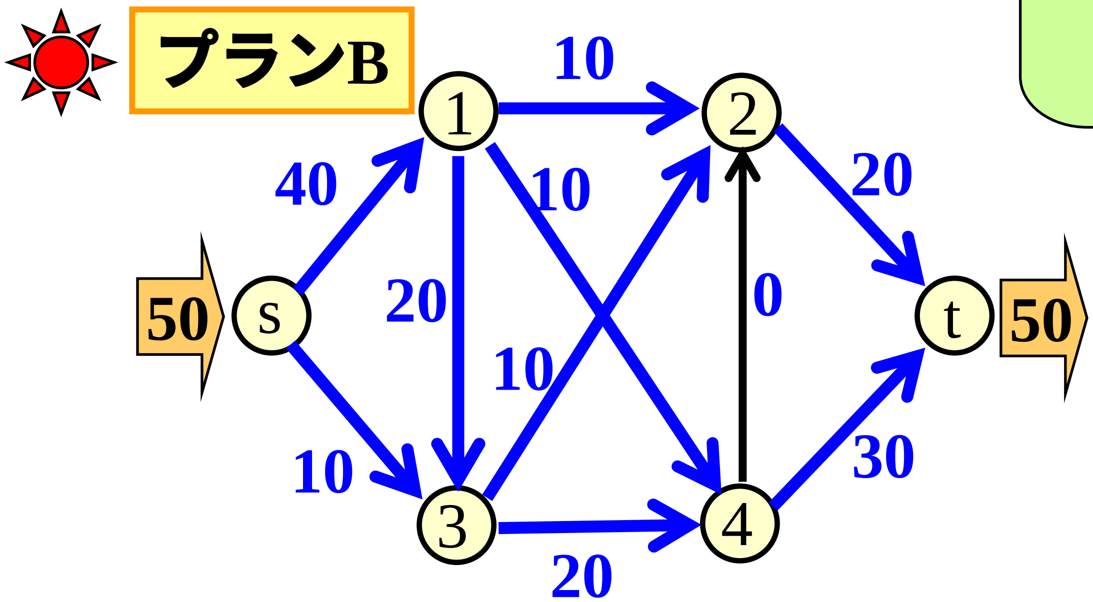




各枝の数字:送信可能容量

実行可能な通信計画





どちらが
送信データ
が多い？

最大フロー問題(定式化)

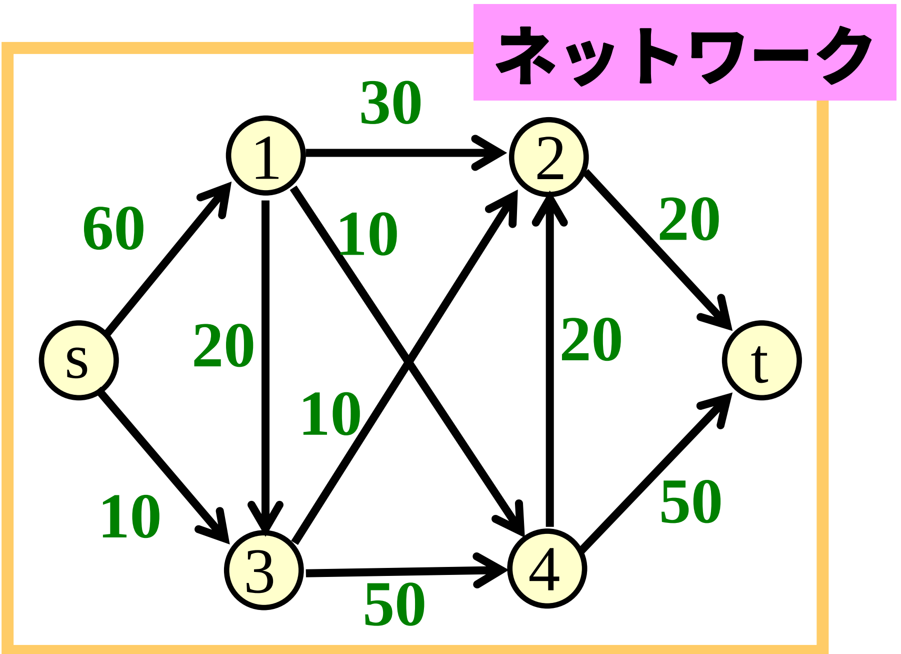
- フローの流量:
  始点sから流出するフローの和

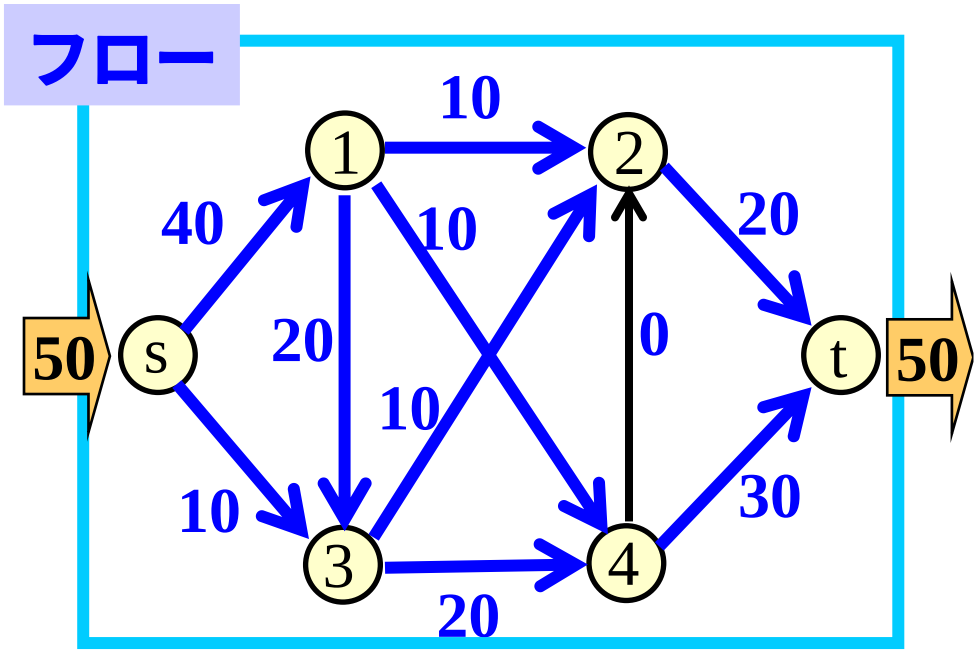
目的	フローの流量→最大
条件	実行可能フロー

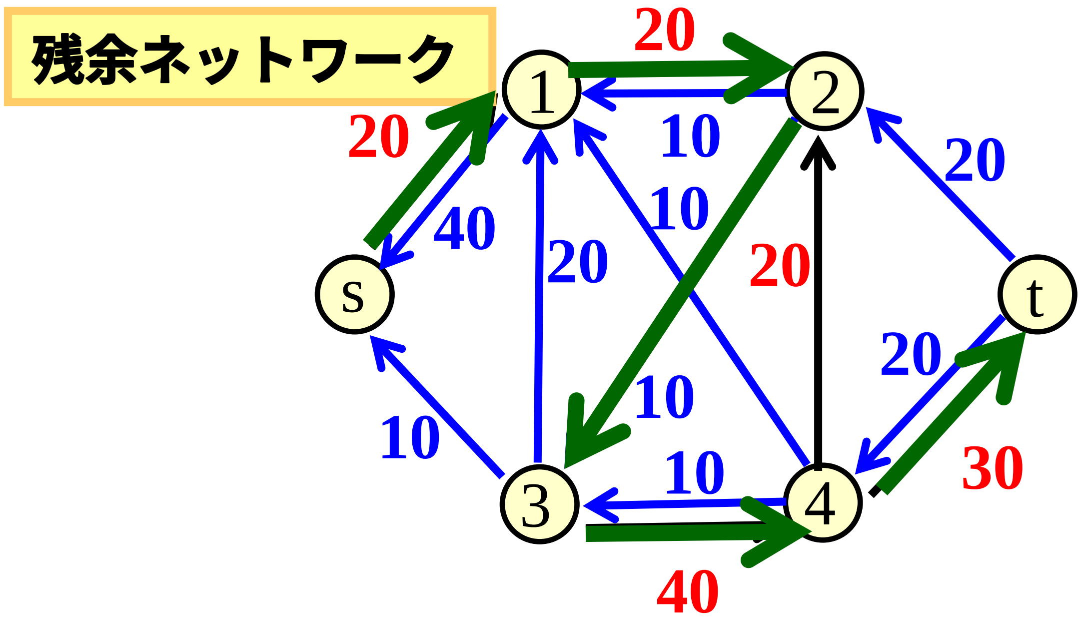
⇦ 最大フロー問題

- 最大フロー:フローの最大流量を達成する
  実行可能フロー

最大フロー?







残余ネットワーク上でsからtへのパスが存在

⇓

最大フローではない

最大フローの求め方のアイディア

観察された事実

残余ネットワーク上で
sからtへのパスが存在

最大フローではない

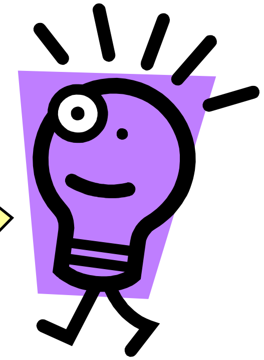
導かれる事実

残余ネットワーク上で
sからtへのパスが存在しない

最大フローである

残余ネットワーク上で
sからtへのパスがなくなるまで
フローを増やし続けよう

増加道
(増加パス)

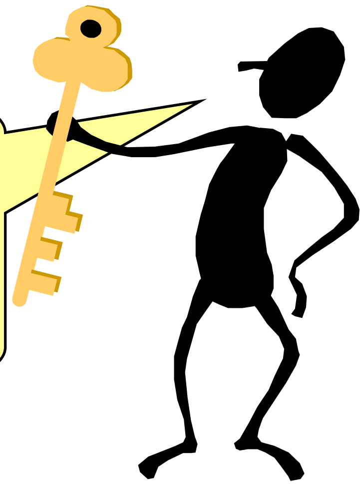


増加道法

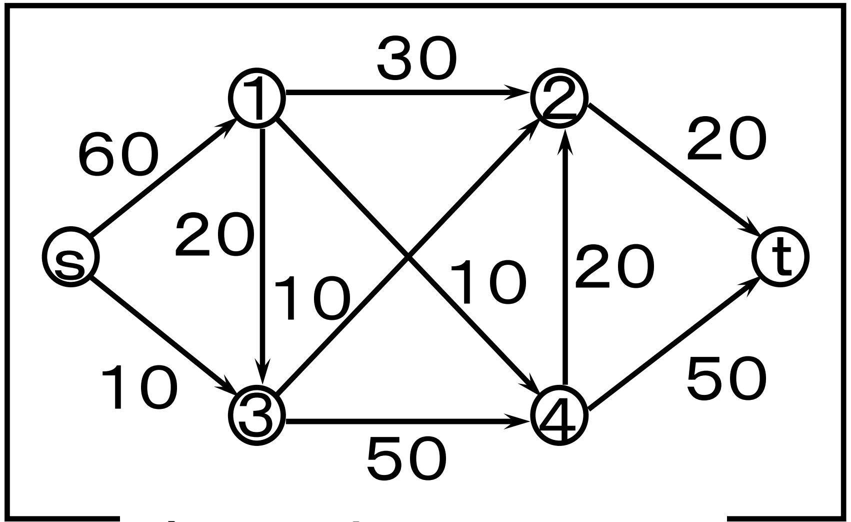
増加道法

- 手順１　各枝のフローを0にする.
- 手順２　**増加道**がある限り以下を繰り返す.
  - 増加道をひとつ見つける.
  - その増加道上の枝容量の最小値分のフローを, 残余ネットワーク上で増加道に沿って流す.

残余ネットワーク上で流すので,
実際のネットワーク上ではフロー
が減る枝も出てくることに注意！

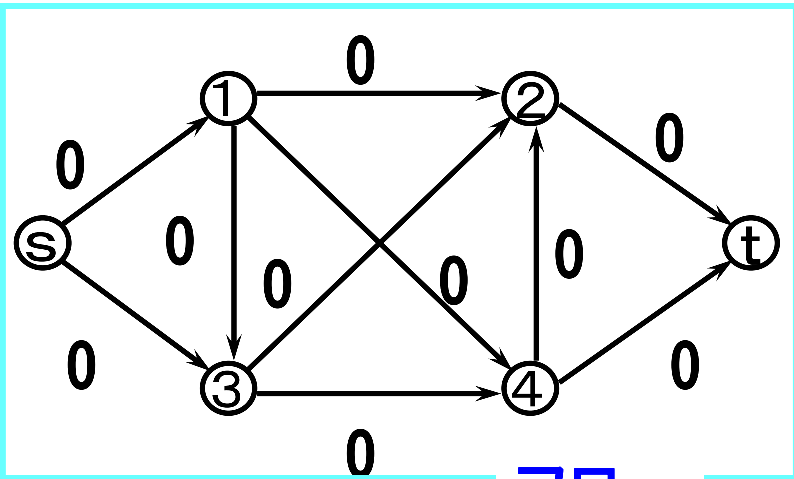


例題1(続)
増加道法



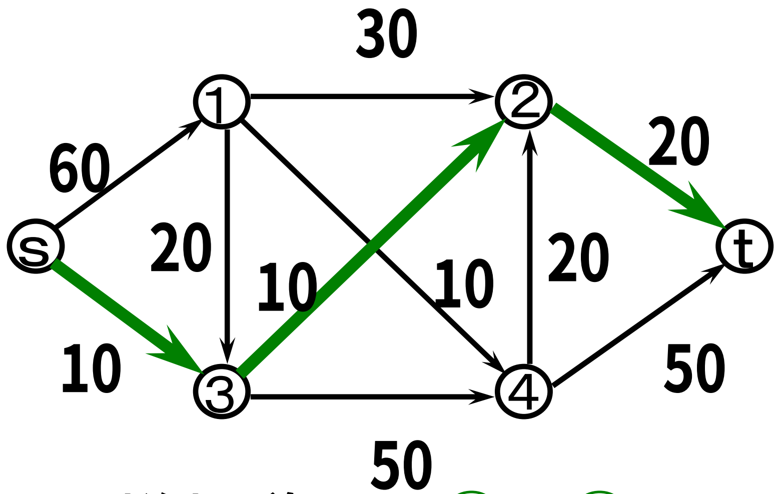
容量付きネットワーク

手順1



フロー

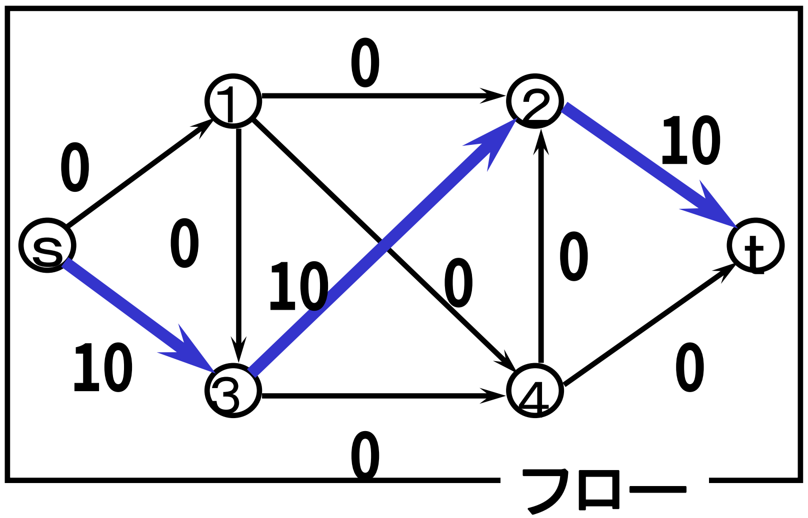
左側のフローに対する
残余ネットワーク

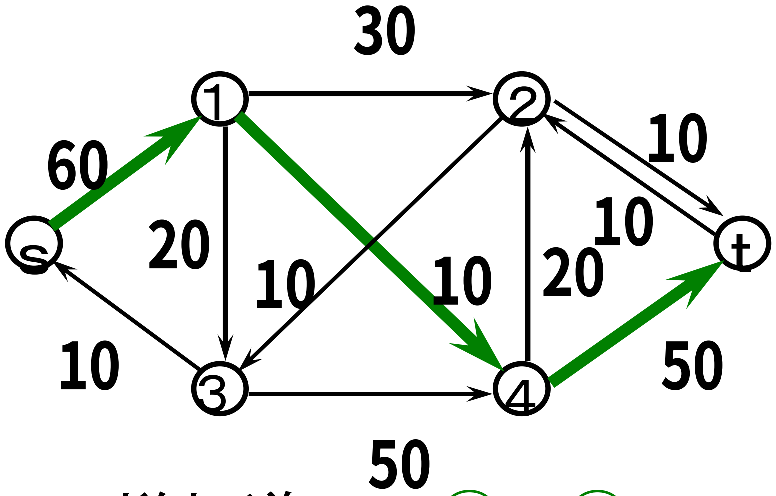


増加道：s→③→②→t

最小容量：10

手順2 繰返し1回目

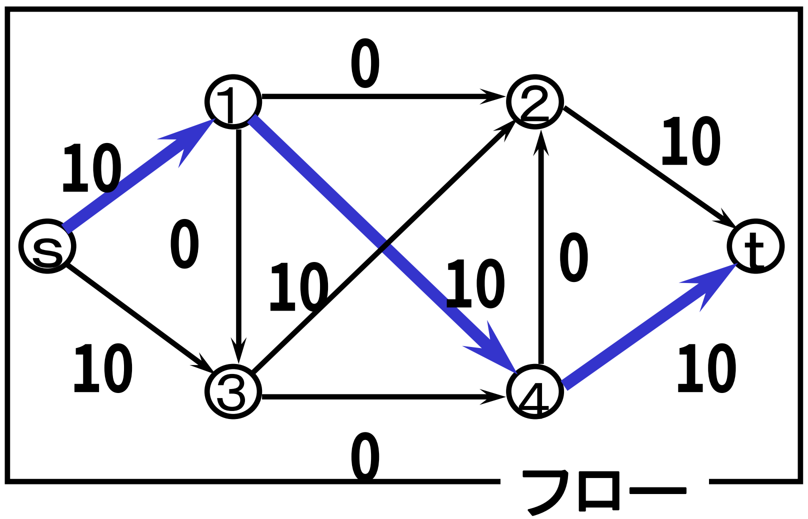


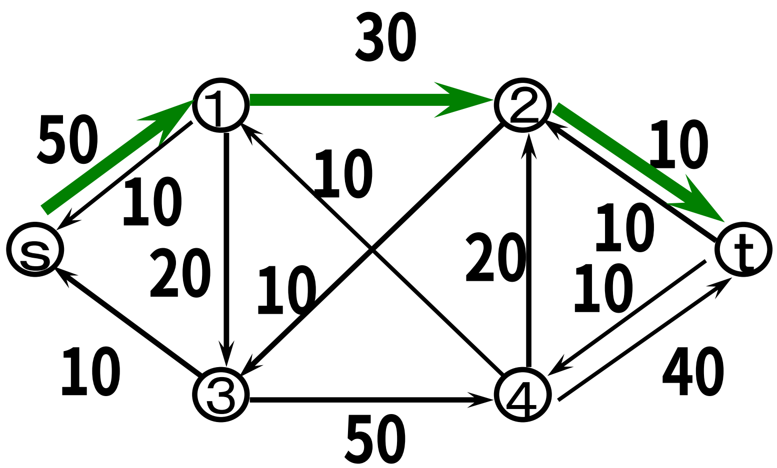


増加道:s→①→④→t

最小容量:10

手順2 繰返し2回目

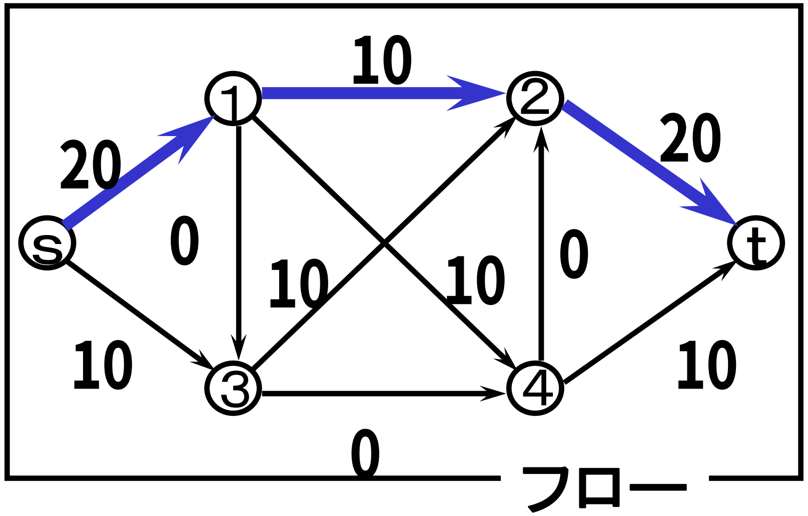


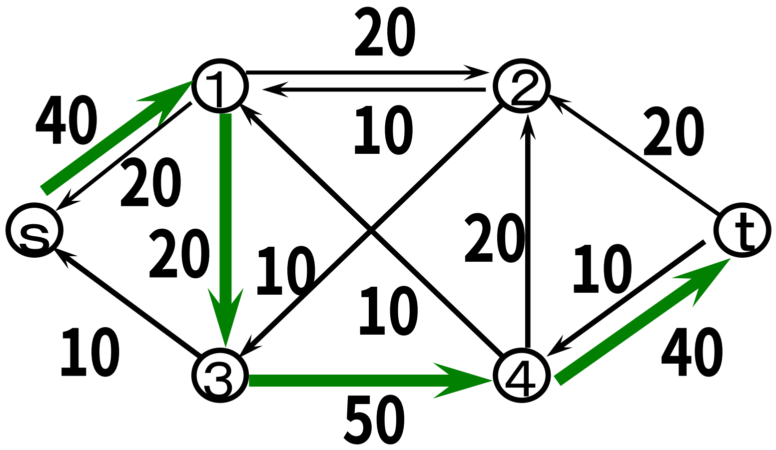


増加道:s→①→②→t

最小容量:10

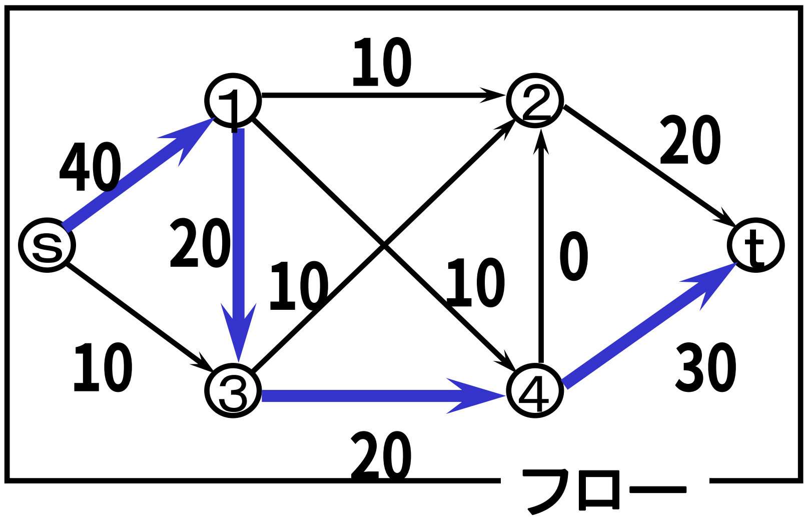
手順2 繰返し3回目

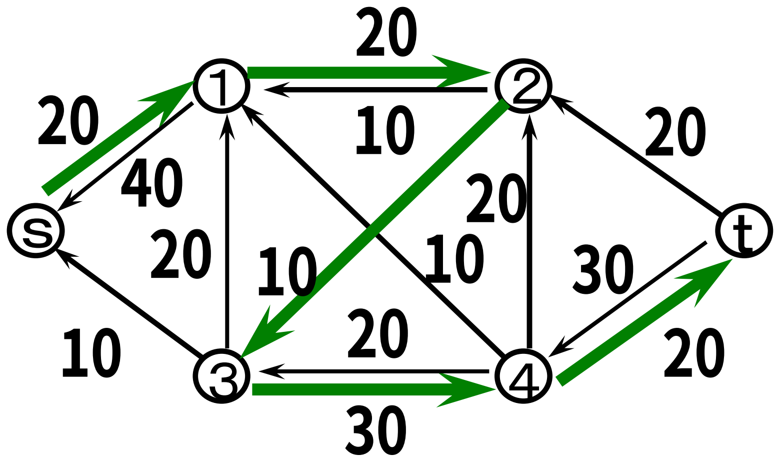




増加道：s→①→③→④→t
最小容量：20

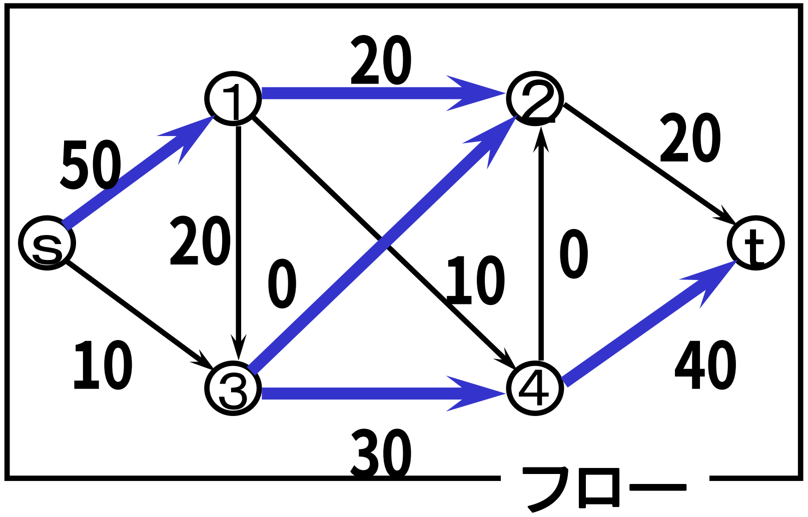
手順2 繰返し4回目

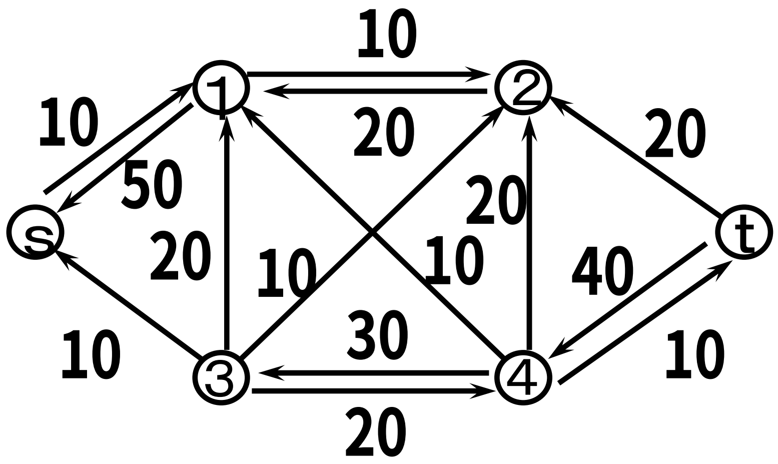




増加道：s→①→②→③→④→t
最小容量：10

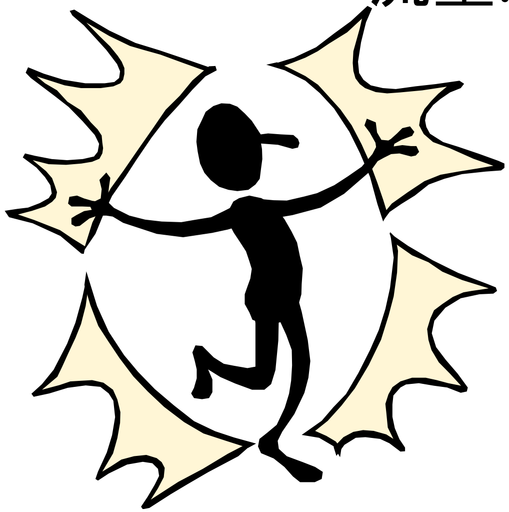
手順2 繰返し5回目





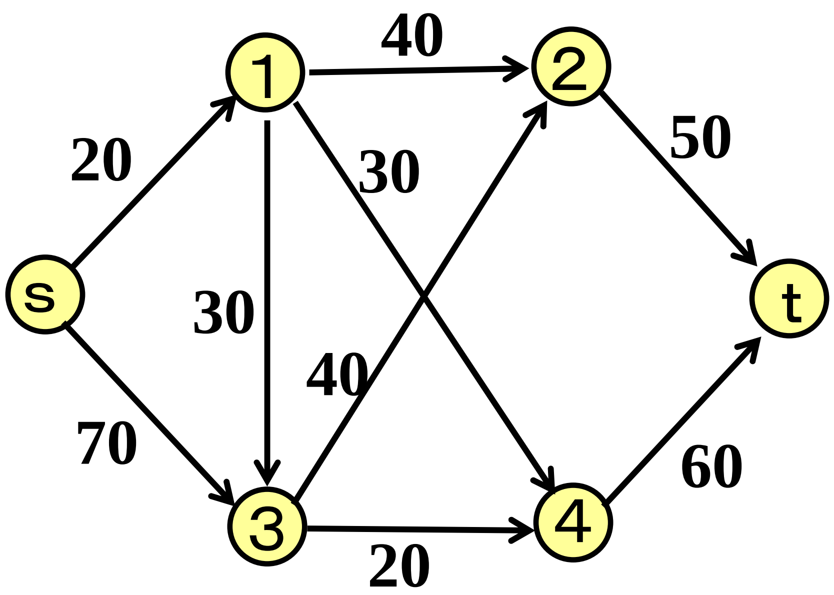
増加道:なし

最大フロー
流量:60

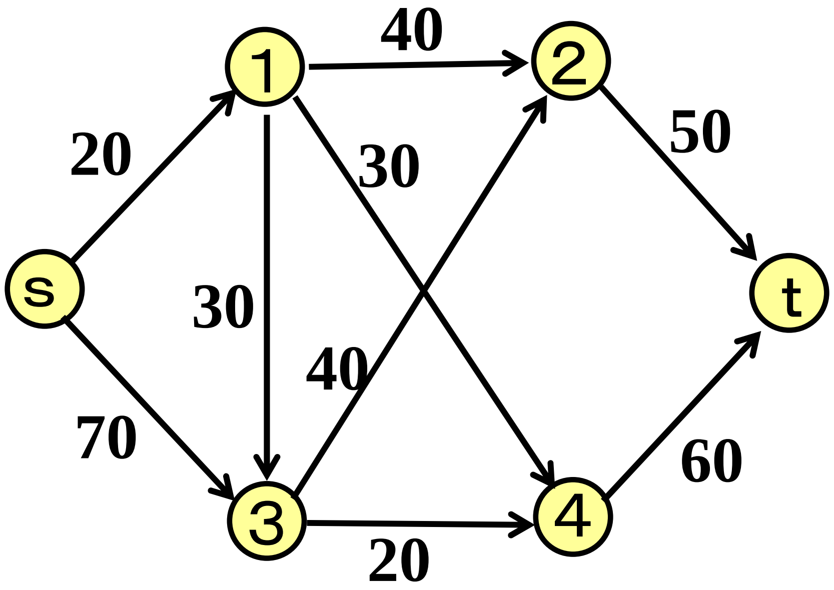


練習 増加道法

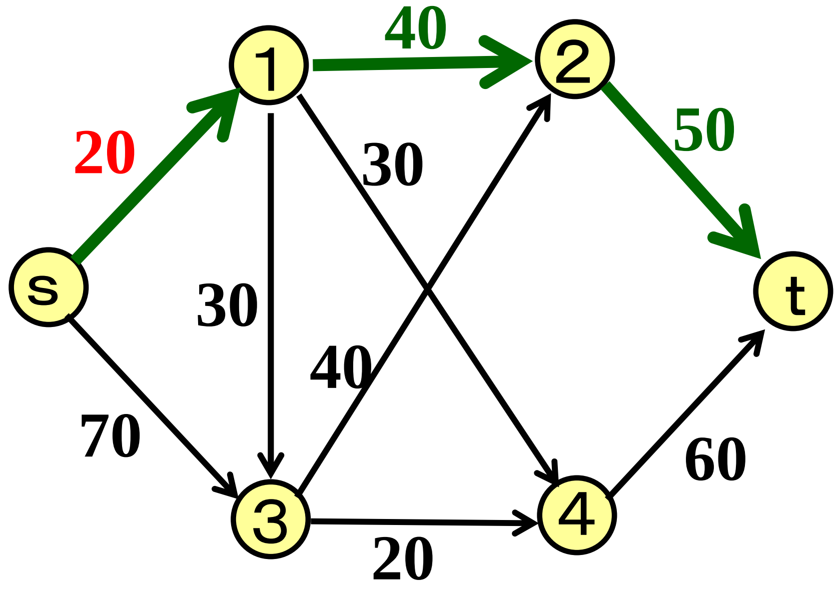
増加道法で最大フローを求めよ

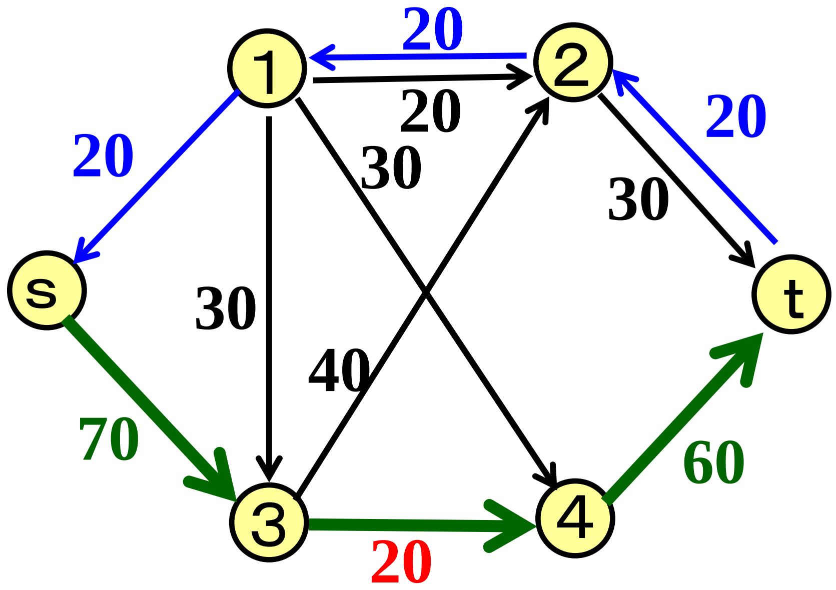


練習 解答例

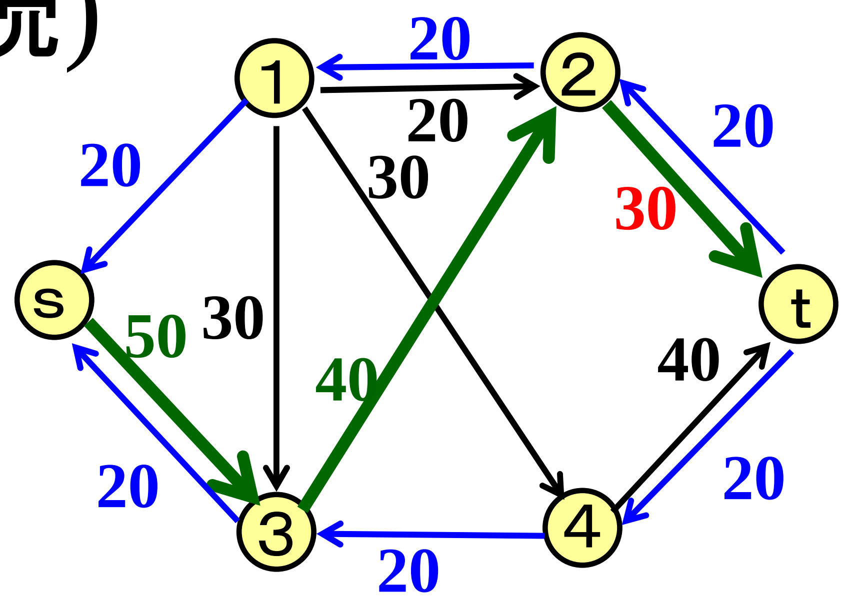


初期の残余ネットワーク
（フローの流量は0）

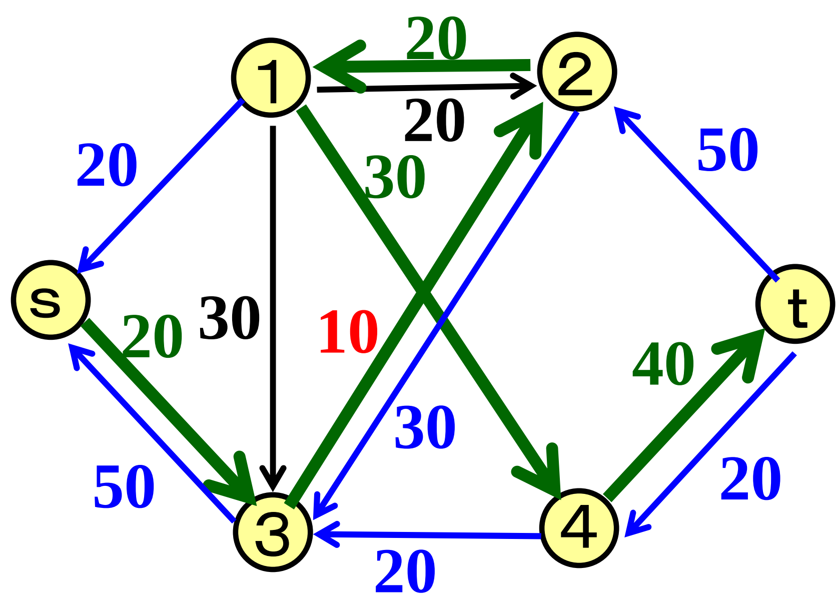




練習 解答例(続)

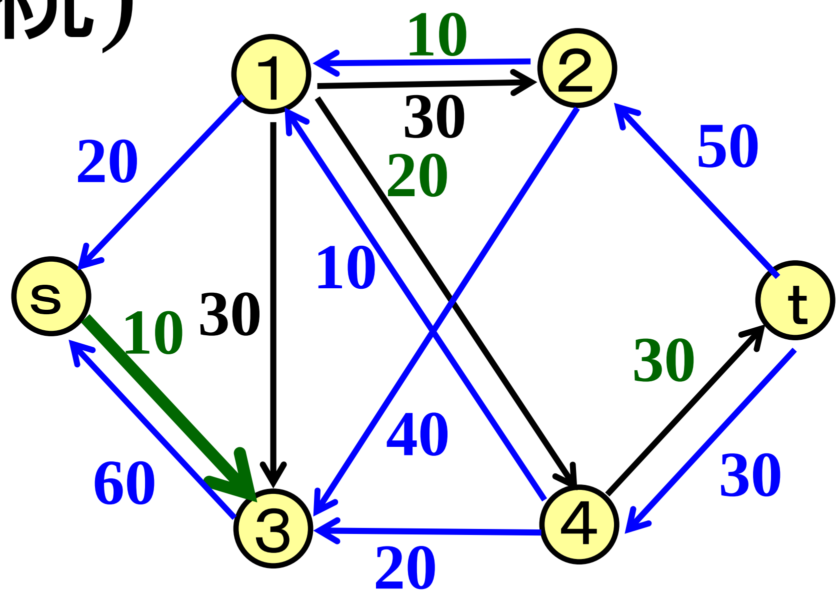


1
2
s
t
3
4
20
20
20
20
30
30
30
50
40
40
20
20
20



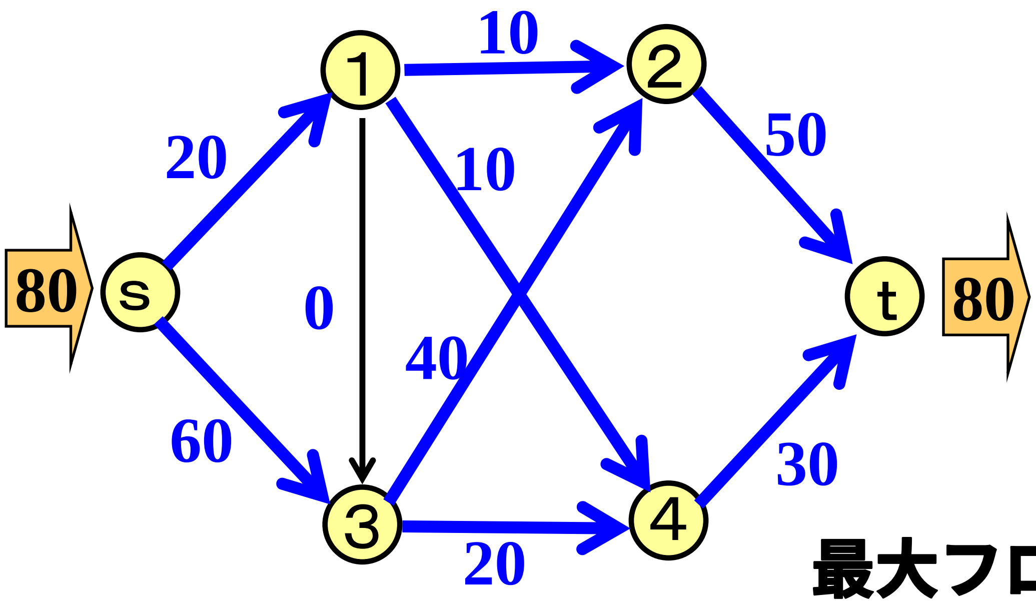
1
2
s
t
3
4
20
20
20
50
30
30
20
10
30
40
50
20
20

練習 解答例(続)



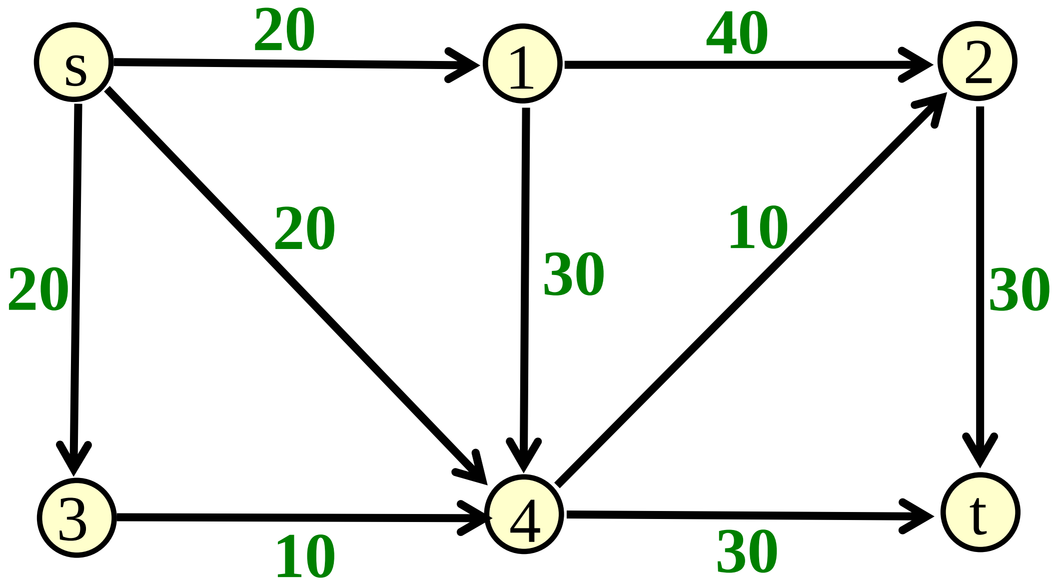
最大フロー

増加道がない



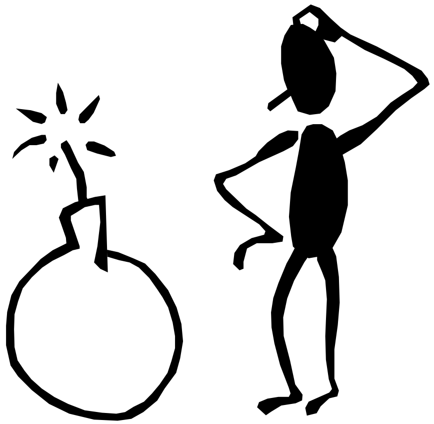
最大フローの流量は80

演習1 増加道法

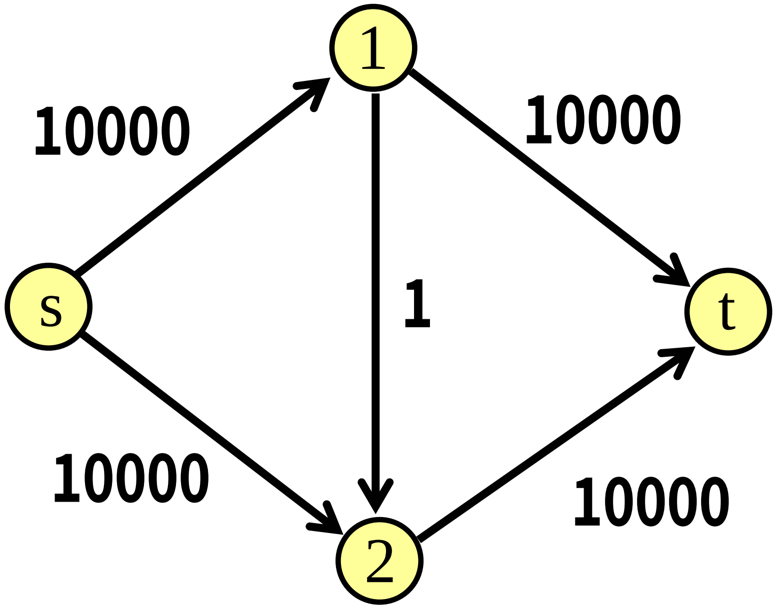


最大フローとその流量を求めよ

増加道法の欠点



sからtへの最大フローを求めよ.
手順2を何回繰り返す？



演習2 増加道法を改良せよ

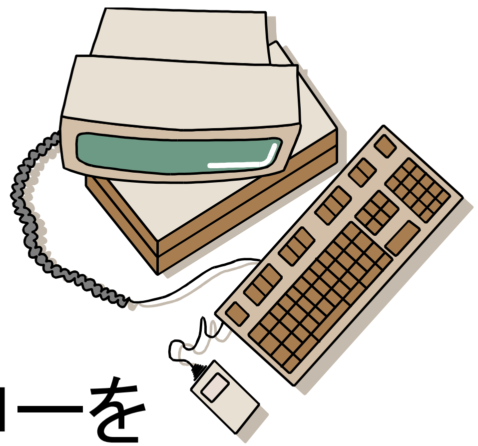
最大フロー問題の二大基本解法

- 増加道法（Ford-Fulkerson）
  - 簡単な手順の繰り返し．直感的に妥当性が理解できる．計算時間が多くかかる．

⇩

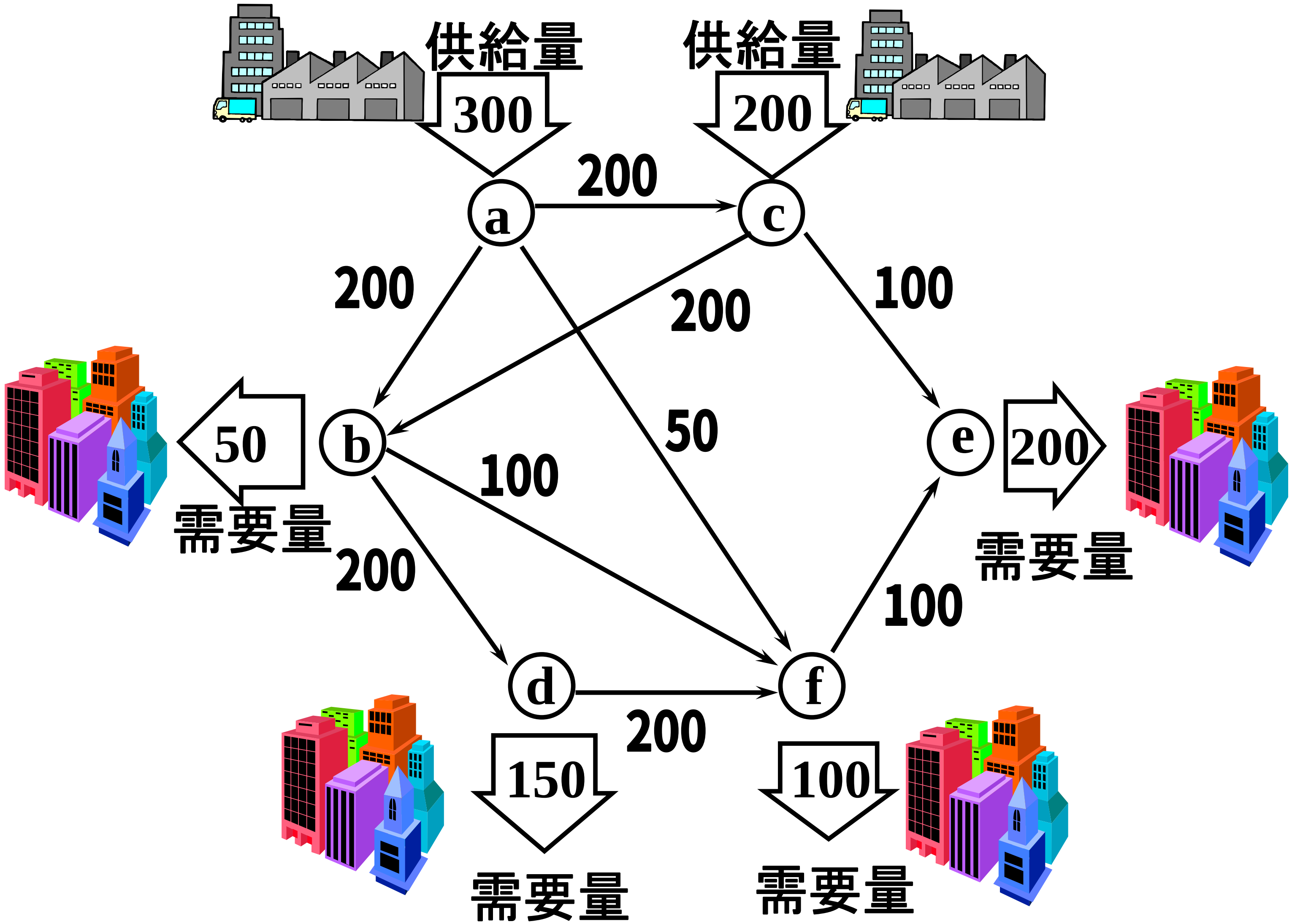
改良：Dinicの解法

- Preflow-Push解法
  - 工夫を加えることで高速に最大フローを求める．



仮定：ネットワークの容量は整数で与えられる．

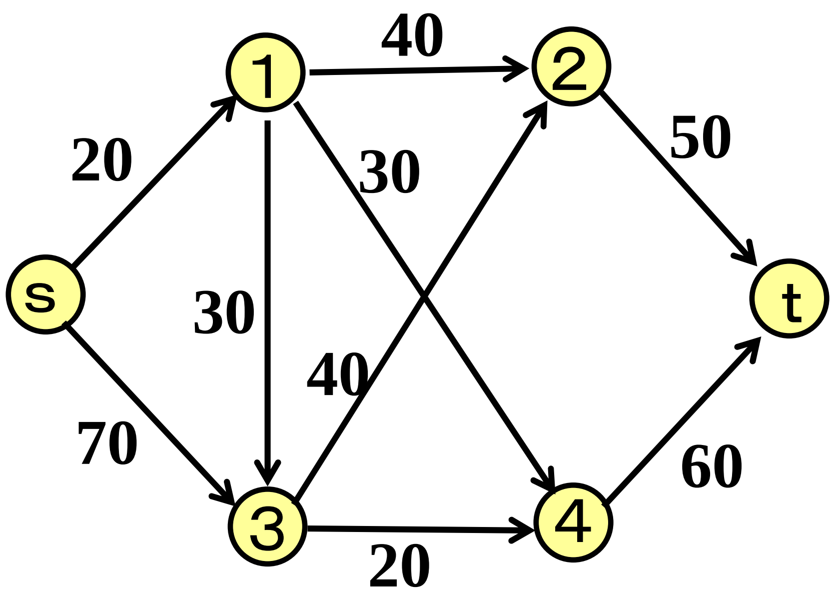
演習3 需要を満たすことは可能？



例題2

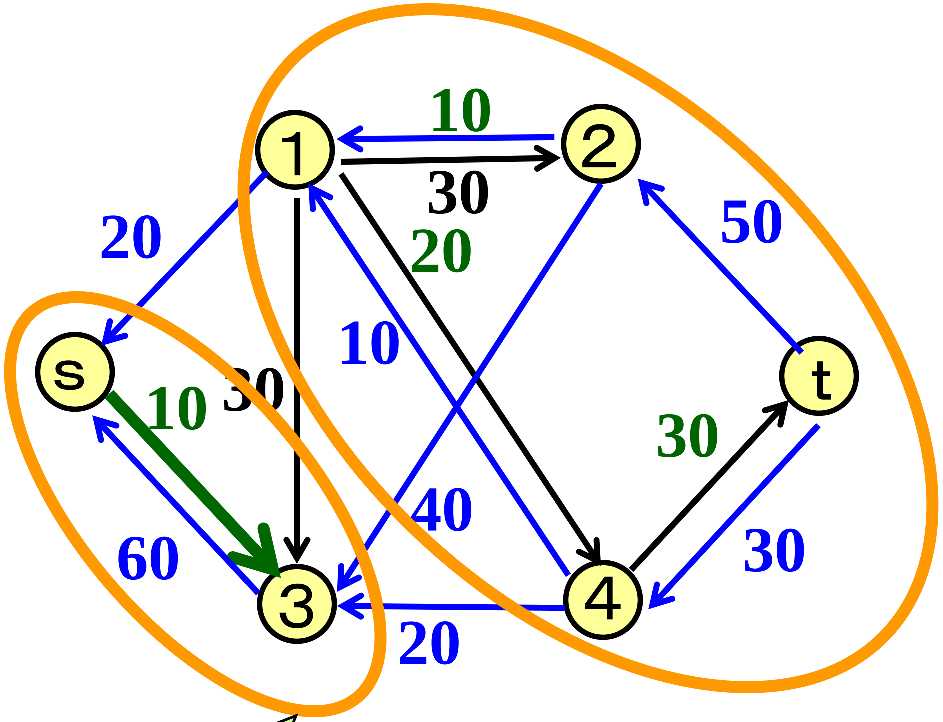
sからtへより多くのモノを流したい.

どの枝の容量を増やすのが効果的?



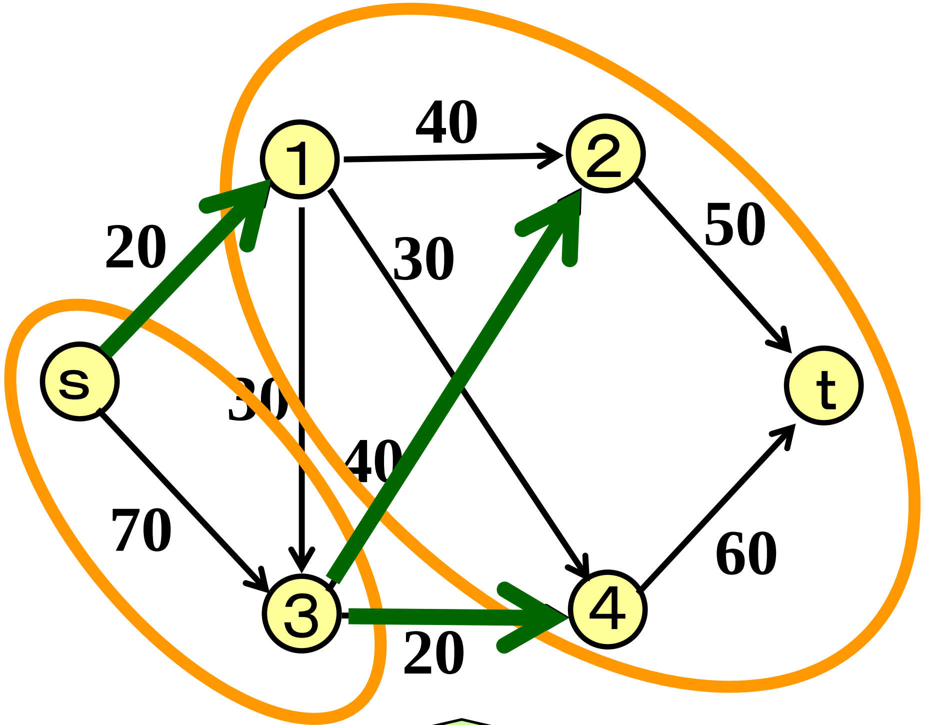
例題2 解答例

増加道法で最後の場面
（増加道が存在しない）



sから到達可能

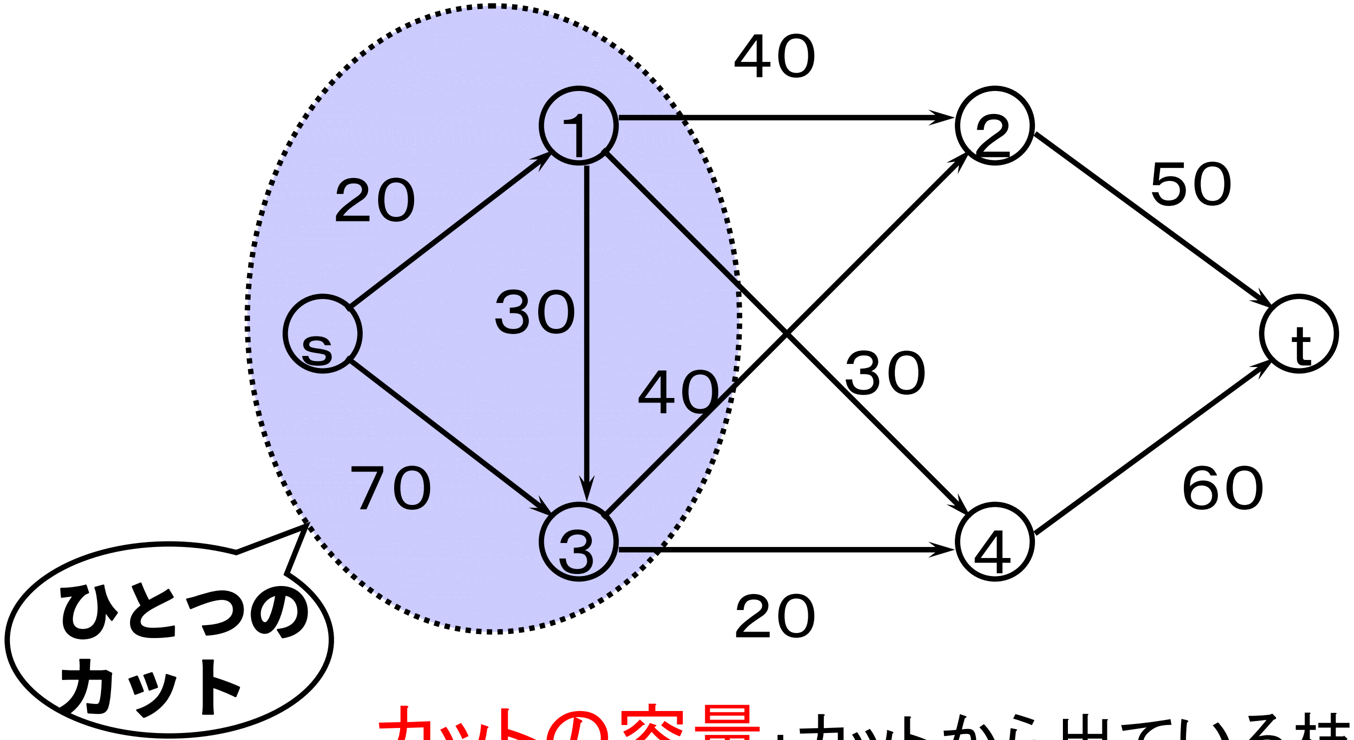
強連結成分分解



ボトルネック

カット

sを含み，tを含まない点の部分集合を**カット**という.
※ネットワーク上にカットはたくさんある



カットの容量:カットから出ている枝の容量の総和

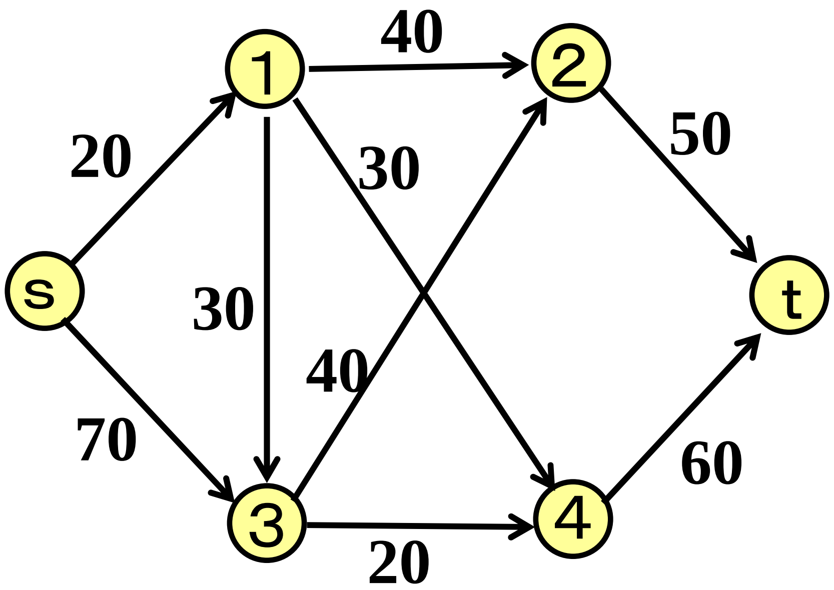
※上記のカットを特に「s-tカット」と呼ぶ場合もある

最小カット

最小カット：容量最小のカット

演習7-4：以下のネットワークの最小カットを見つけよう

最小カット問題



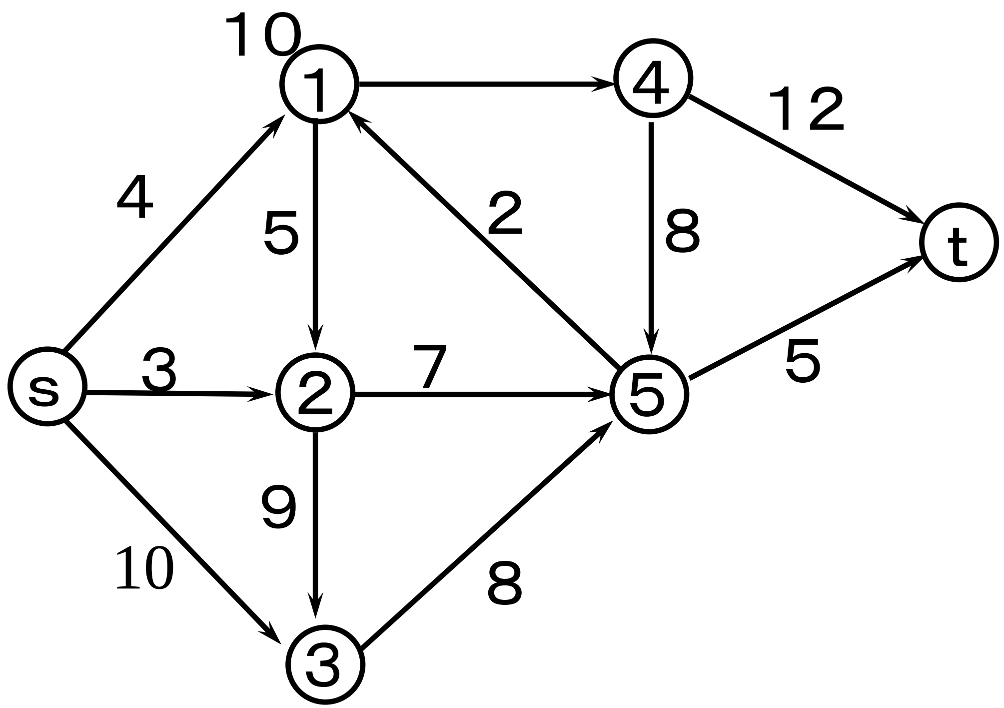
最大フローと最小カットの関係

- **最大フローの流量＝最小カットの容量**
  （最大フロー･最小カット定理）
- 最小カットは最大フロー問題から導出可能
  – 導出概要：容量いっぱいに流れ，始点sと終点tを分割する枝集合→最小カット.

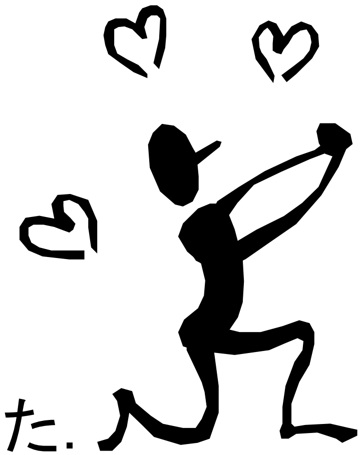
⇒CPMを実行する時の最小カットは最大フロー問題に帰着することにより得られる.

演習 4

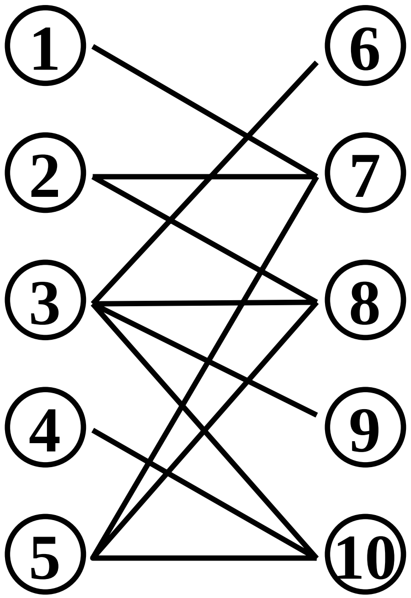
- 最小カットを求めよ



例題3 Shall we dance?



社交ダンスパーティーに男性・女性５人ずつ集まった.
幹事がアンケートをとったところ，パートナーになってもよいとお互い思っているペアは以下の組合せであることがわかった.



男性　　女性

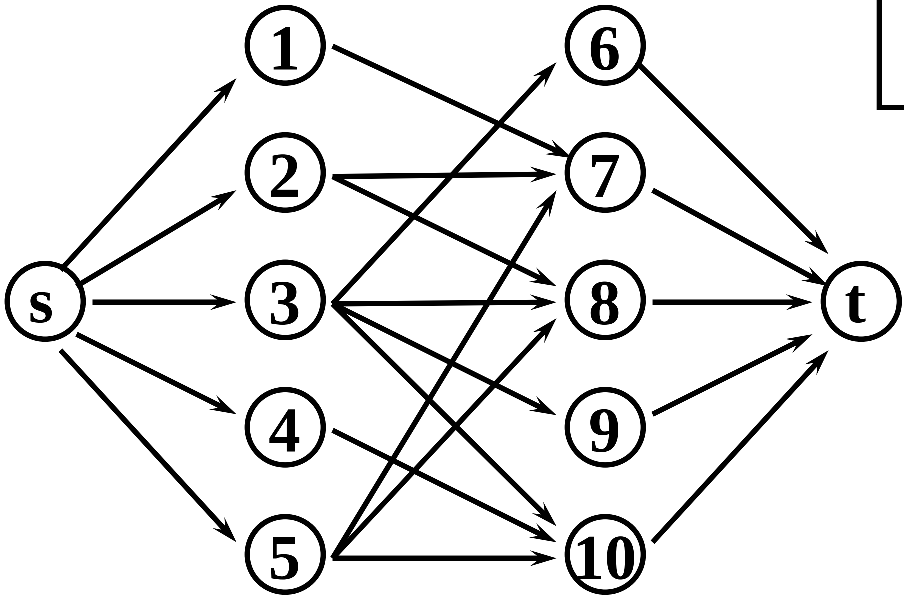
さて，なるべく多くのペアを組みたいが
最大で何組できるか？その組み方は？

同時にペアになれる組合せを
「**マッチング**」，このような問題を
「**マッチング問題**」とよぶ.

マッチング問題の解法

以下のように変形し最大フローを求める.

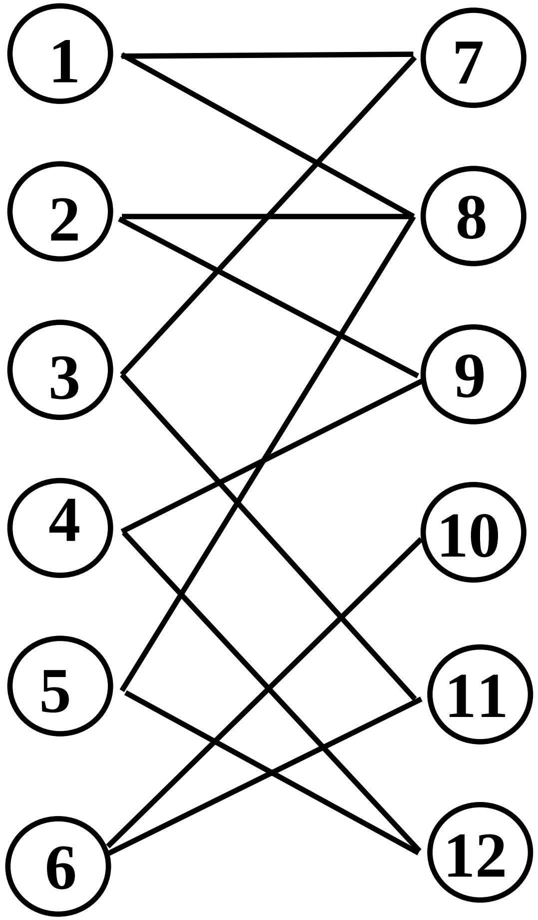
演習5
求めてみよう！



各枝の容量はすべて1

- 「フローが流れている元の枝⇔マッチング」⇦なぜか？
- 「最大フロー⇔最大マッチング」⇦なぜか？

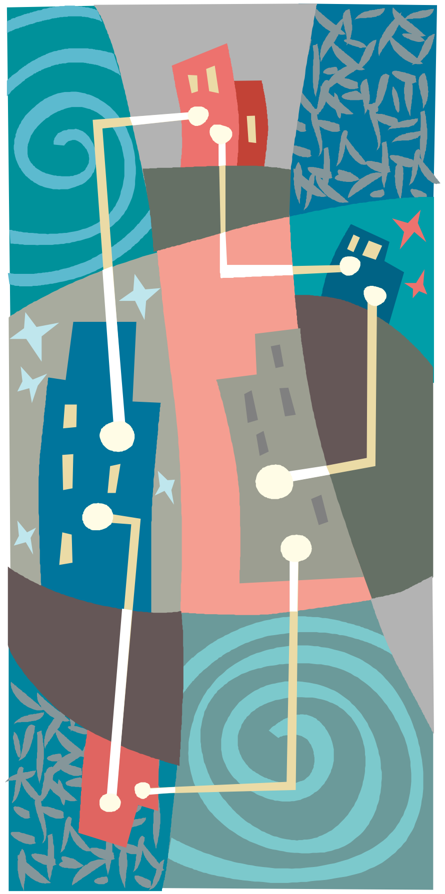
演習6 最大マッチングを求めよう



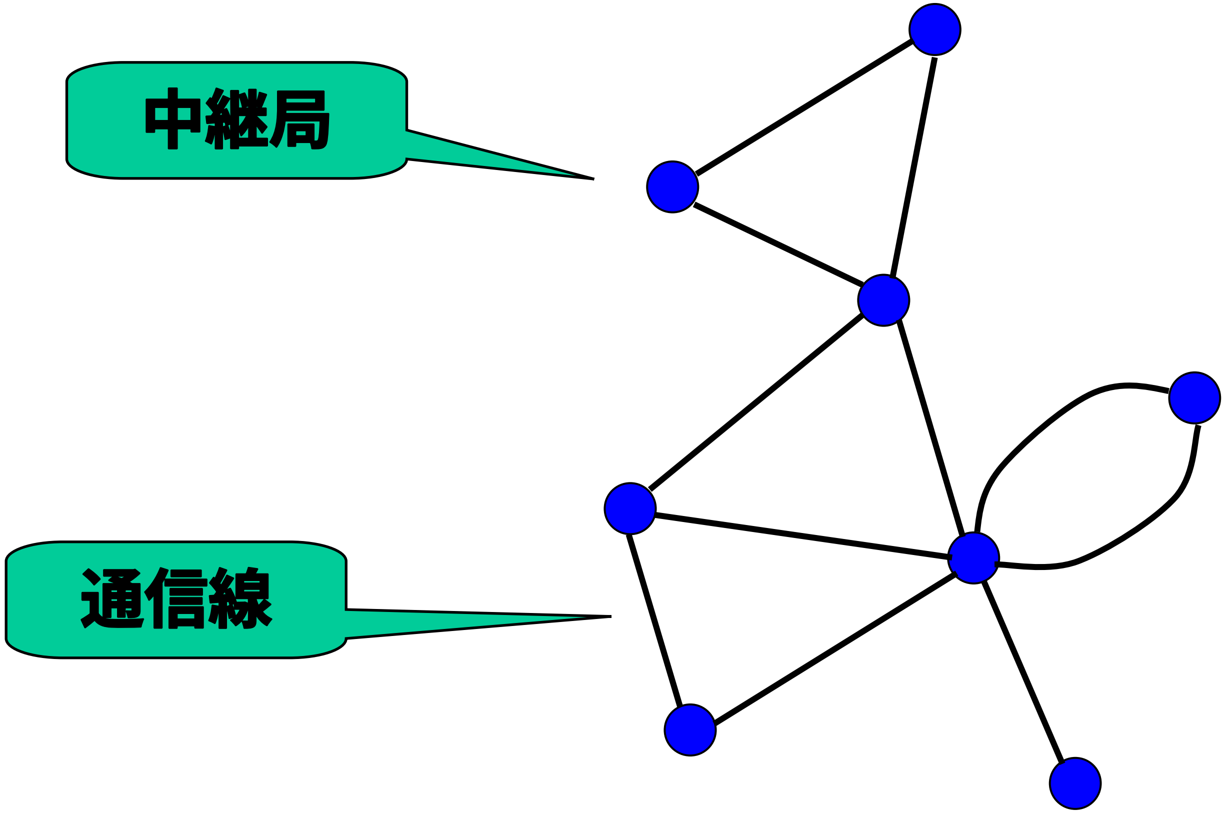
寄り道　グラフの構造を分析する

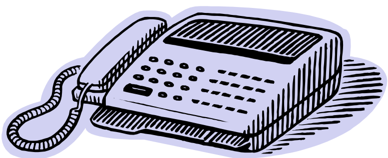
- グラフの「おおまかな」性質を知りたい

- グラフで表現されたシステムの解析に利用



例題4　故障して困る局はどこ？

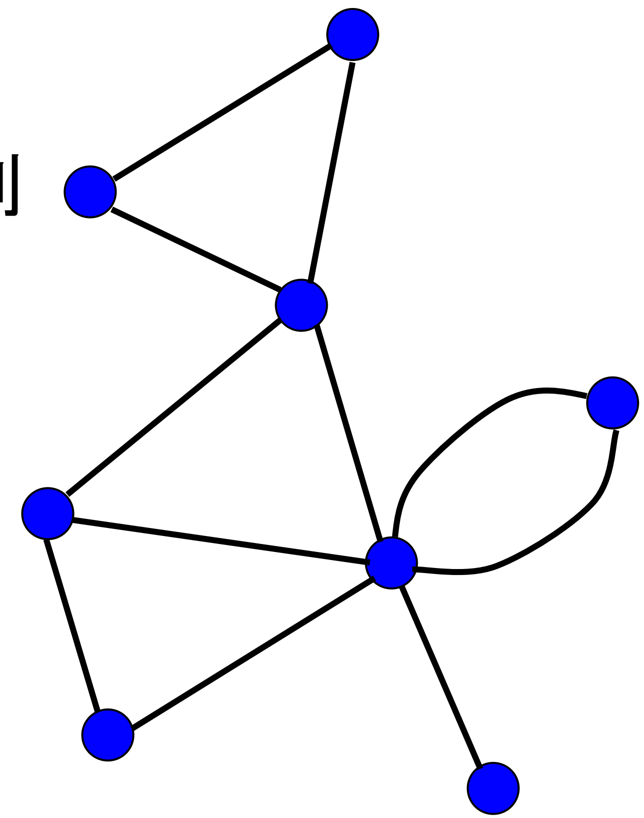




グラフの分解

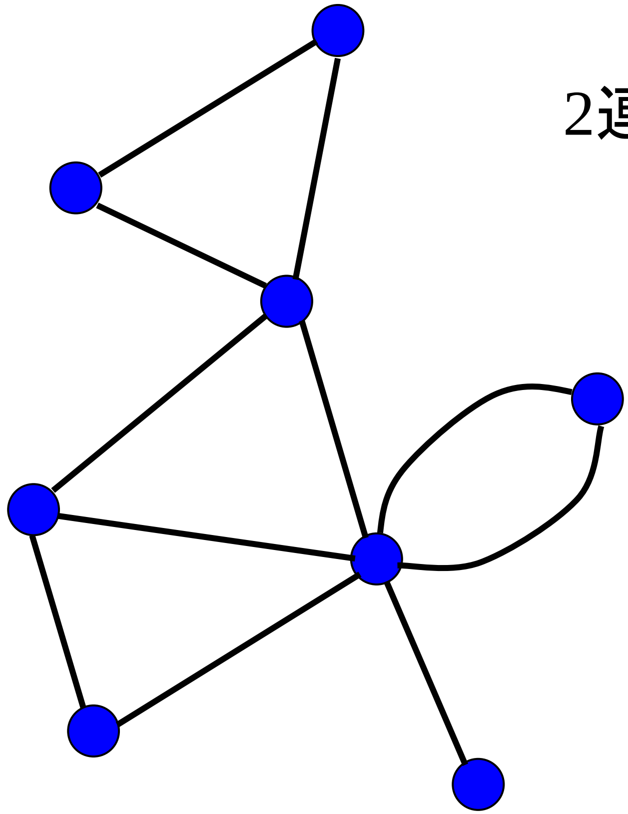
表現されているシステムの解析に利用

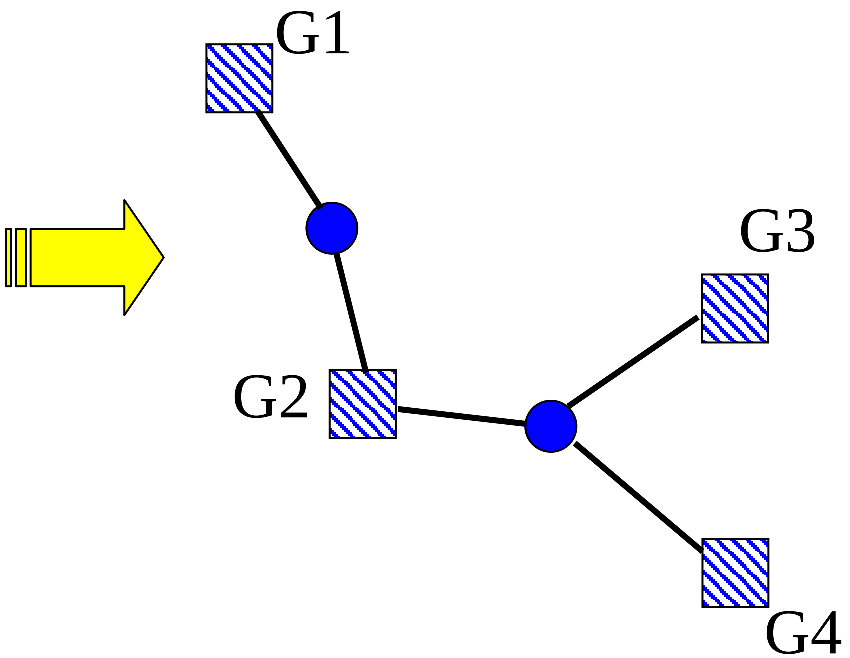
- 道(path):接続する点と枝の交互列
- 無向グラフが連結
  ⇔任意の2点間に道が存在
- 点vは関節点
  ⇔連結なグラフから点vを除くと
  非連結になる
- 無向グラフが2連結
  ⇔関節点がないグラフ



無向グラフの2連結成分分解

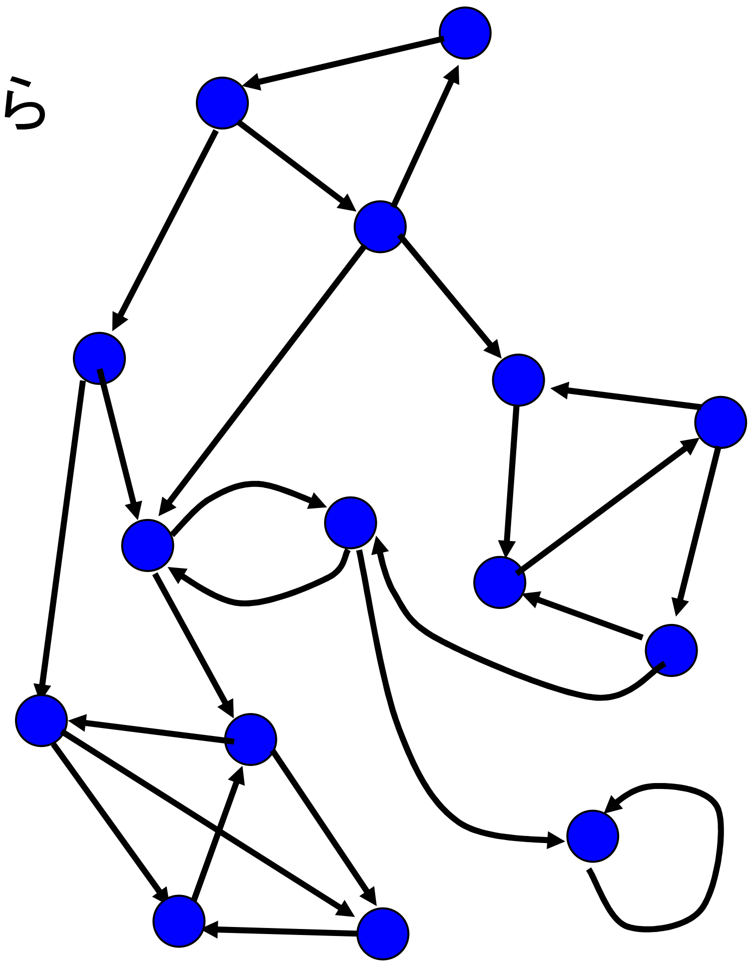
2連結成分：2連結な極大部分グラフ



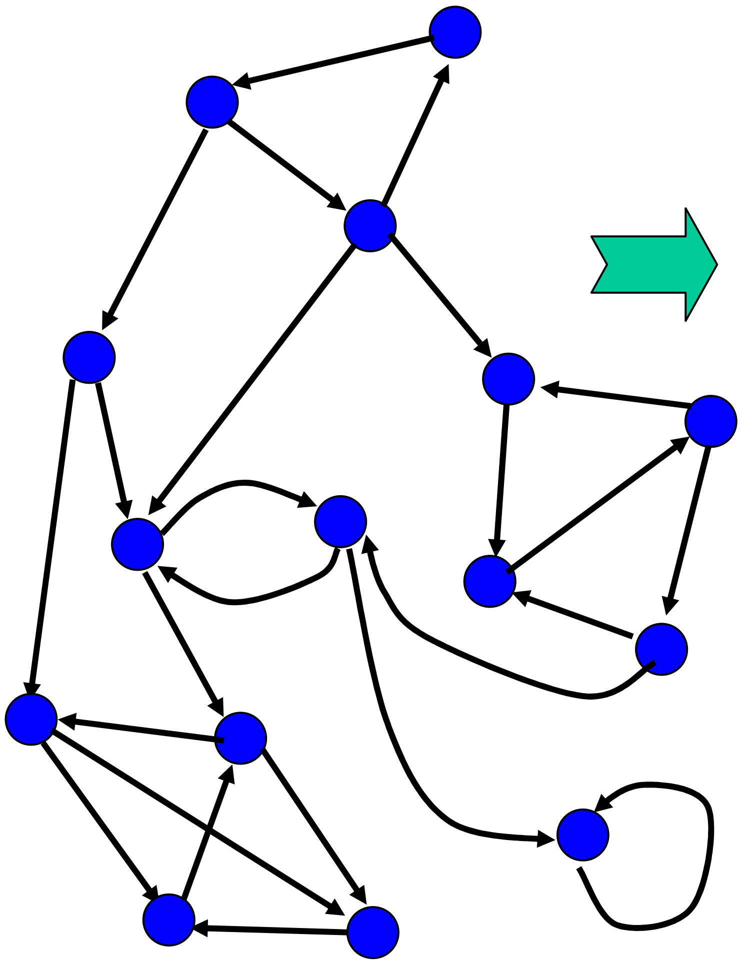


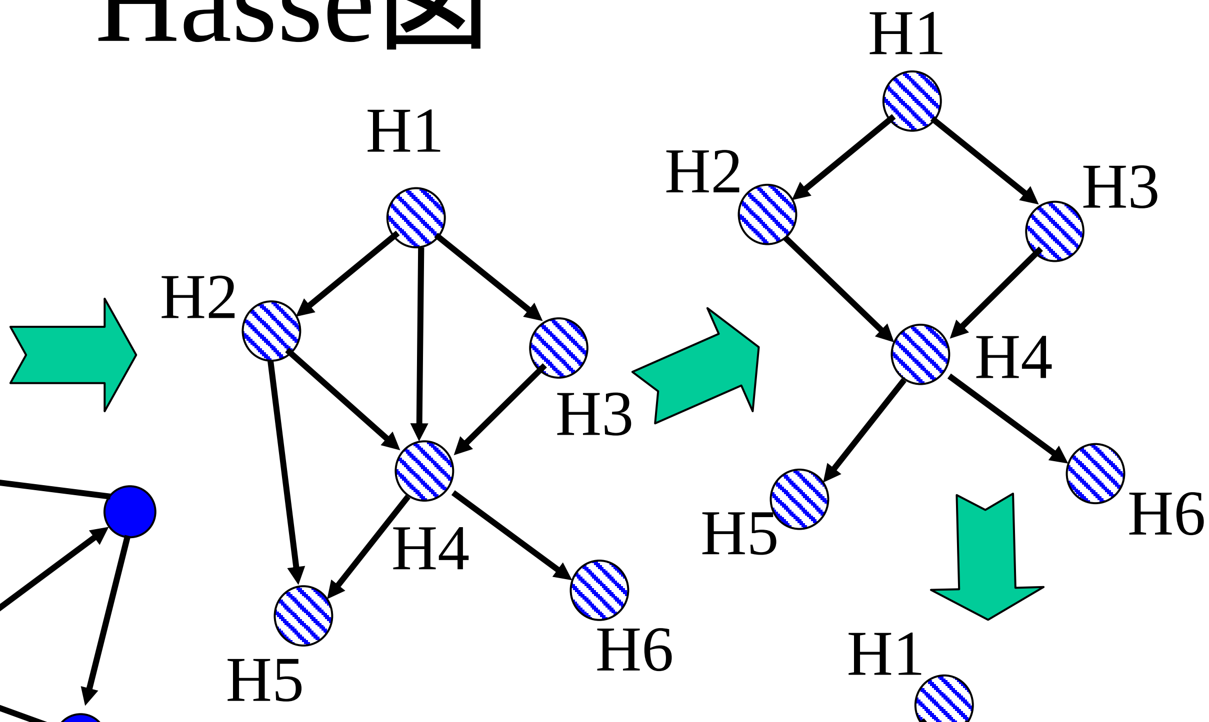
有向グラフの強連結成分分解

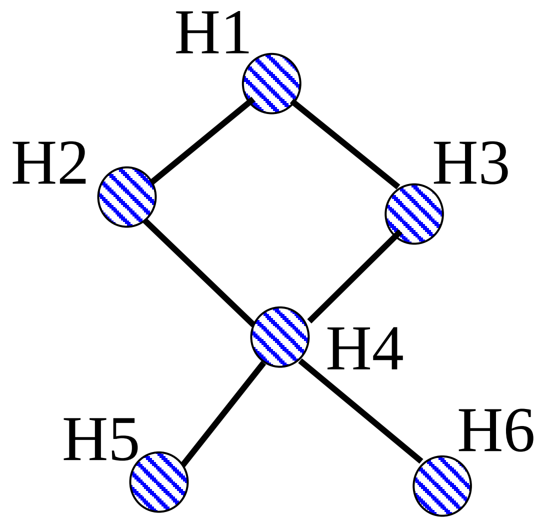
- 有向道：すべて同じ向きの枝からできている道
- 有向グラフが強連結
  ⇔任意の2点間に両方向の有向道が存在
- 強連結成分
  ⇔強連結な極大部分グラフ



Hasse図



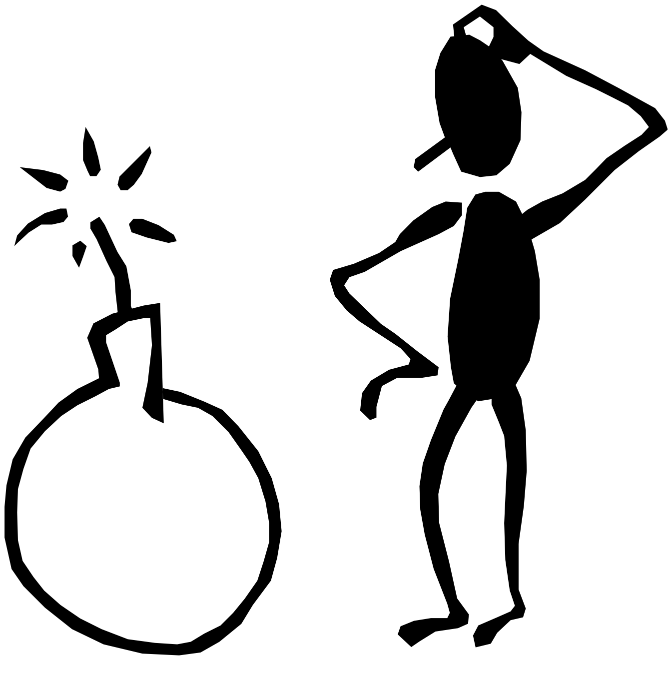




システムの
半順序関係を
示している

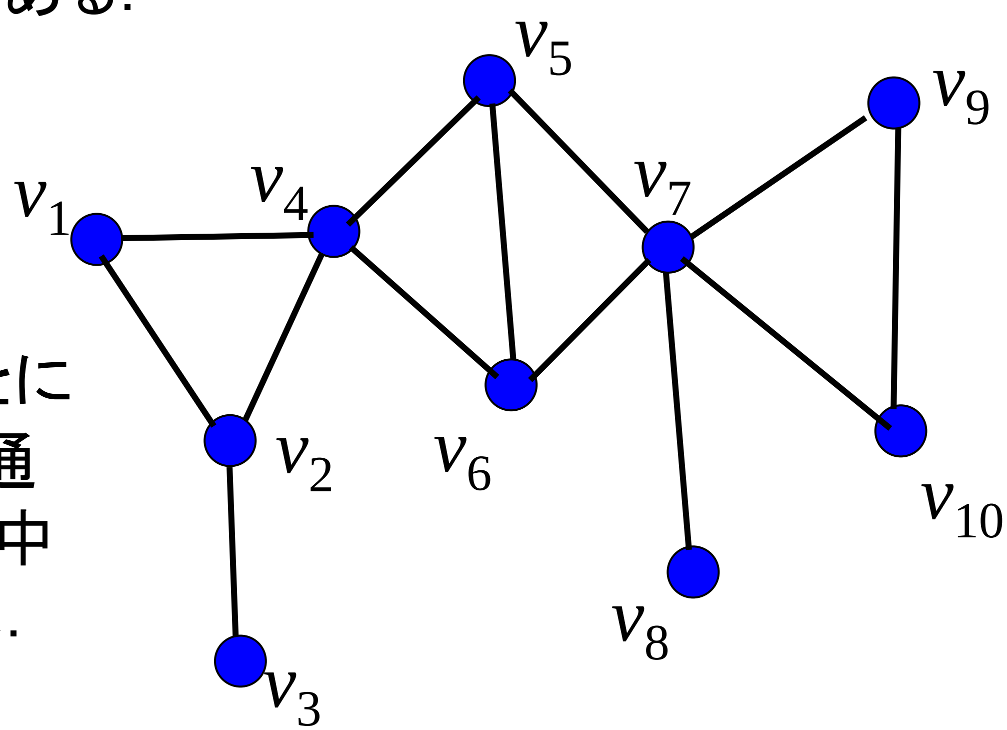
2連結成分，強連結成分の求め方

- 2連結成分分解，強連結成分分解共に，深さ優先探索を利用し可能
  - より効率的な解法を作ってみよう!!



演習7 2連結成分分解

右図のような通信網がある.
点は中継局を示す.



(1) 機能が停止することにより, 他の中継局間の通信にまで影響を及ぼす中継局はどれか指摘せよ.

(2) 通信の信頼性を高めるためには新たにどのような線をどこに引けばよいか. 適切な設置計画を提案せよ.

演習8 強連結成分分解

右の有向グラフの
Hasse図を作成しなさい