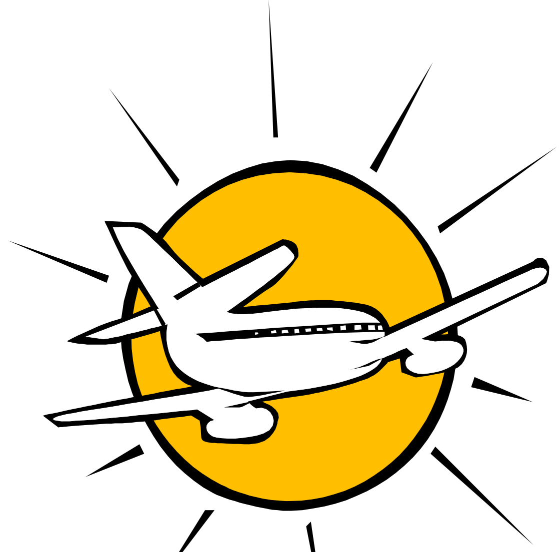


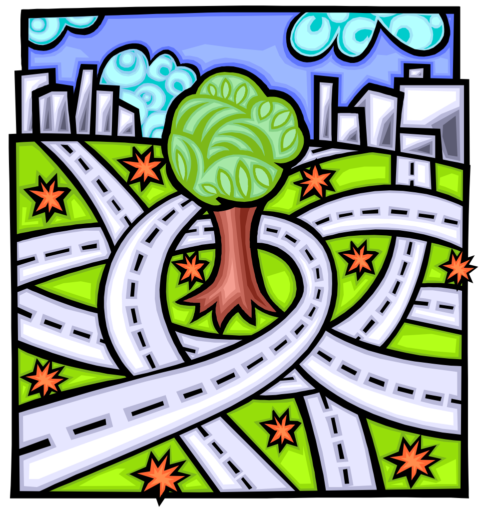
Network Programming III

ものをなるべく多く流す
最大フロー問題

ネットワーク上に“モノ”を流す

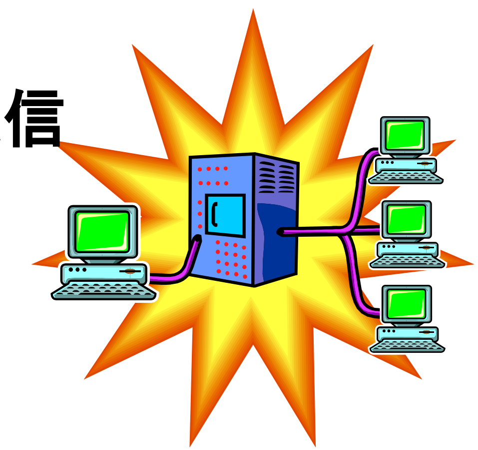
配送

道路

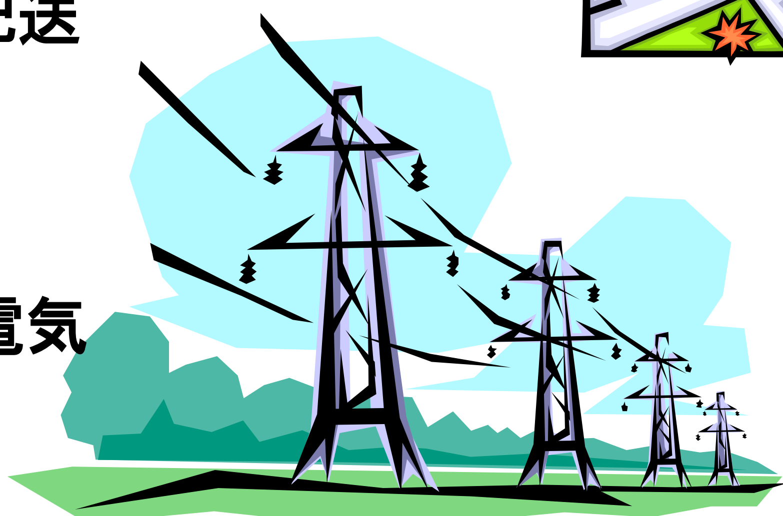


パイプライン

通信



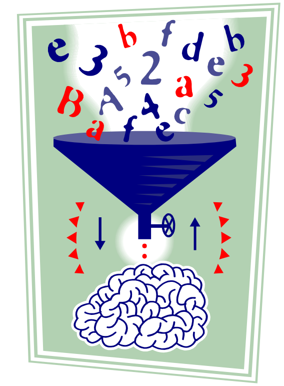
電気



モデル化

- グラフ＋容量＝ネットワーク
- フロー(流れ)

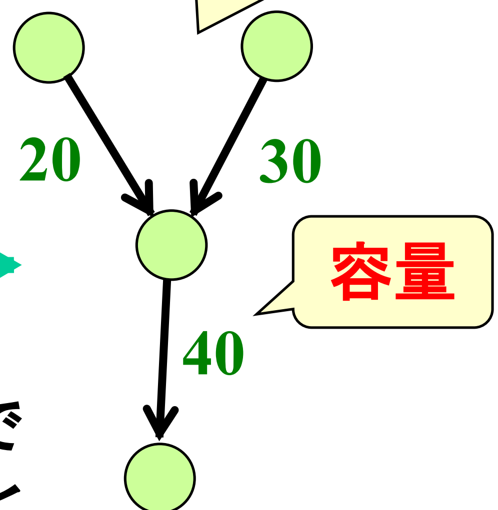
モノの流れのモデル化



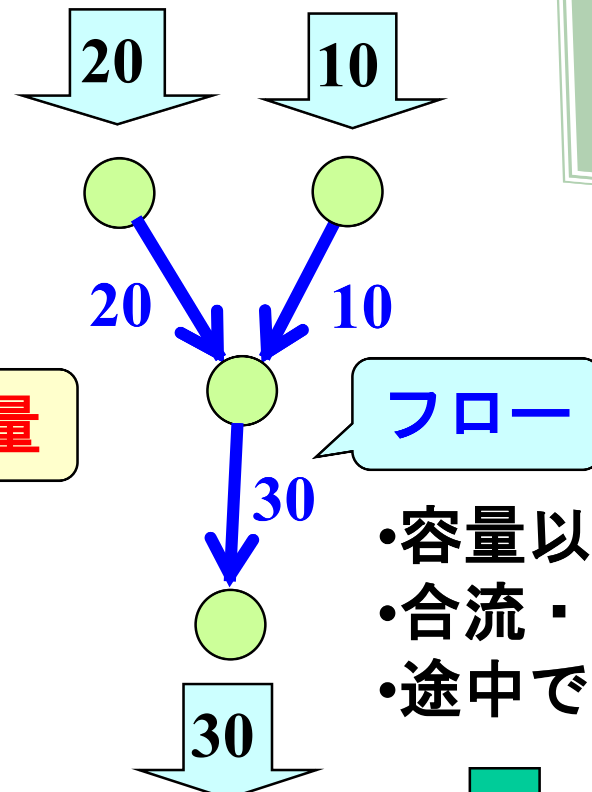
流れる量には限界が有る

各枝に容量情報を追加

舞台をグラフでモデル化



ネットワーク



- 容量以内
- 合流・分岐可
- 途中で増減無

流れを数字でモデル化

最適なフローの制御方法は?

ネットワークフロー計画問題

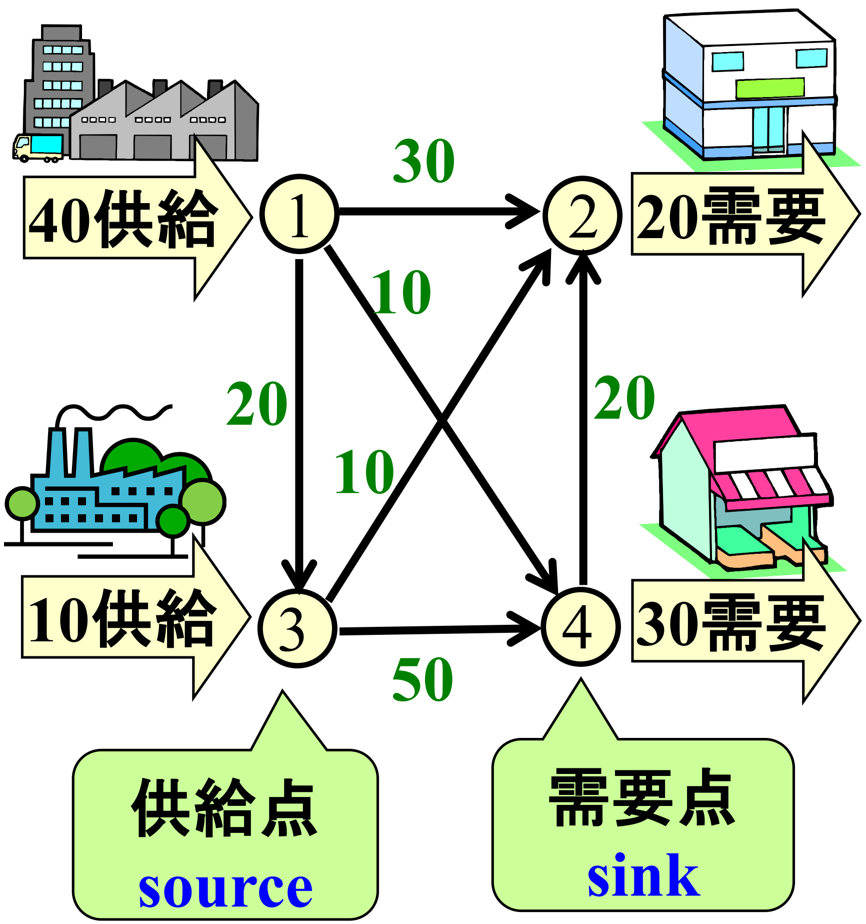
2端子ネットワーク

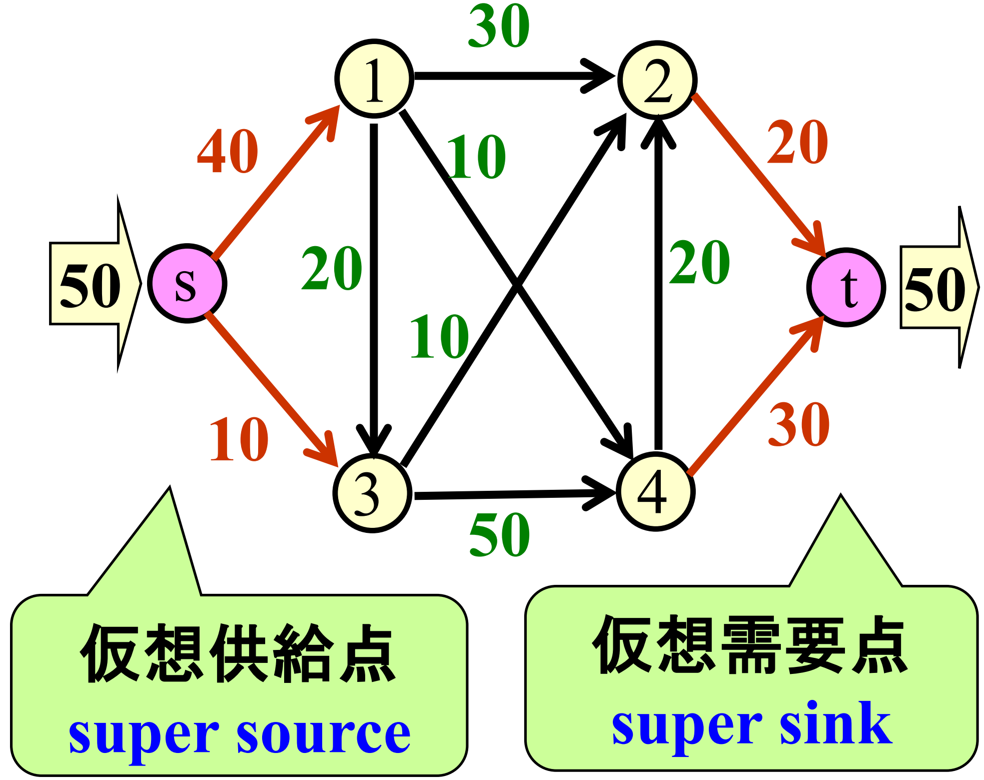
モノの流れをモデル化したネットワーク

変換 2端子ネットワーク

需要・供給点が各1つ

仮定 (総供給量)＝(総需要量)





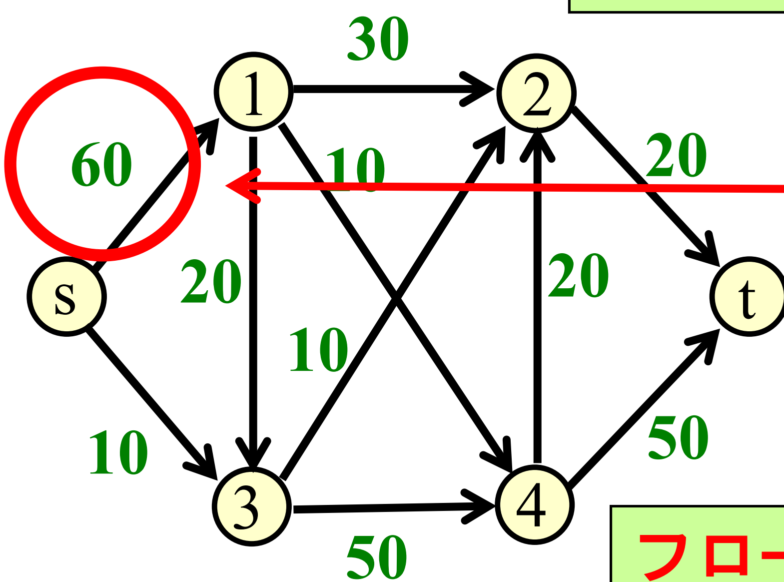
フロー

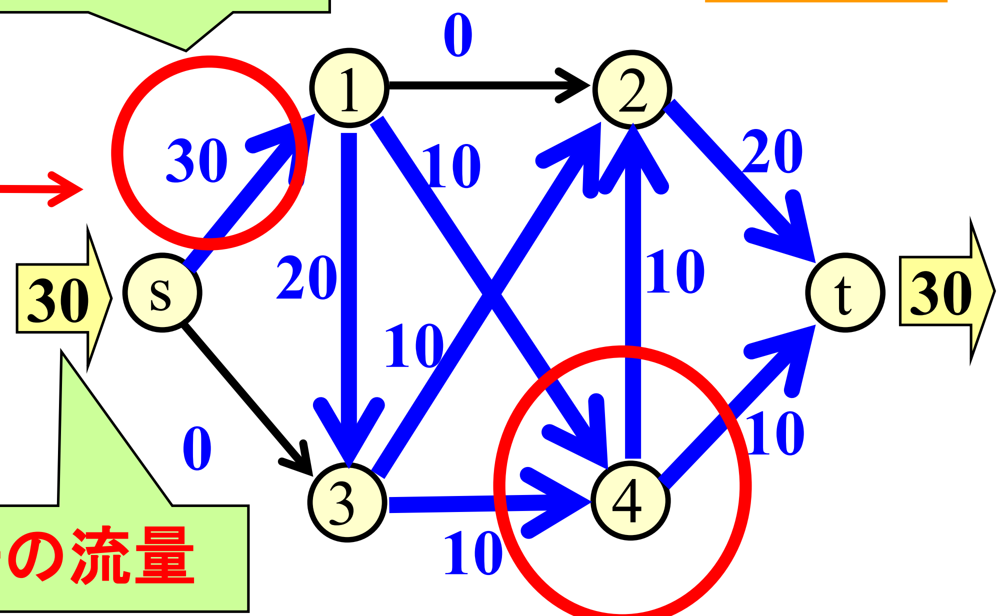
容量条件と流量保存条件の両方を満たす枝に付いた数字

ネットワーク

容量条件
フローは容量以下

フロー





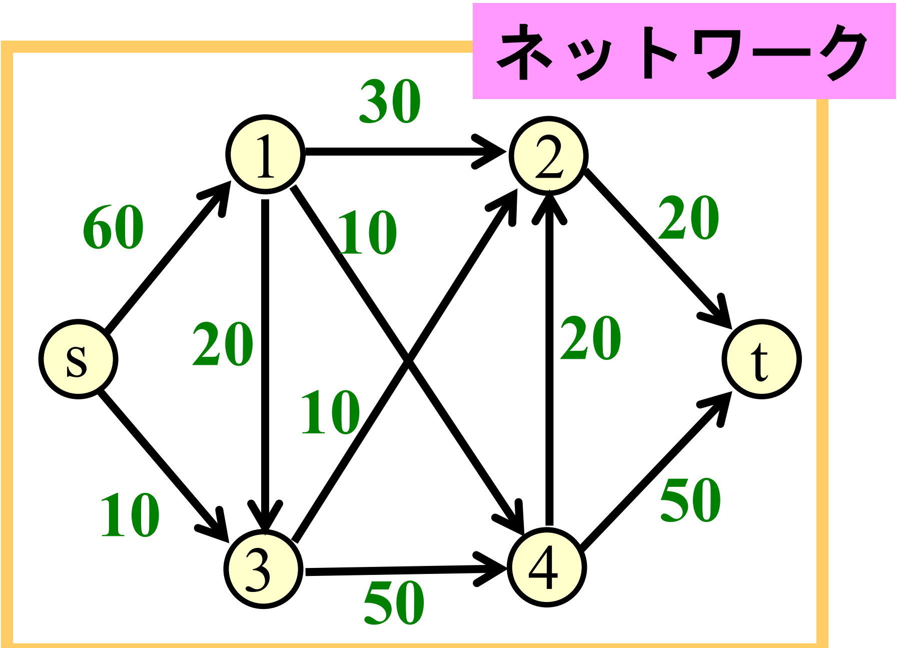
フローの流量

流量保存条件
s,t以外の全点で,
(流入フロー合計)＝(流出フロー合計)

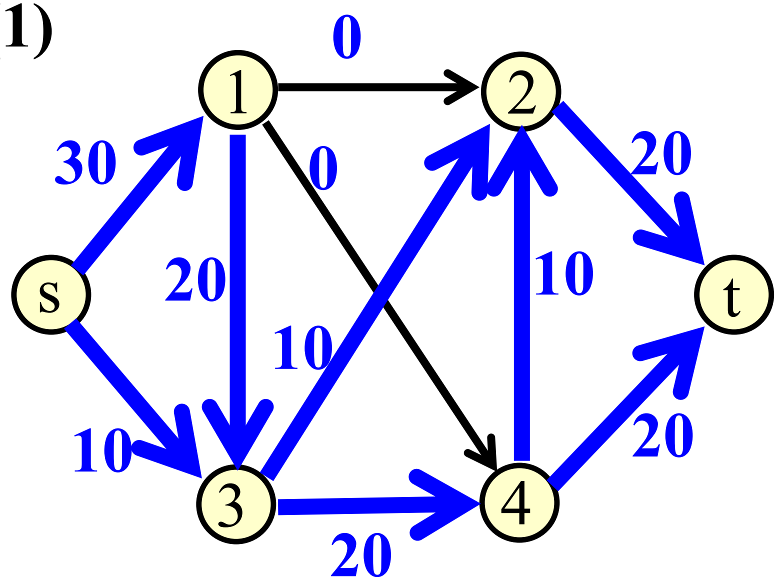
一般化
フロー

条件緩和
多少増減可

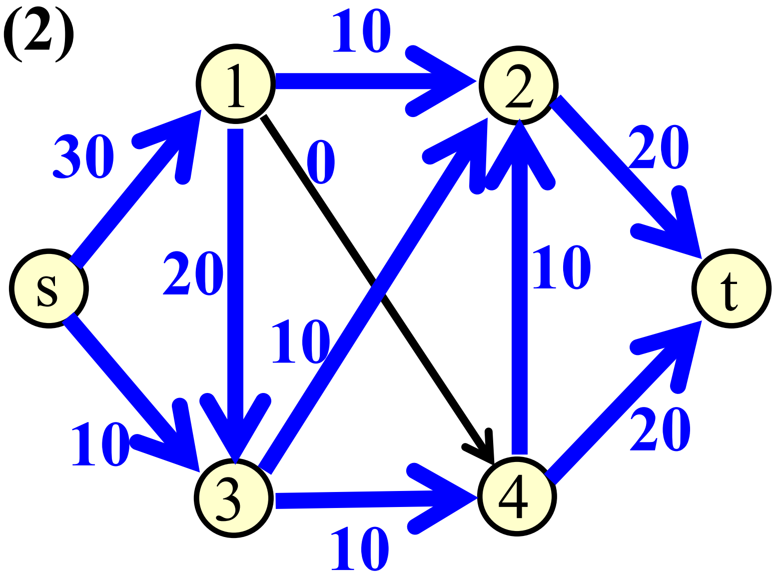
練習 フローはどれ?



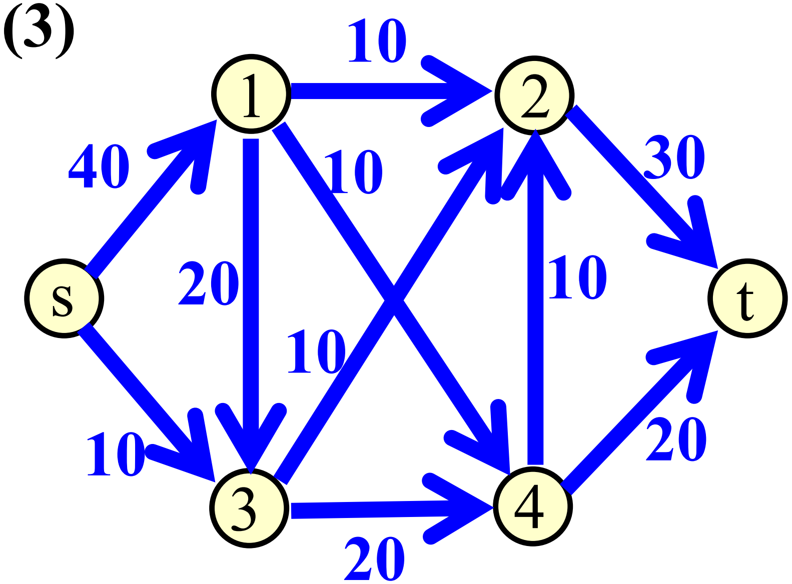
(1)



(2)

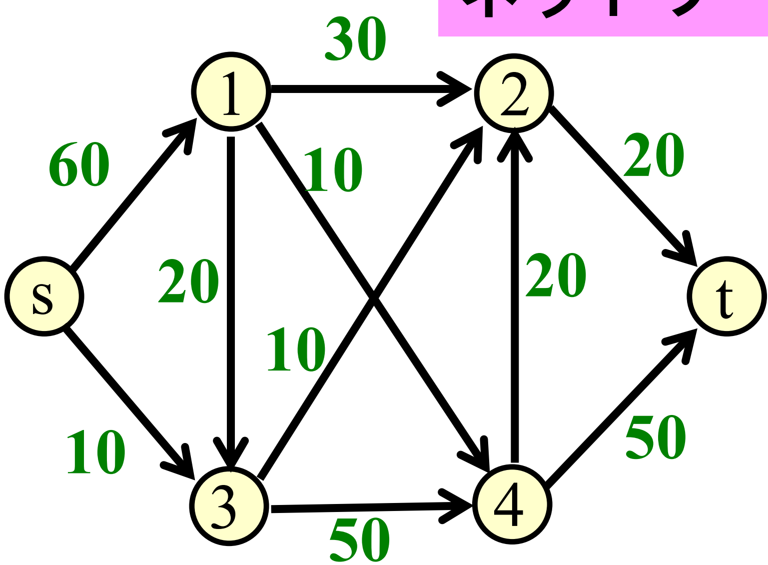


(3)

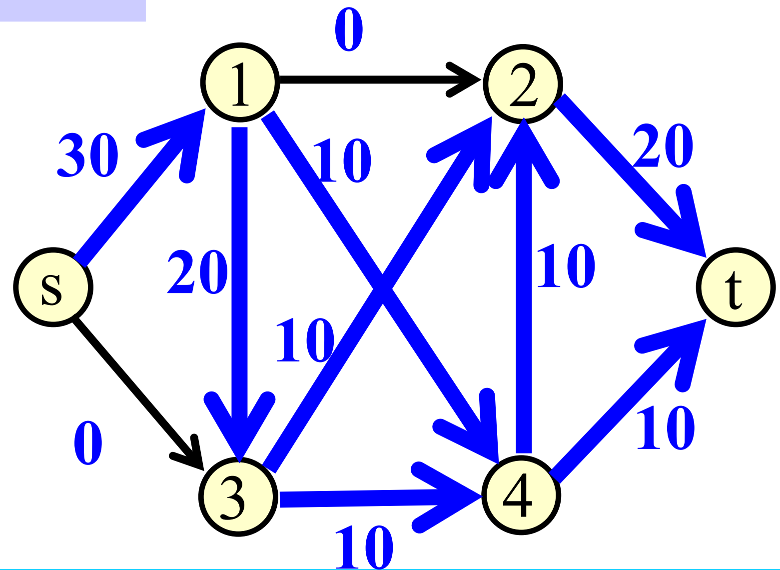


容量とフローを同時に表現するアイディア

ネットワーク

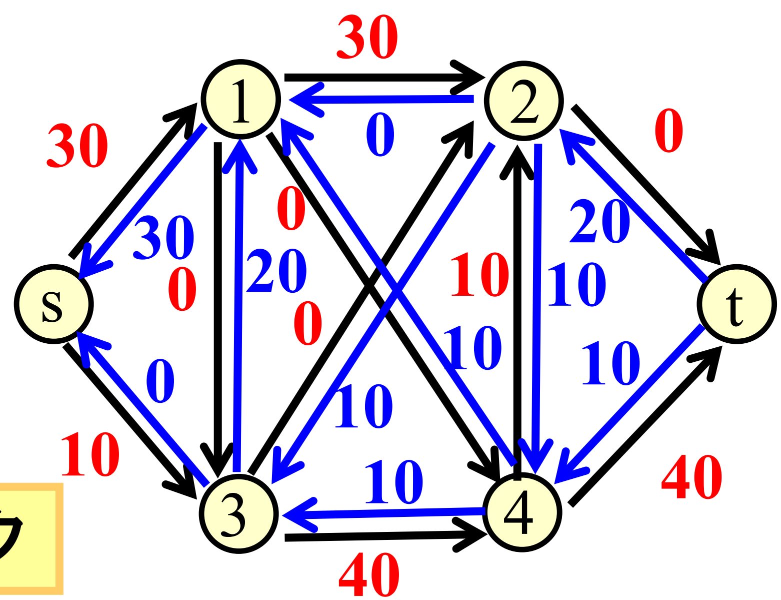


フロー



残りの容量は?

フローは?

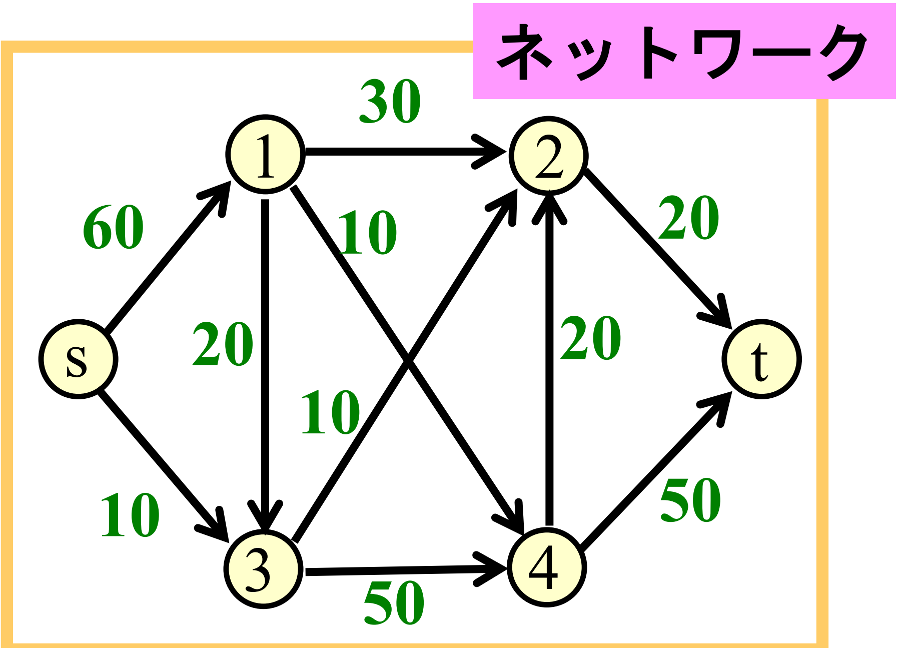


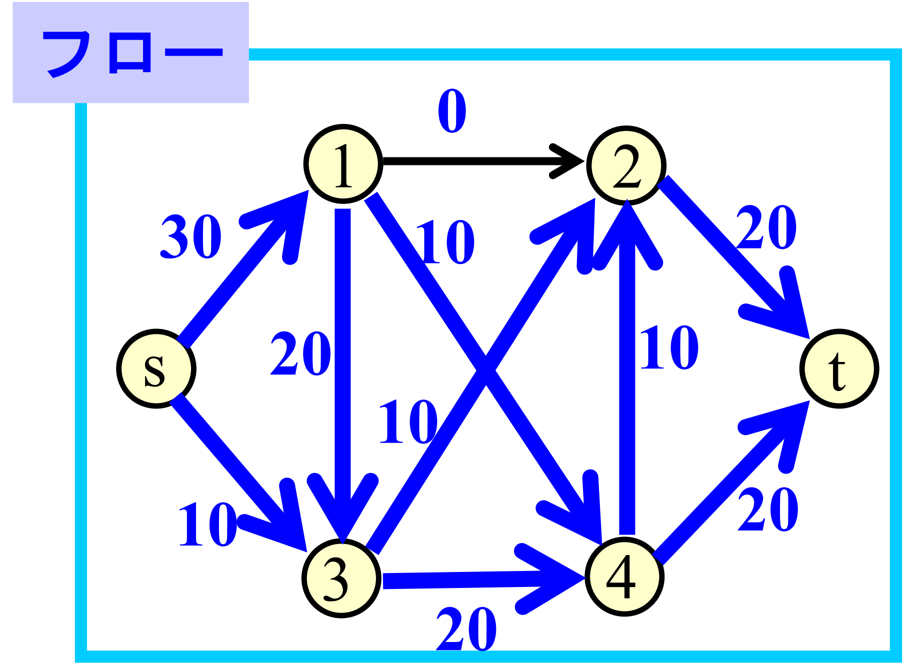
逆向き枝で表現

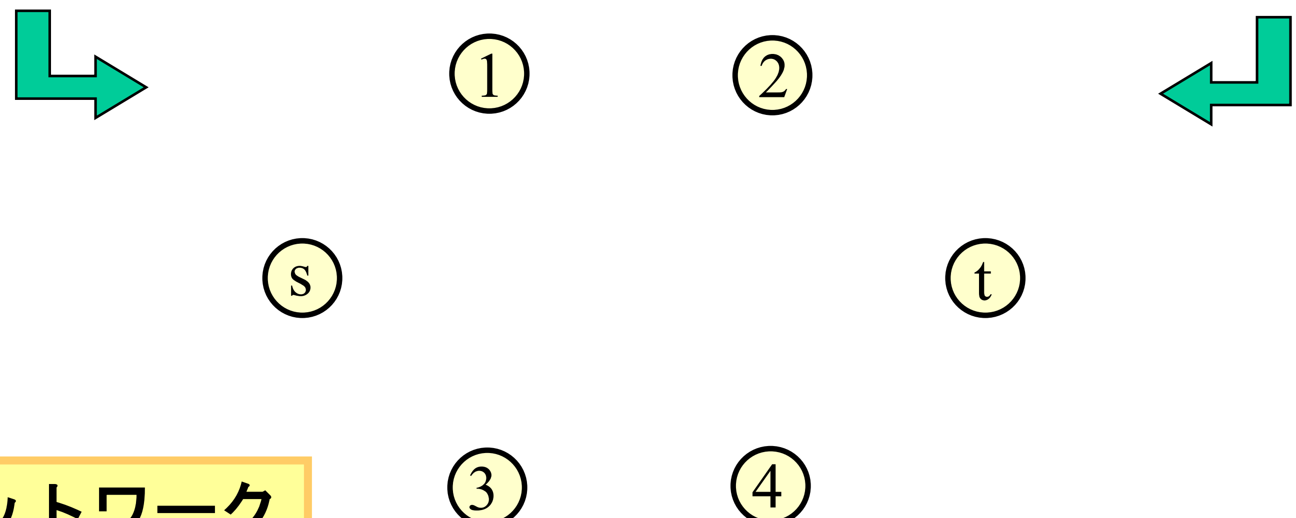
残余ネットワーク

0の枝は省略

練習 残余ネットワークで表現してみよう

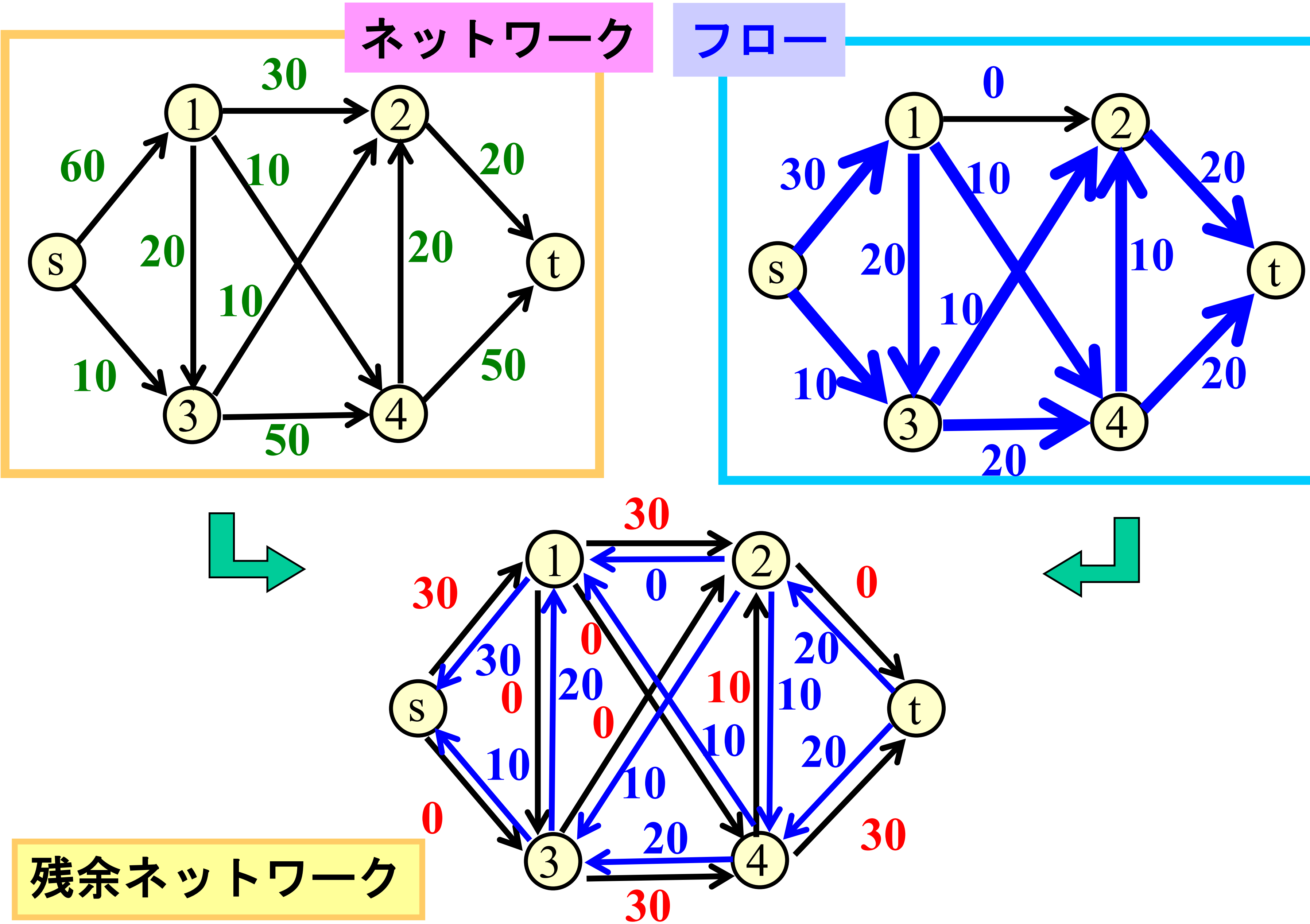






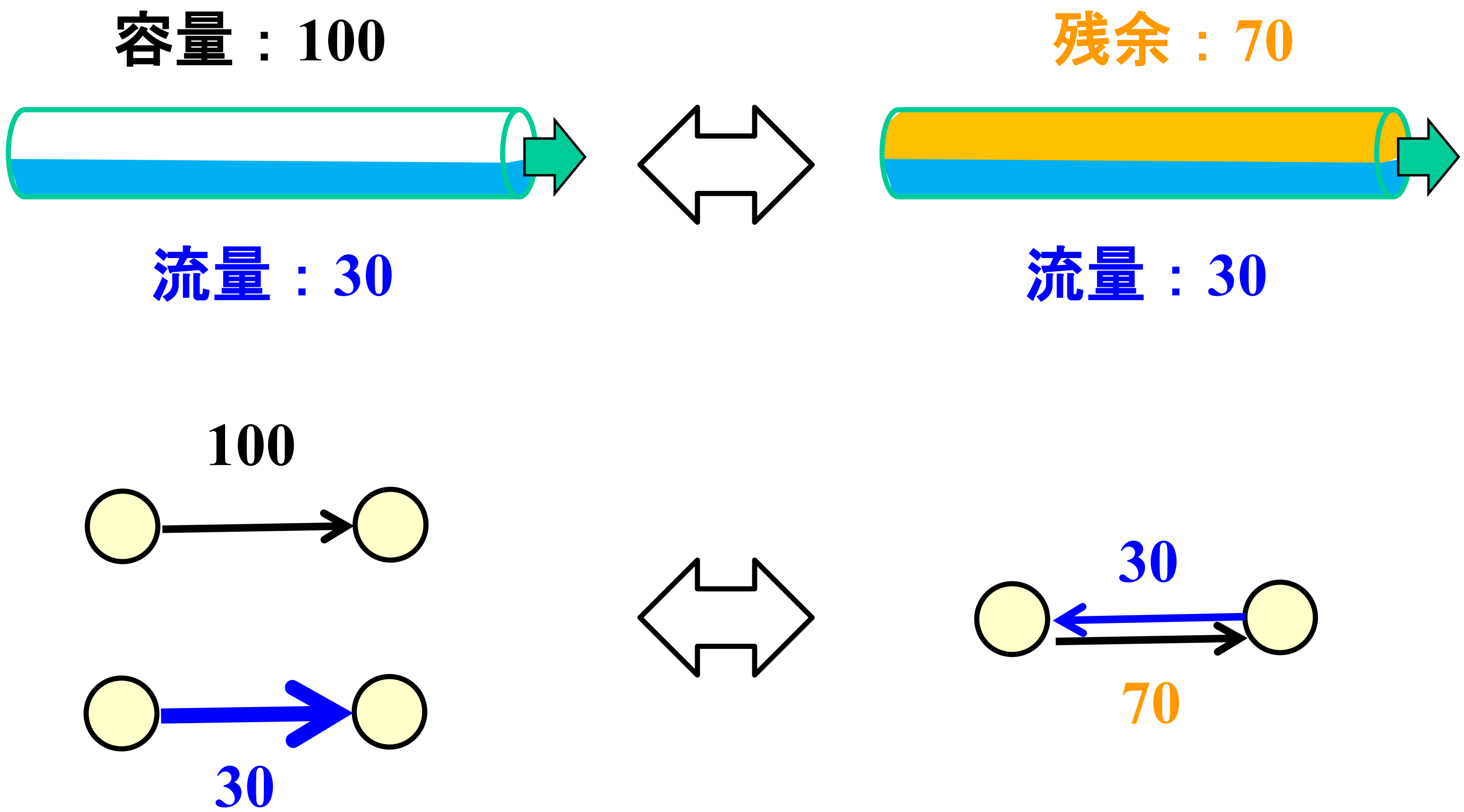
残余ネットワーク

練習 解答例

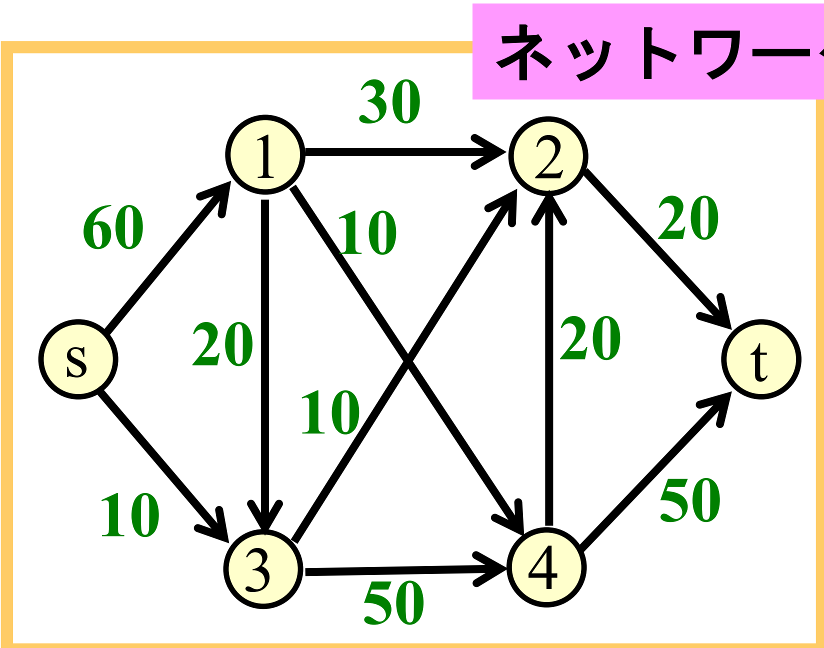


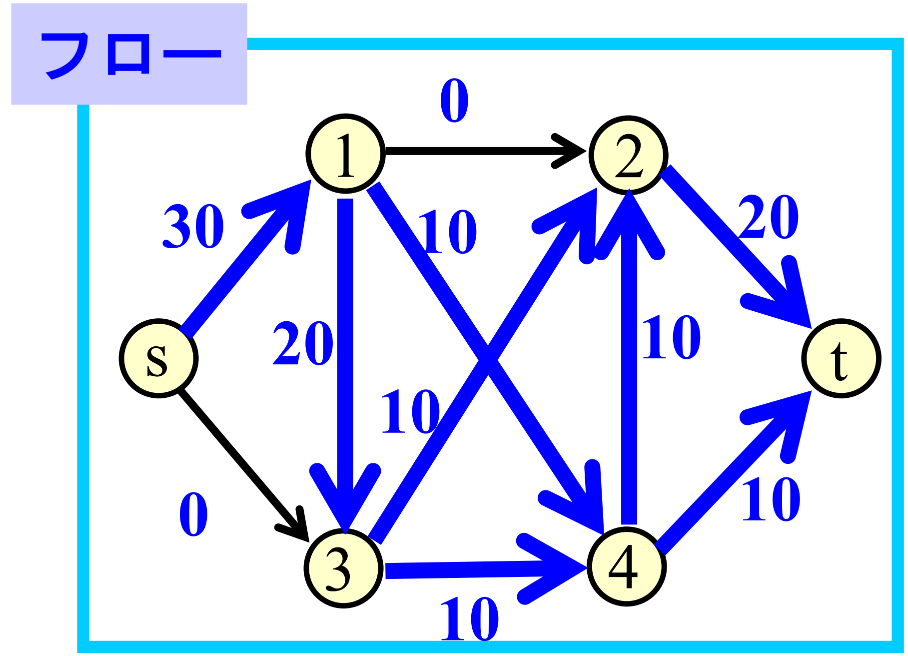
ネットワーク
30
60
10
20
20
10
20
10
50
50
フロー
0
30
10
20
20
10
10
10
20
20
残余ネットワーク
30
30
0
0
30
0
20
0
0
10
10
20
10
10
20
0
10
20
30
30

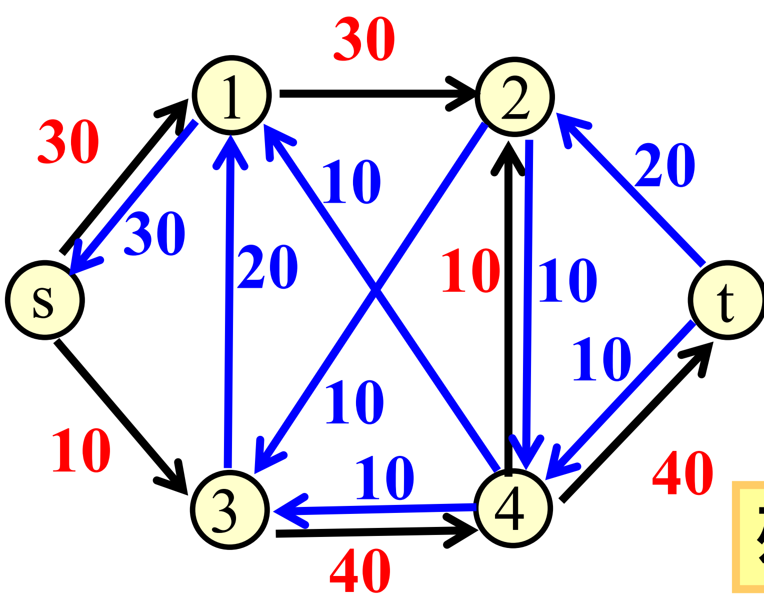
残余ネットワーク表現のイメージ



残余ネットワーク表現の利点







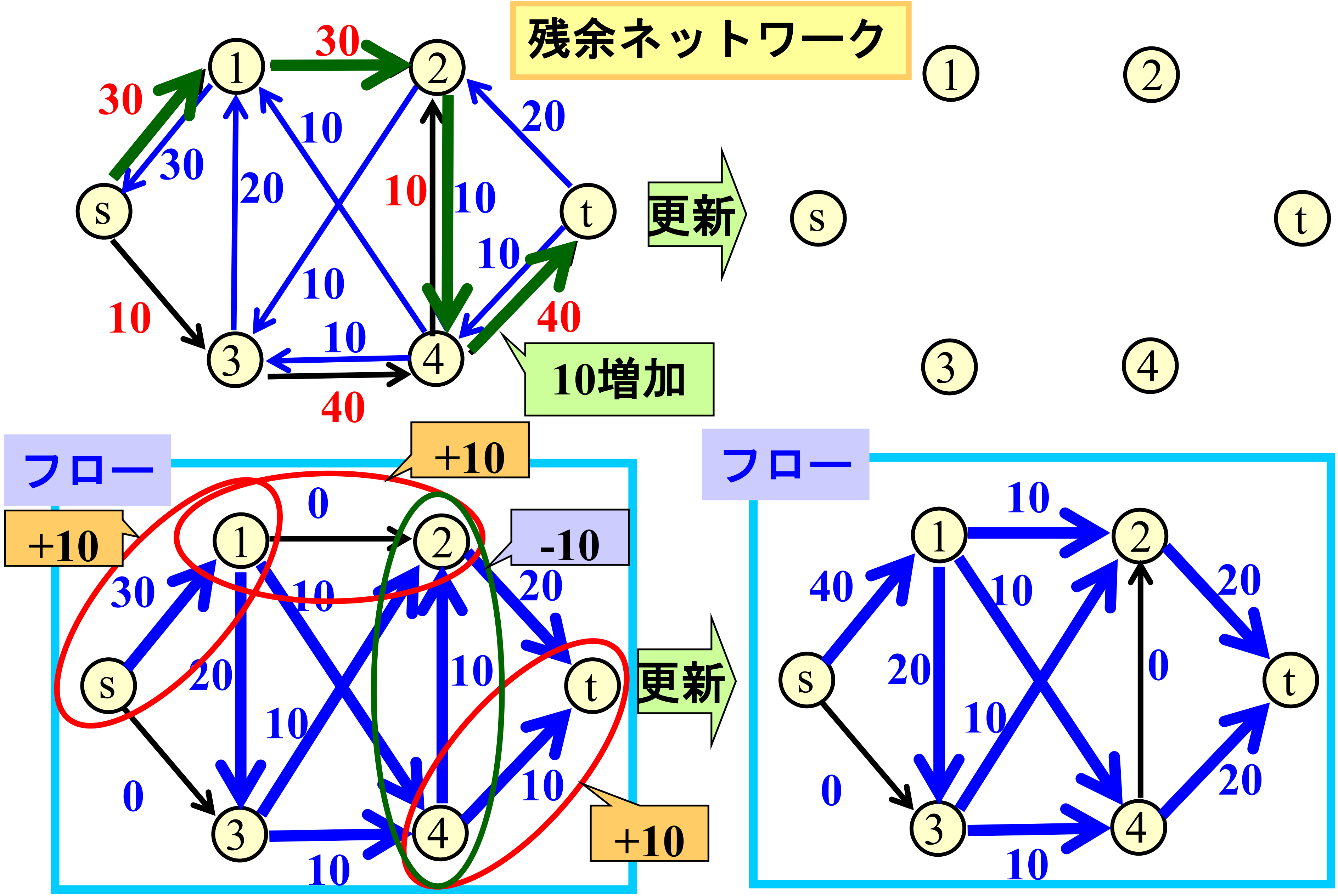
質問：フローの流量を
増やす余地がある?

sからtへパスがある
⇔余地がある

探索で
発見可

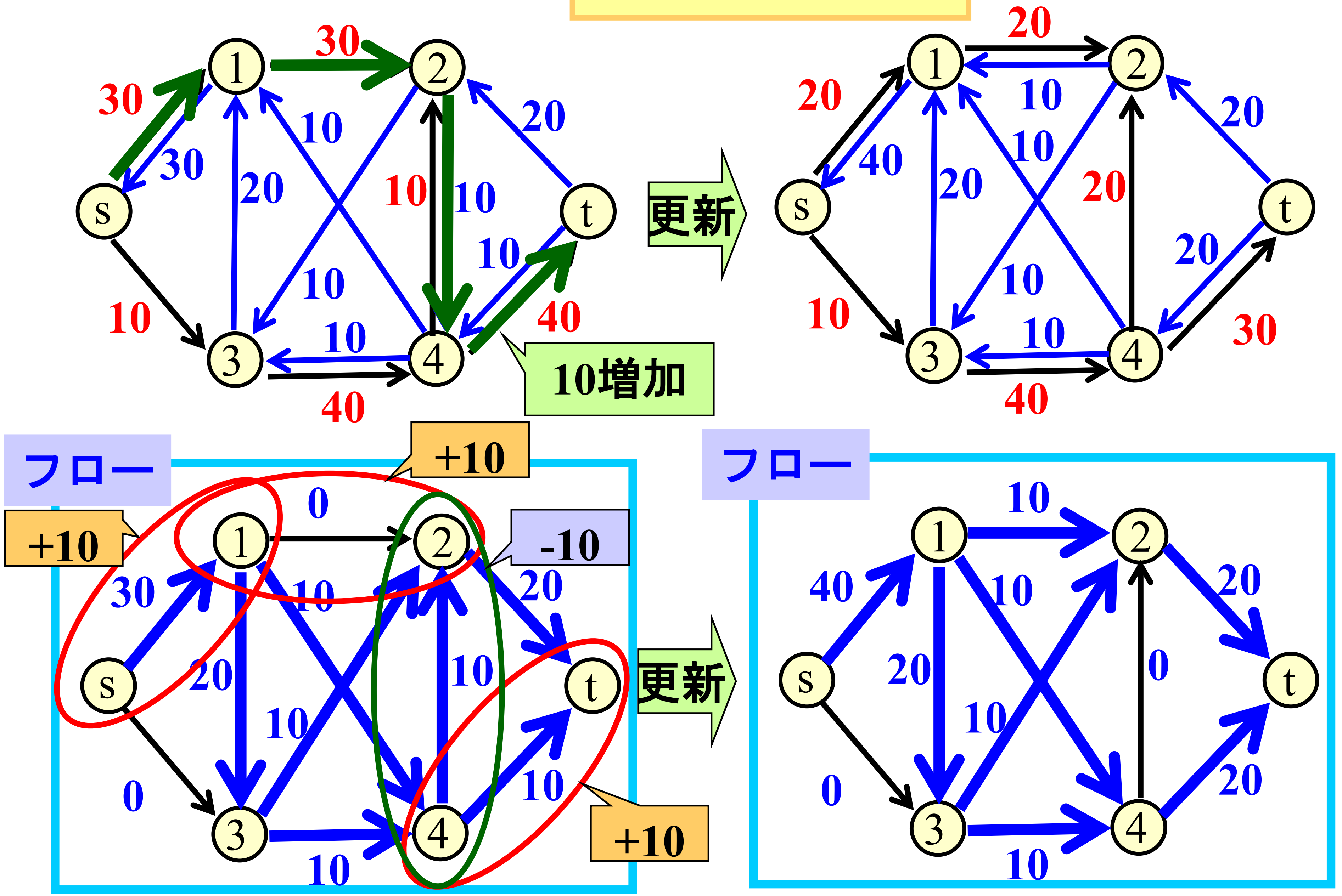
残余ネットワーク

練習 残余ネットワーク上でのフローの変化



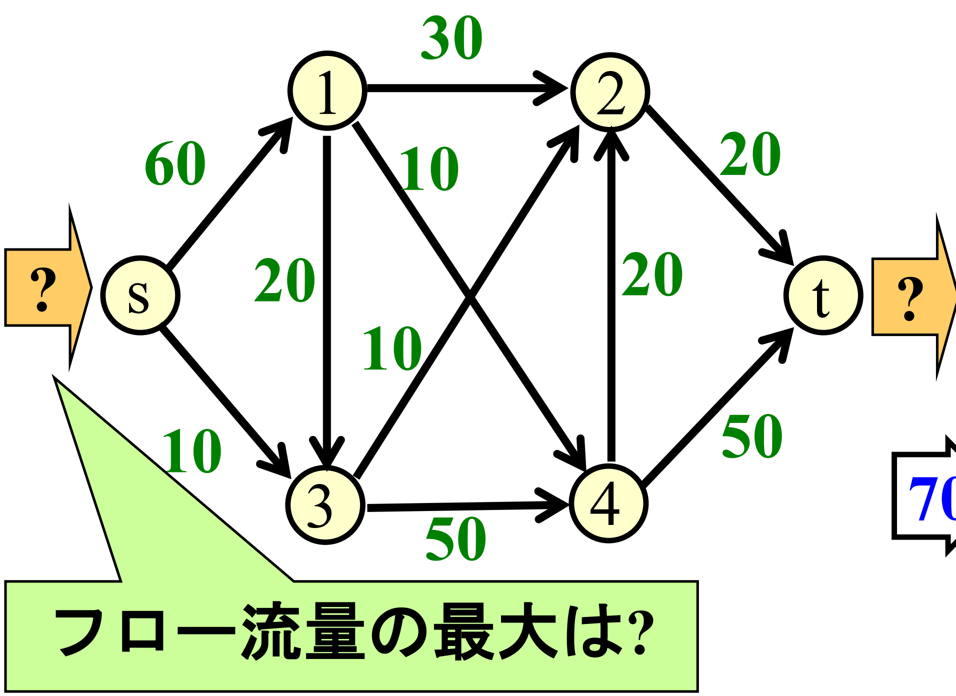
練習 解答例

残余ネットワーク



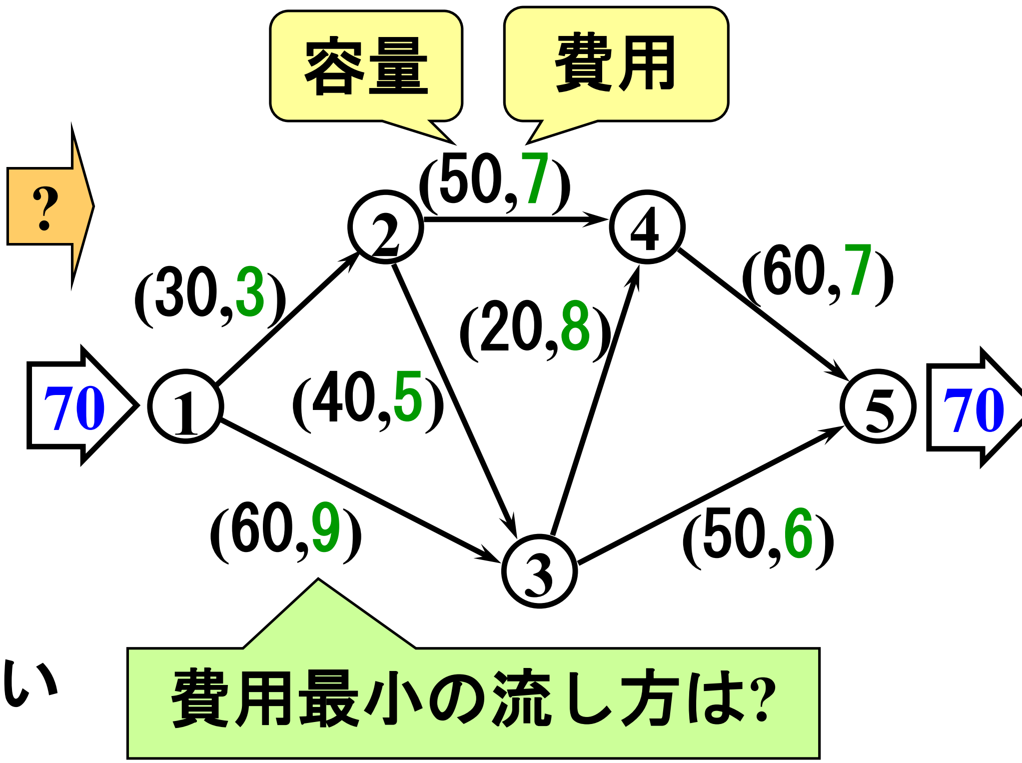
フローに関する基本的な最適化問題

最大フロー問題



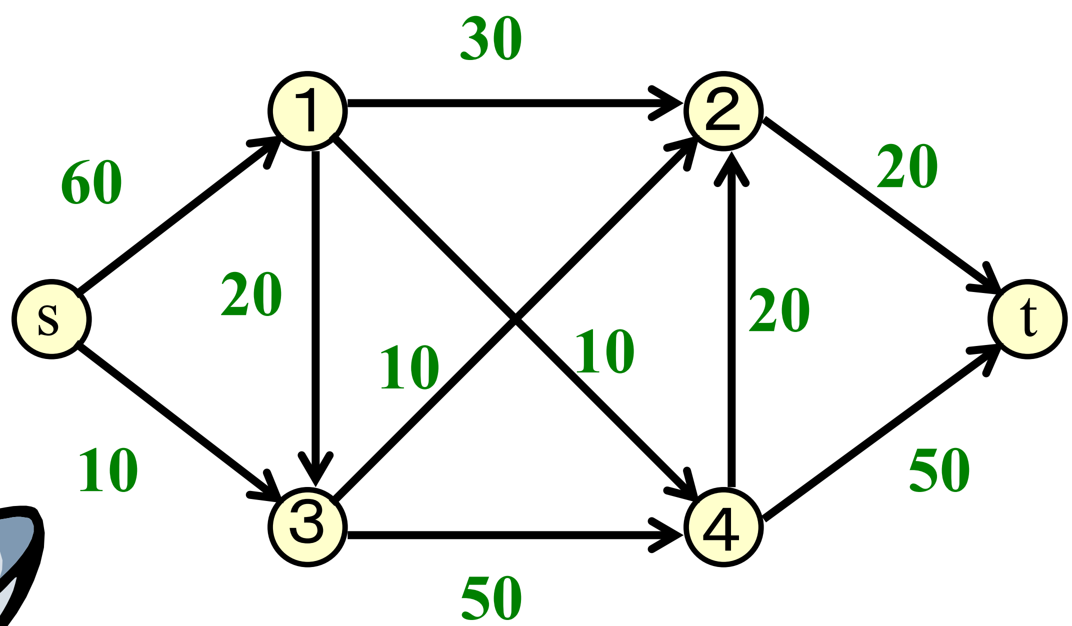
ネットワークの能力を計りたい

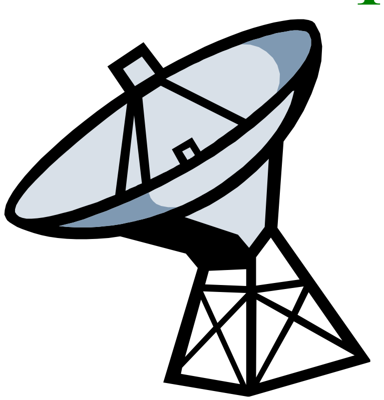
最小費用フロー問題



例題1 最大フロー問題

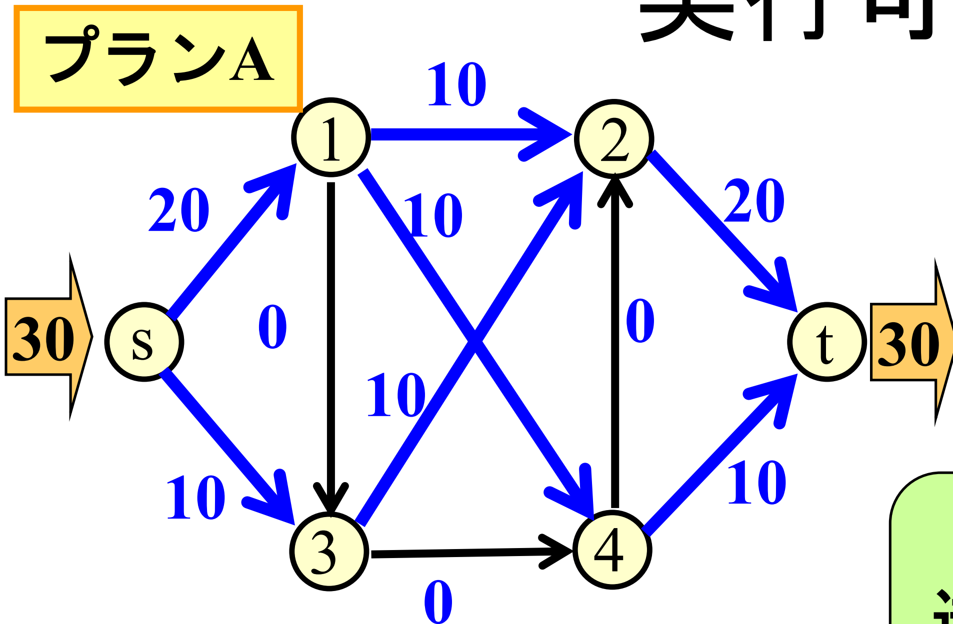
通信所sからtまで同時に送信できる最大データ量は？

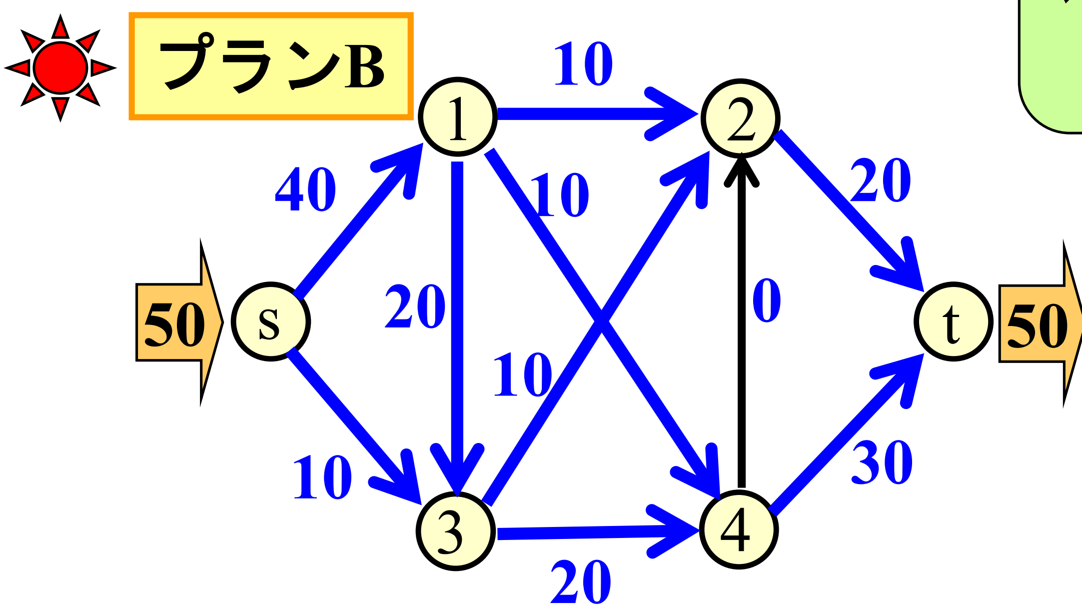




各枝の数字:送信可能容量

実行可能な通信計画





どちらが
送信データ
が多い？

最大フロー問題(定式化)

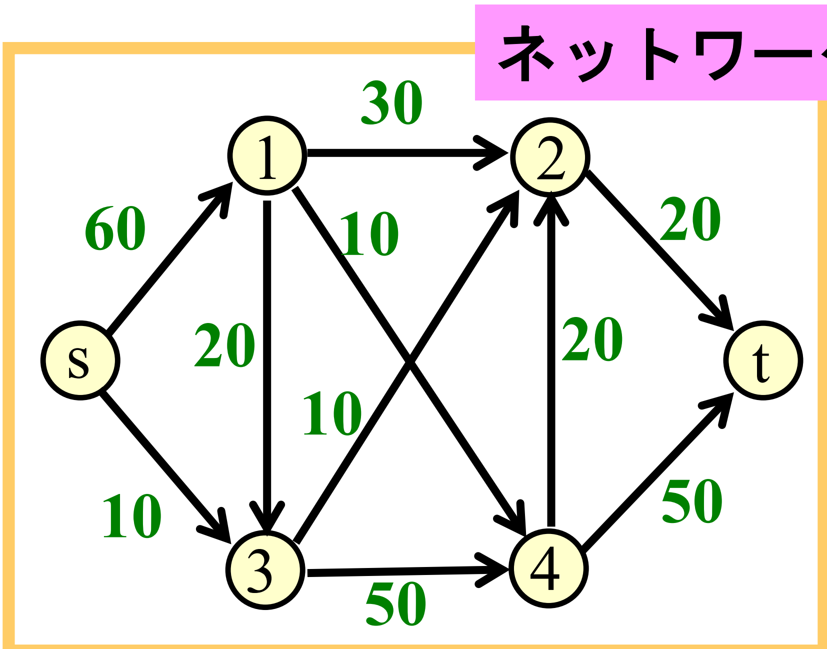
- フローの流量: 始点sから流出するフローの和

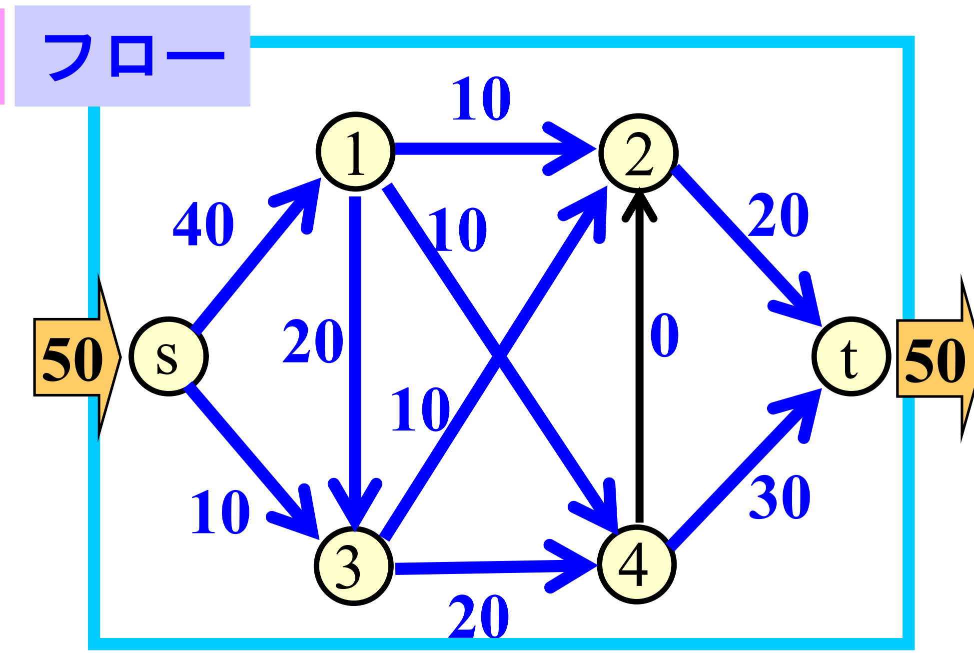
目的	フローの流量→最大
条件	実行可能フロー

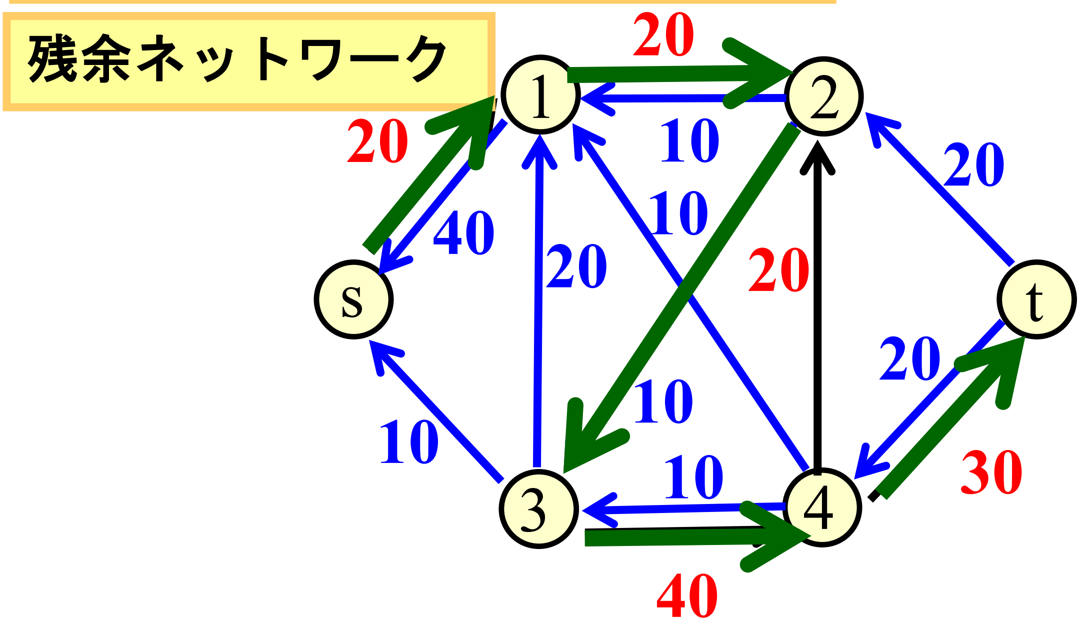
⇦ 最大フロー問題

- 最大フロー:フローの最大流量を達成する実行可能フロー

最大フロー?







残余ネットワーク上でsからtへのパスが存在

最大フローではない

最大フローの求め方のアイディア

観察された事実

残余ネットワーク上で
sからtへのパスが存在

↓

最大フローではない

導かれる事実

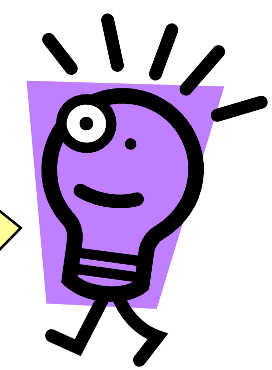
残余ネットワーク上で
sからtへのパスが存在しない

↑

最大フローである

増加道
(増加パス)

残余ネットワーク上で
sからtへのパスがなくなるまで
フローを増やし続けよう

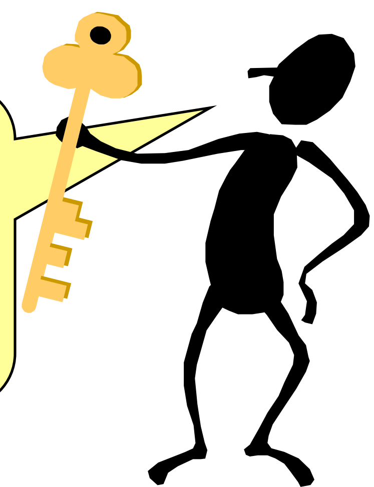


▶ **増加道法**

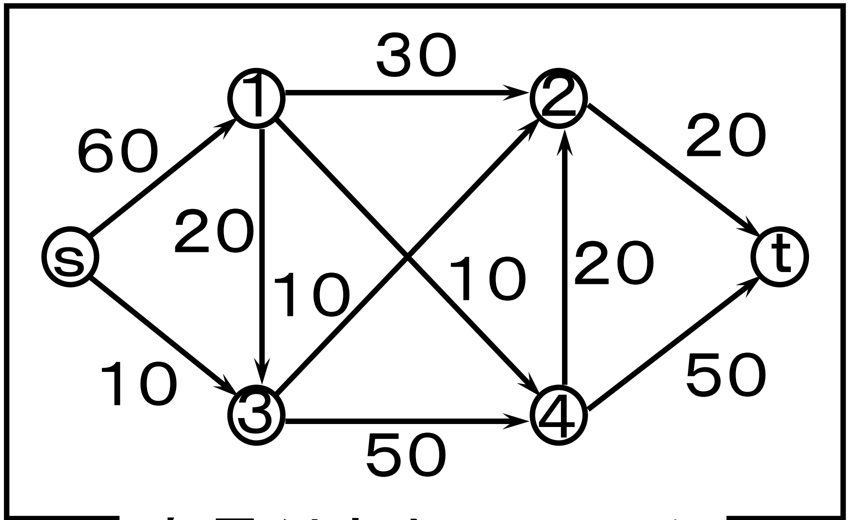
増加道法

- 手順１　各枝のフローを0にする.
- 手順２　**増加道**がある限り以下を繰り返す.
  - 増加道をひとつ見つける.
  - その増加道上の枝容量の最小値分のフローを, 残余ネットワーク上で増加道に沿って流す.

残余ネットワーク上で流すので,
実際のネットワーク上ではフローが
減る枝も出てくることに注意！



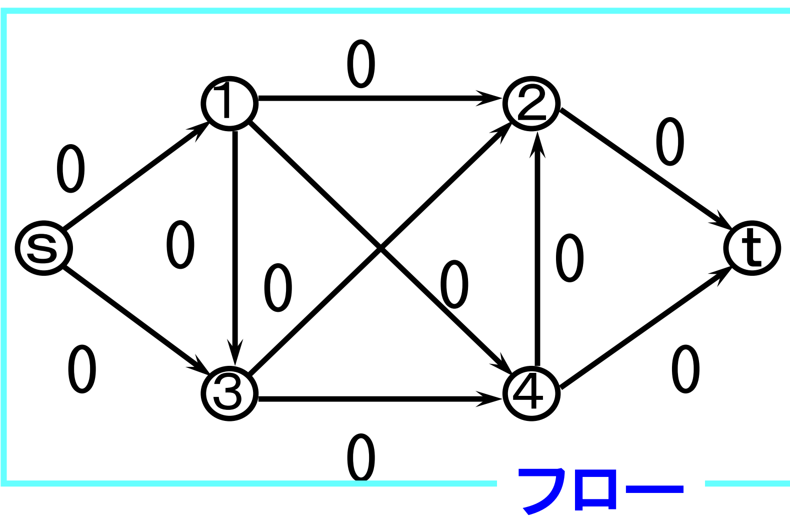
例題1(続)
増加道法



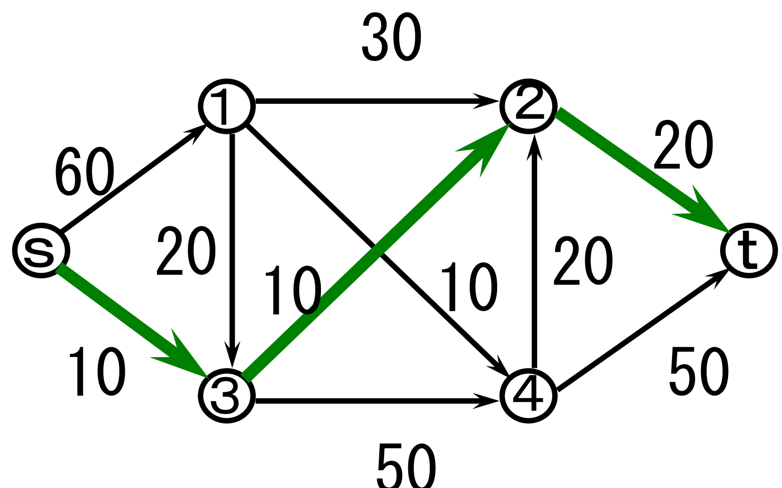
容量付きネットワーク

左側のフローに対する残余ネットワーク

手順1



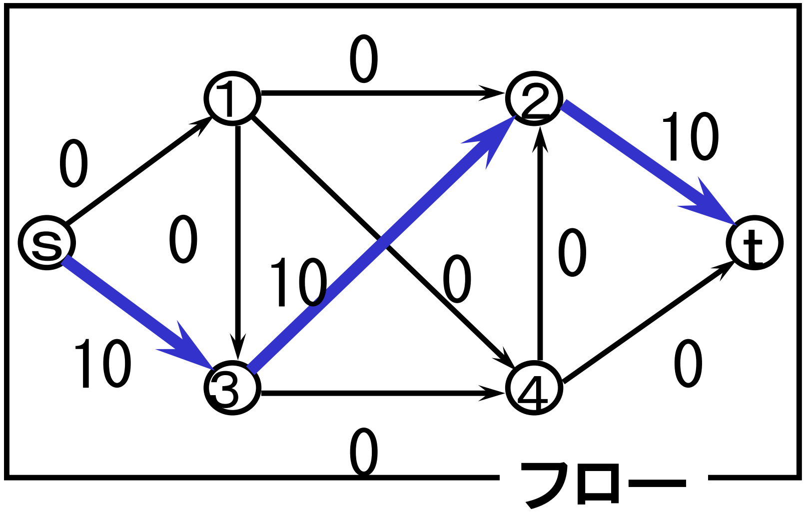
フロー

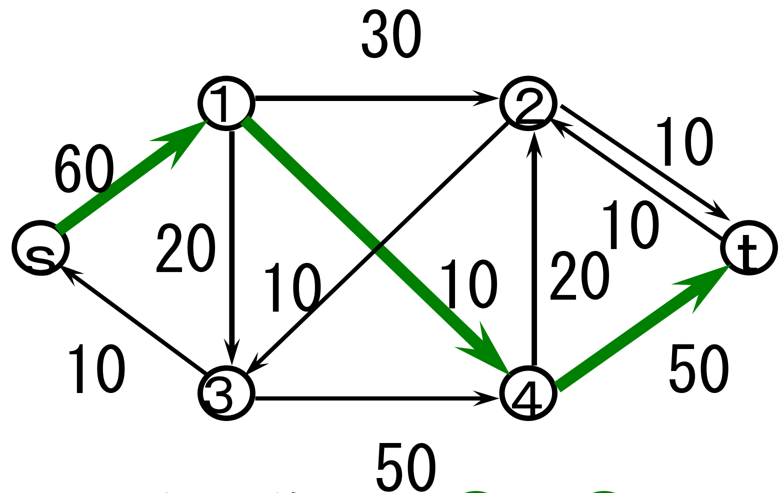


増加道：s→③→②→t

最小容量：10

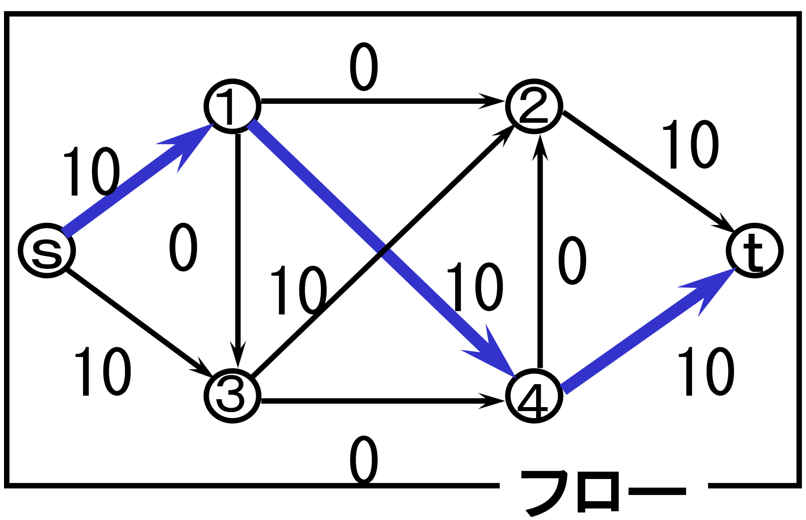
手順2 繰返し1回目

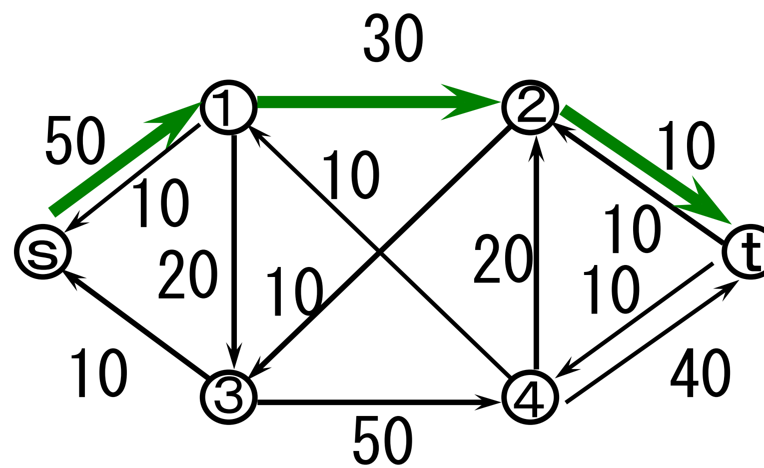




増加道：s→①→④→t
最小容量：10

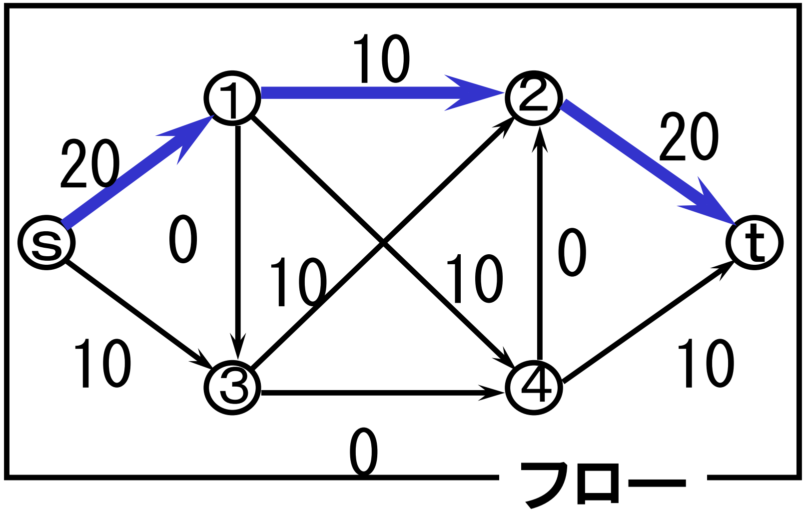
手順2 繰返し2回目

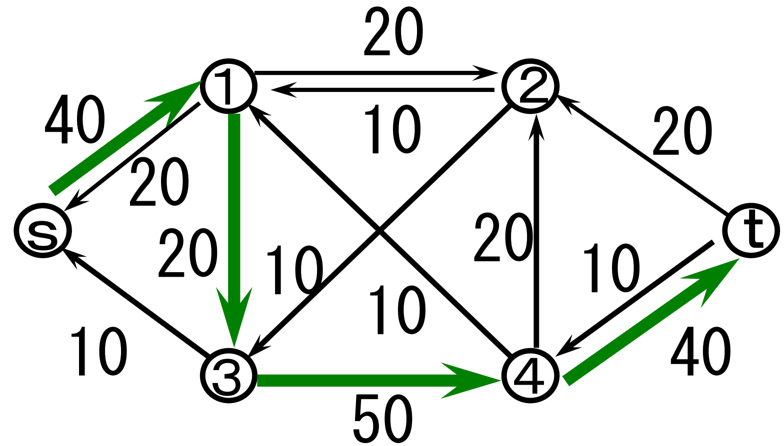




増加道：s→①→②→t
最小容量：10

手順2 繰返し3回目

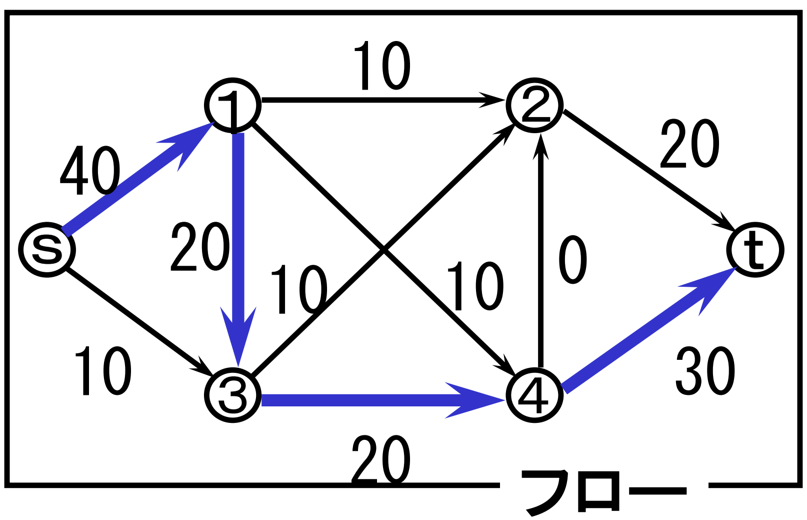


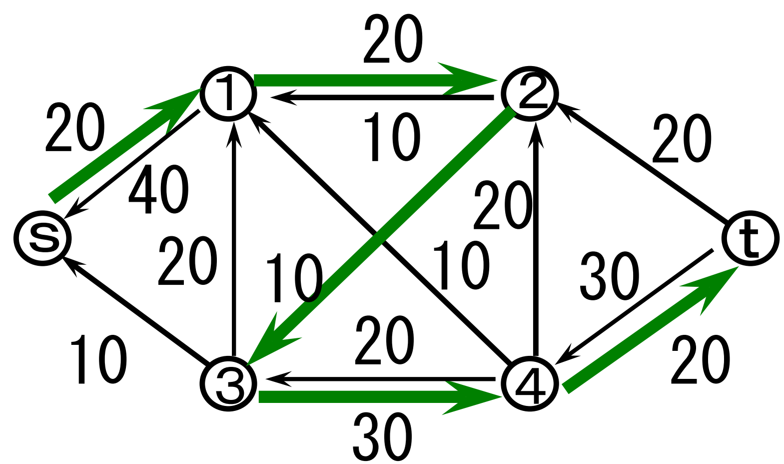


増加道：s→①→③→④→t

最小容量：20

手順2 繰返し4回目

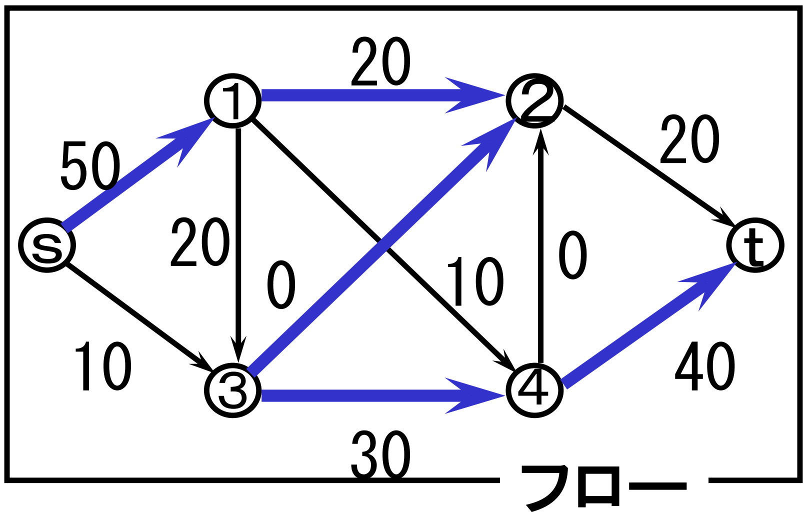


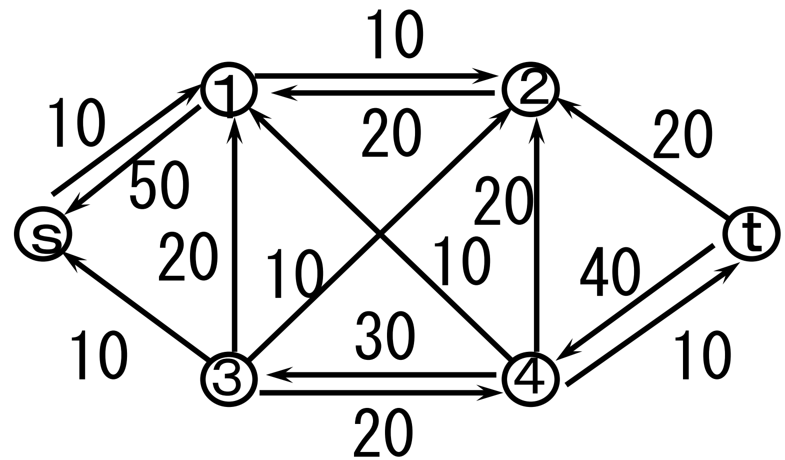


増加道：s→①→②→③→④→t

最小容量：10

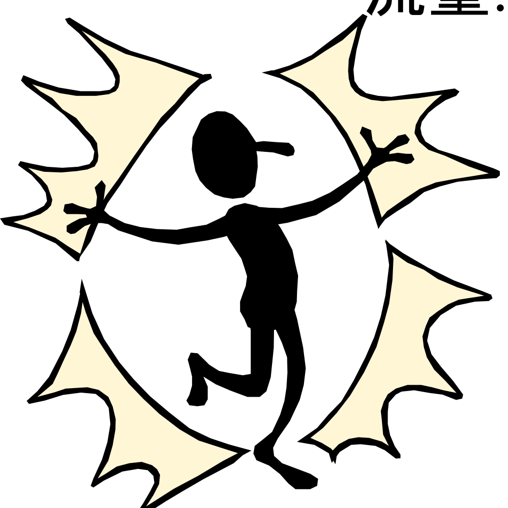
手順2 繰返し5回目





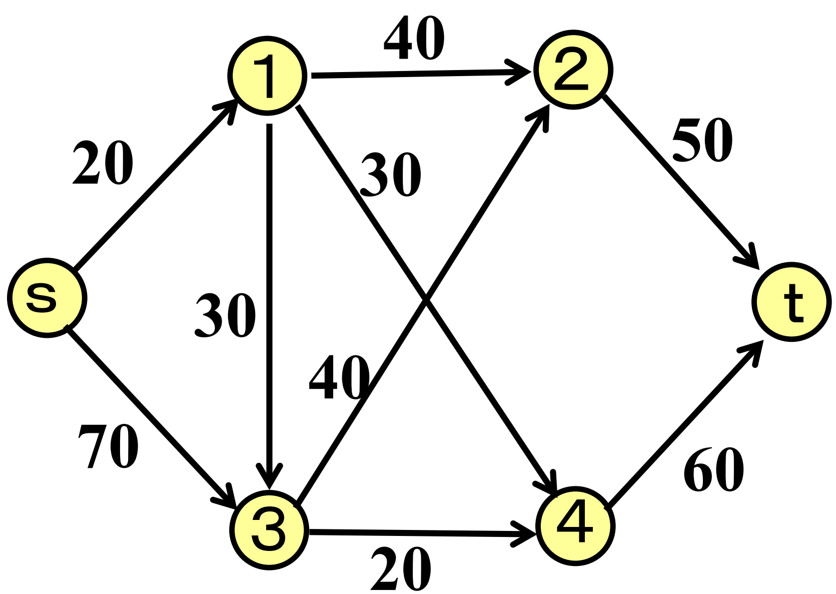
増加道:なし

最大フロー
流量:60

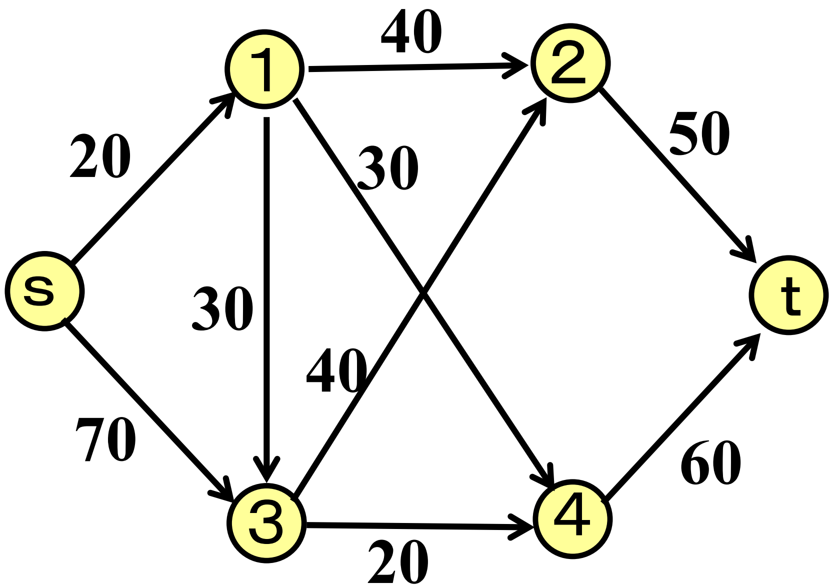


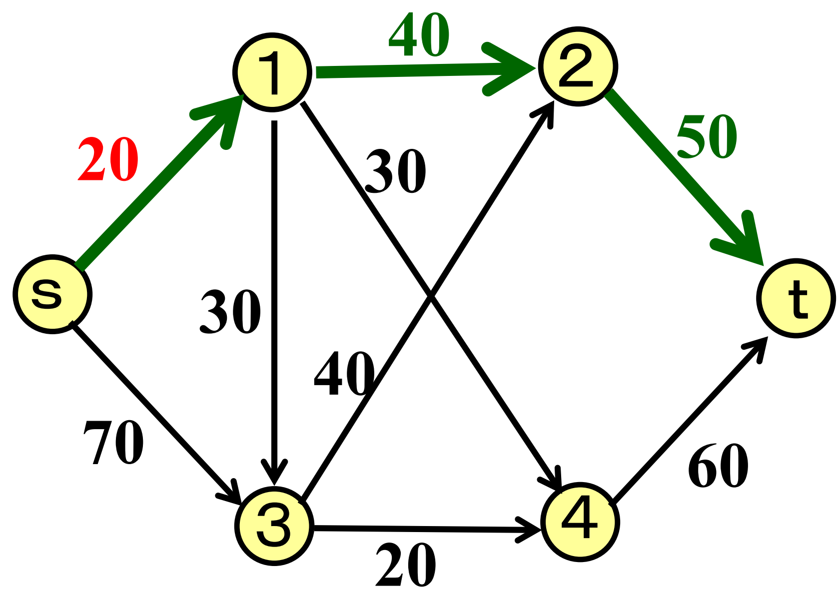
練習 増加道法

増加道法で最大フローを求めよ

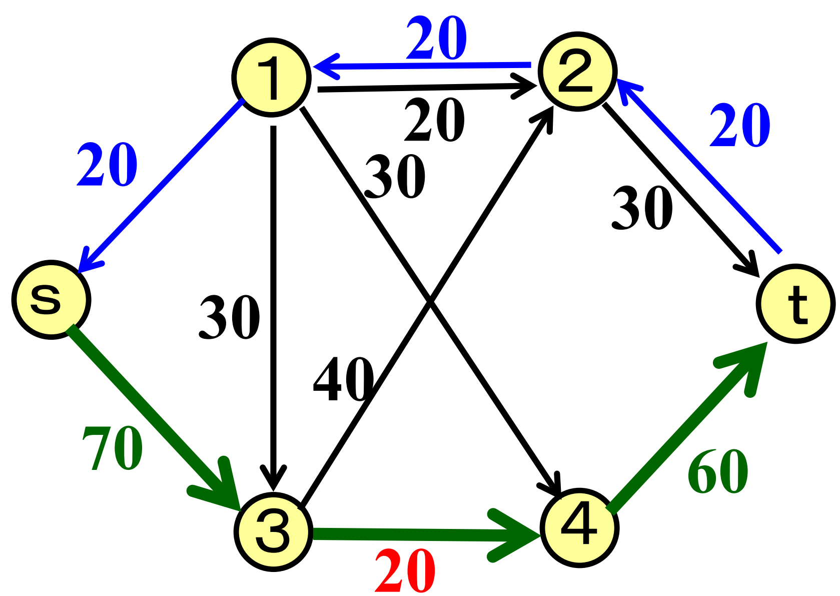


練習 解答例

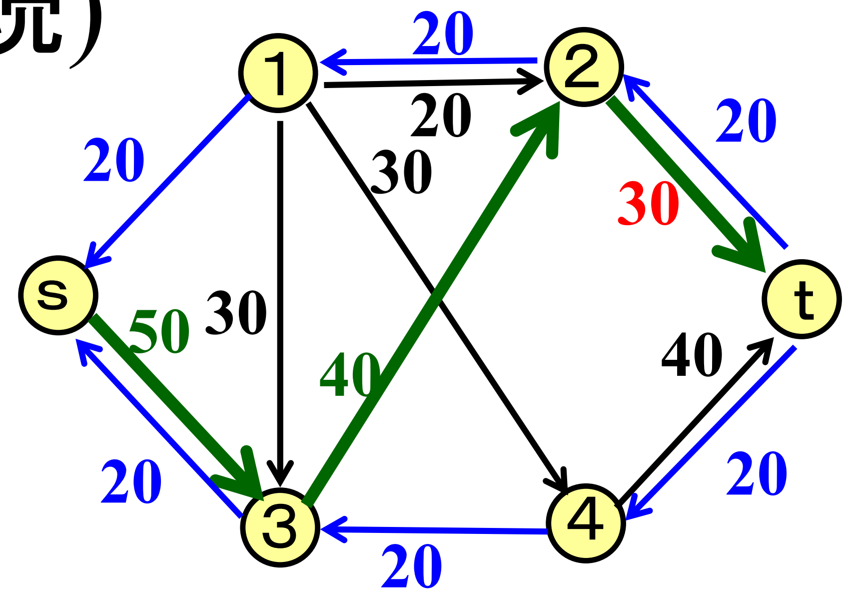




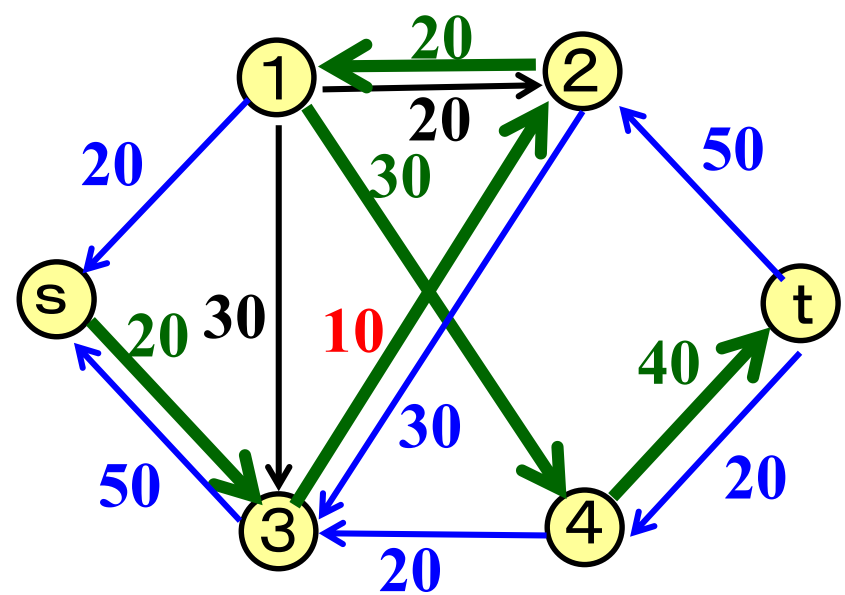
初期の残余ネットワーク
（フローの流量は0）



練習 解答例(続)

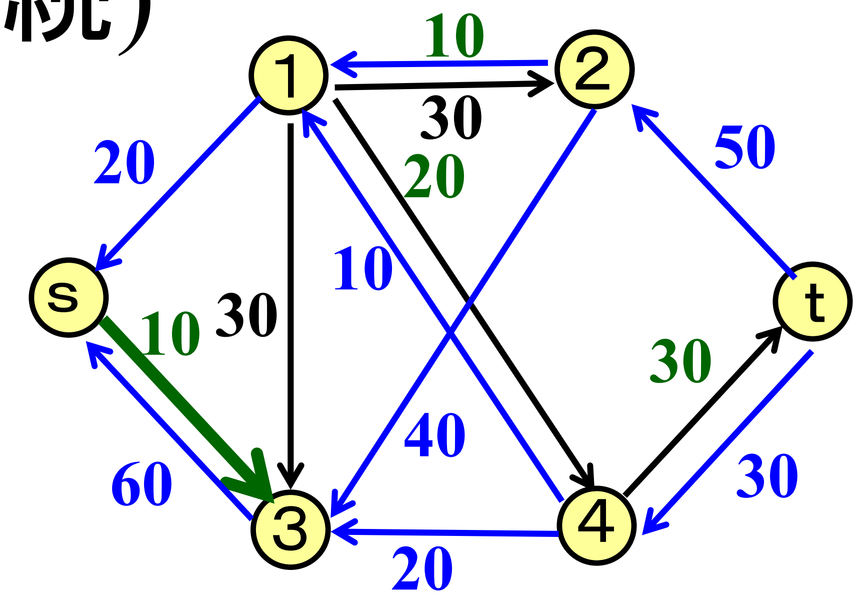


20
1
2
20
20
30
30
s
t
50
30
40
40
20
20
3
4
20

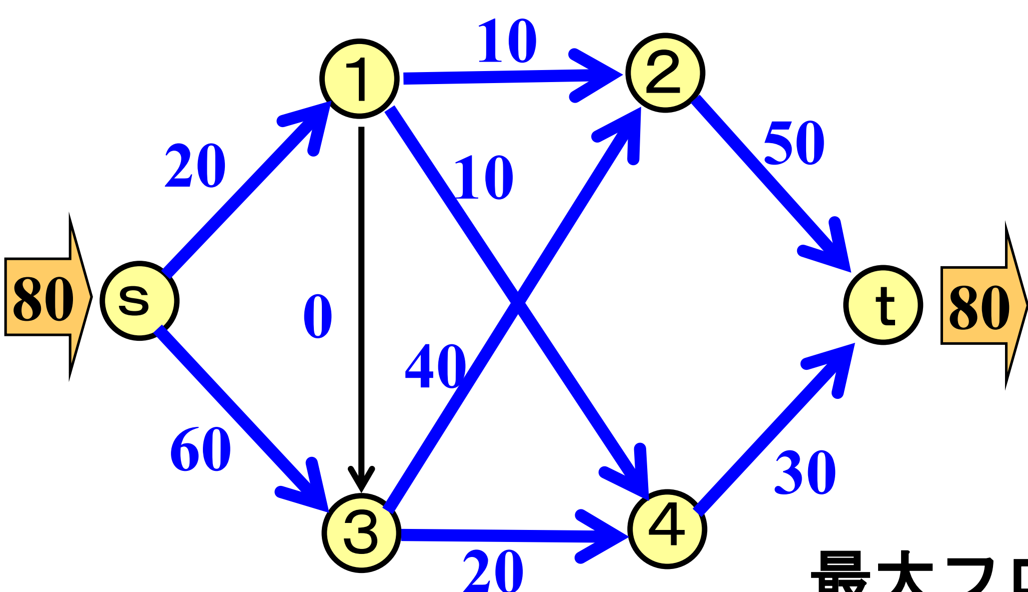


20
1
2
20
20
50
30
s
t
20
30
10
40
30
50
20
3
4
20

練習 解答例(続)



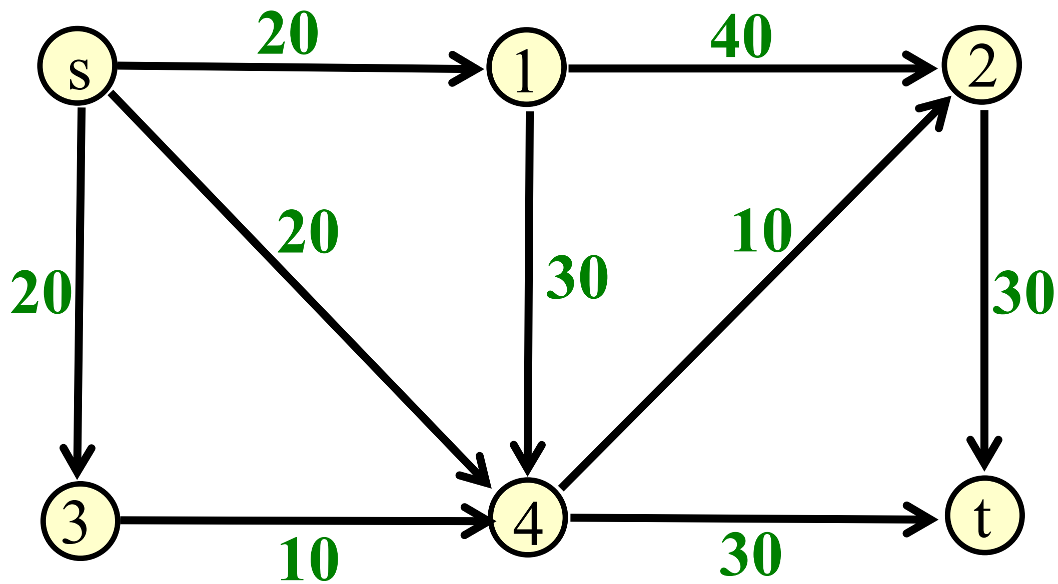
最大フロー



増加道がない

最大フローの流量は80

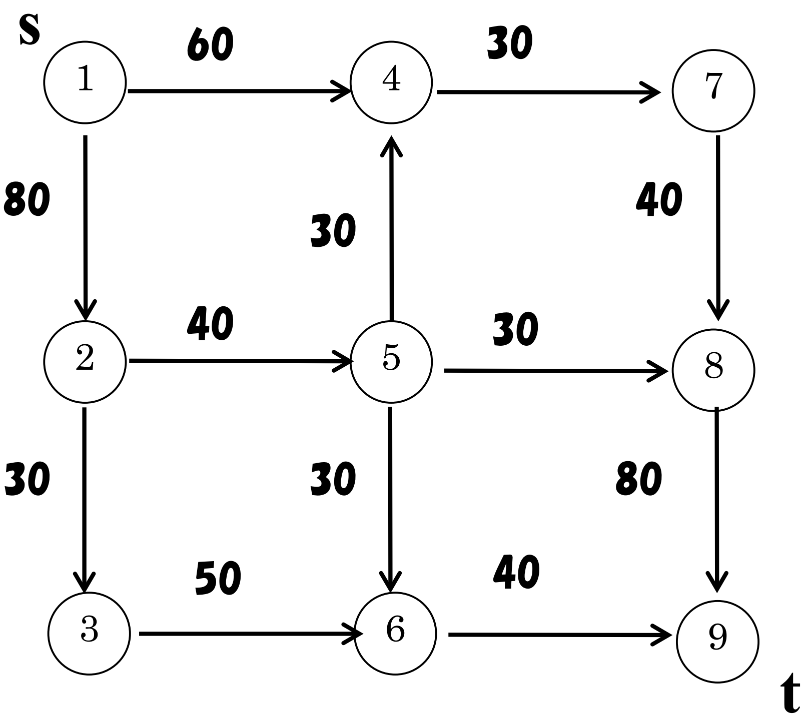
演習1(1) 増加道法



最大フローとその流量を求めよ

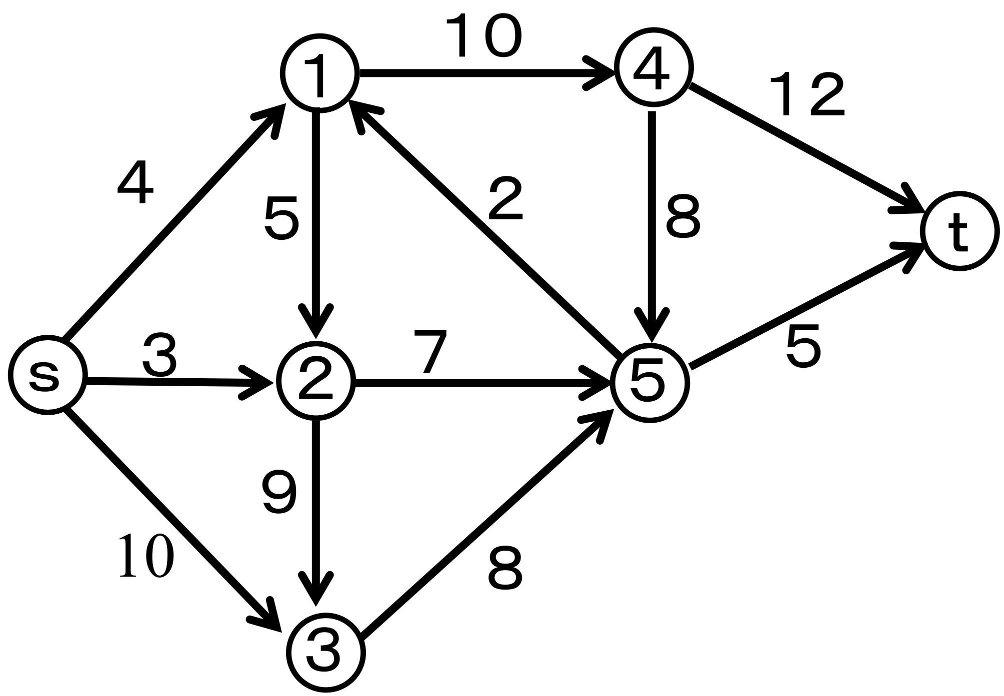
ワークシート有

演習1(2)



最大フローとその流量を求めよ

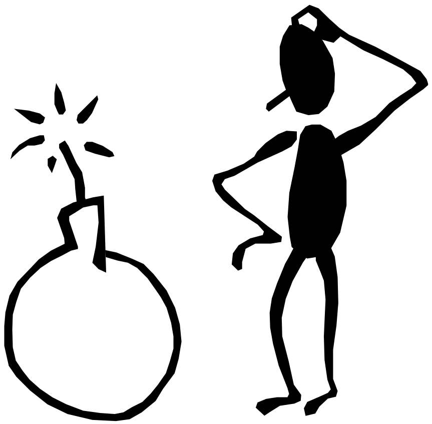
演習1(3)

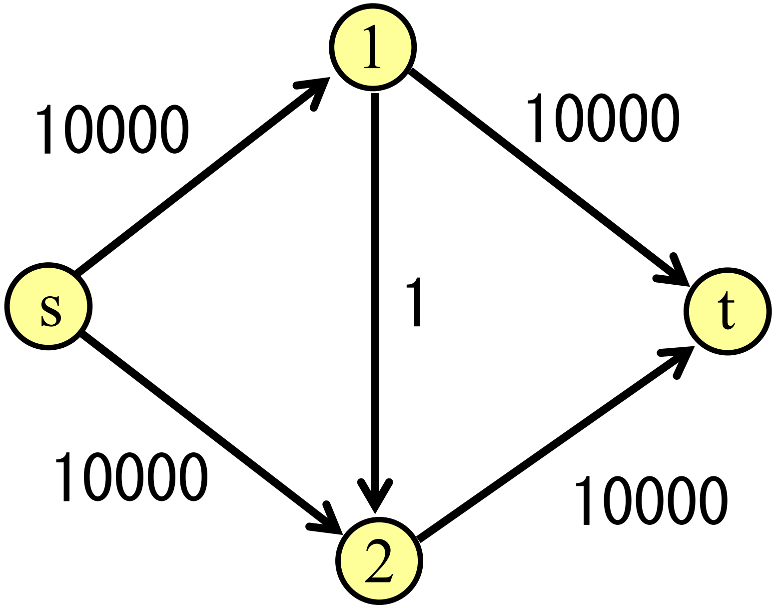


最大フローとその流量を求めよ

増加道法の欠点

sからtへの最大フローを求めよ.
手順2を何回繰り返す？





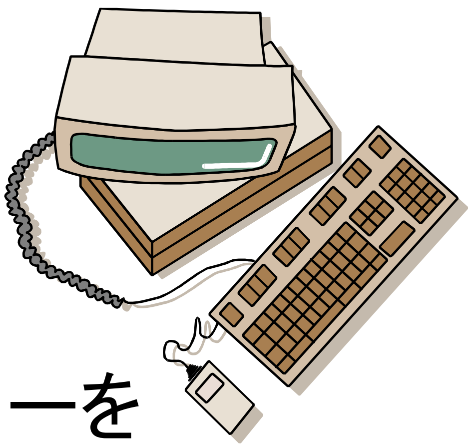
演習2 増加道法を改良せよ

最大フロー問題の二大基本解法

- 増加道法（Ford-Fulkerson）
  - 簡単な手順の繰り返し．直感的に妥当性が理解できる．計算時間が多くかかる．

⇩

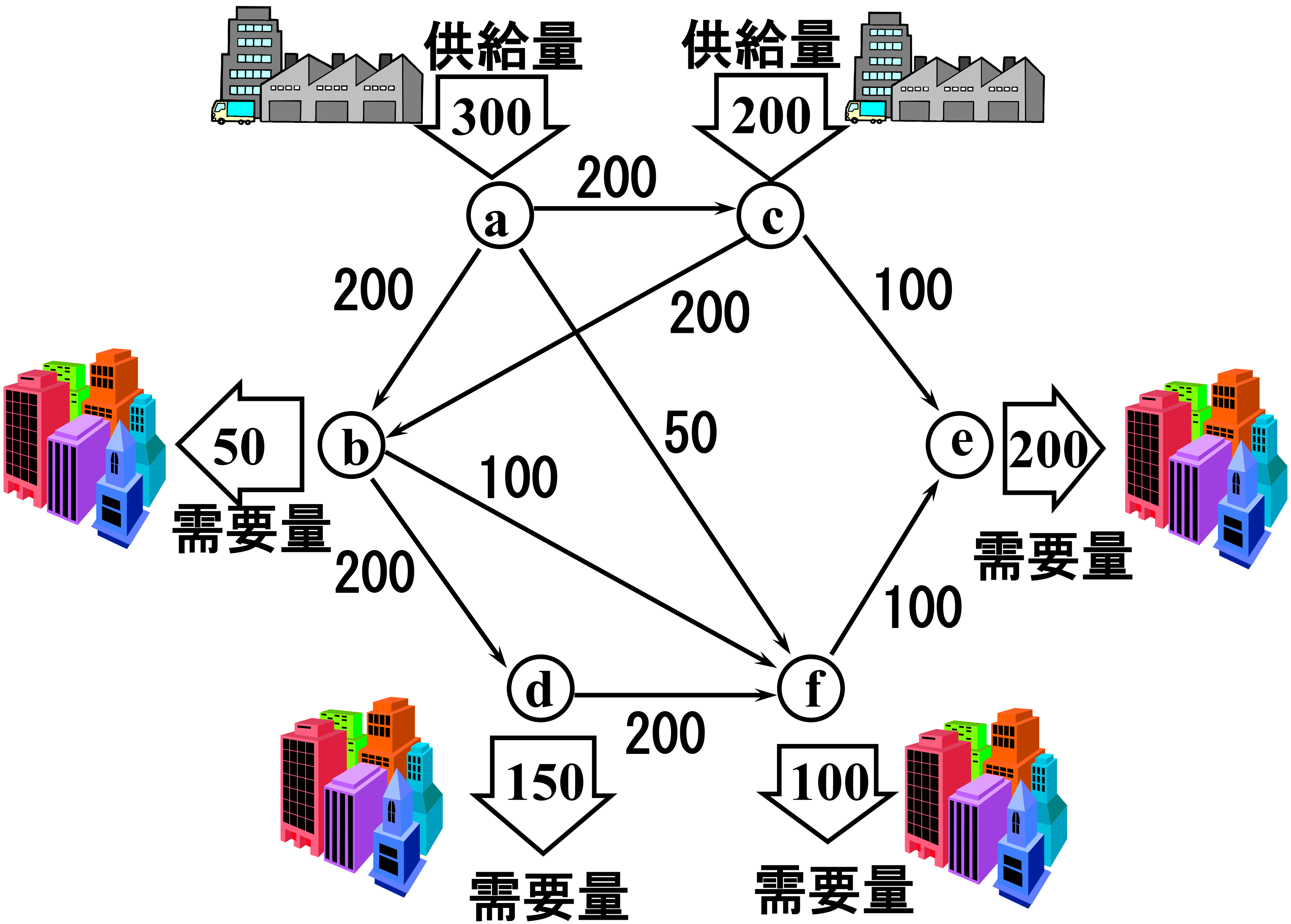
改良：Dinicの解法



- Preflow-Push解法
  - 工夫を加えることで高速に最大フローを求める．

仮定：ネットワークの容量は整数で与えられる．

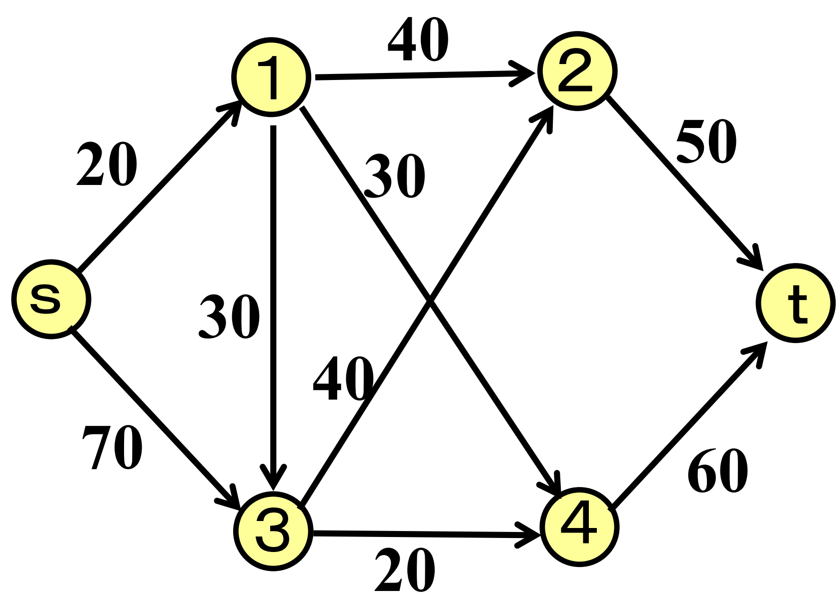
演習3 需要を満たすことは可能？



例題2

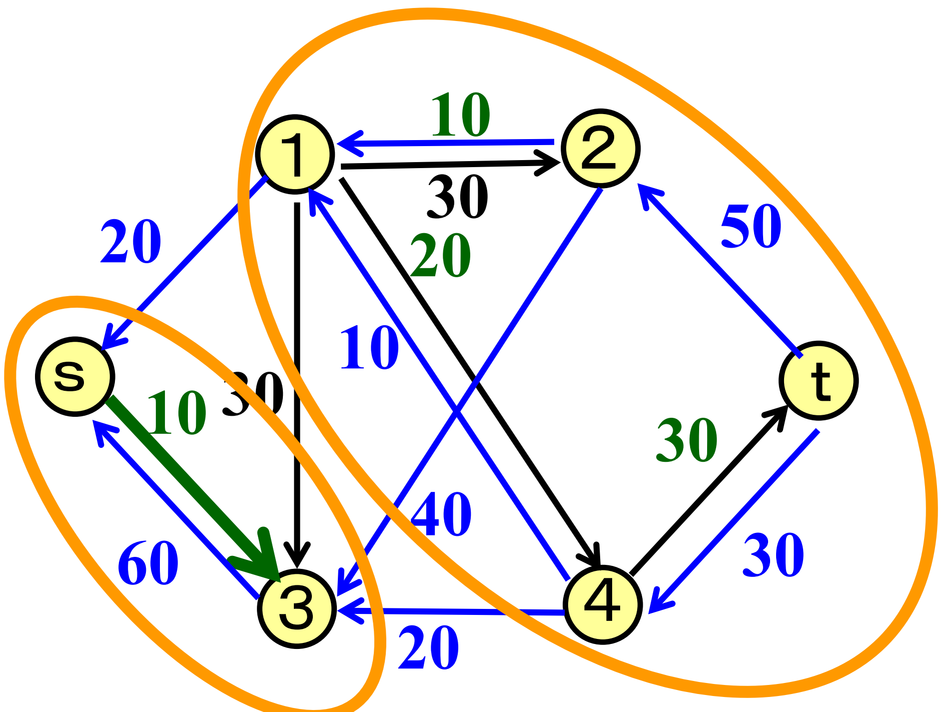
sからtへより多くのモノを流したい.

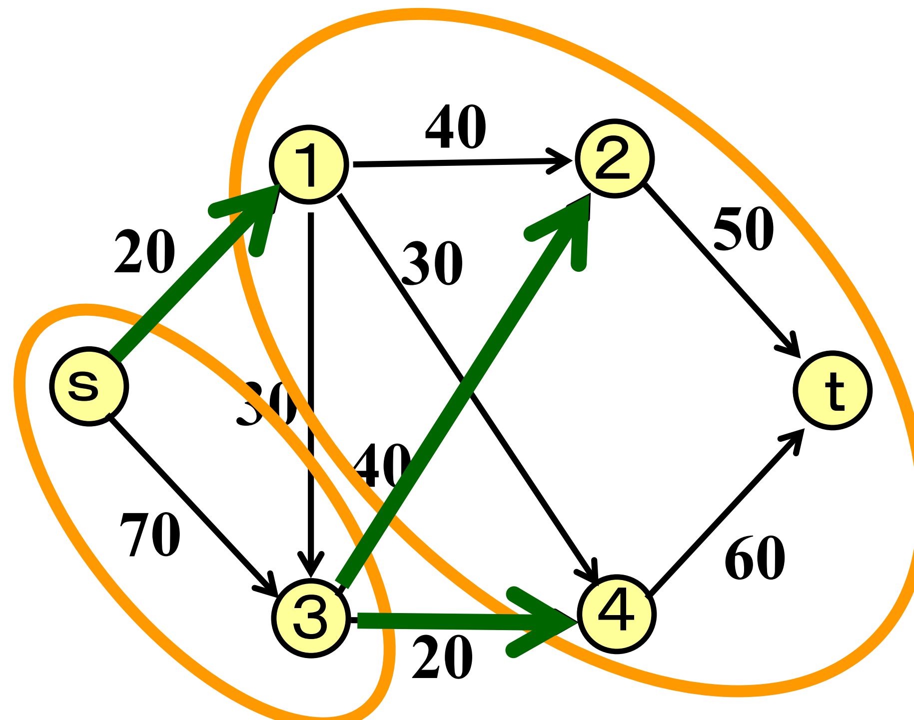
どの枝の容量を増やすのが効果的?



例題2 解答例

増加道法で最後の場面
（増加道が存在しない）





sから到達可能

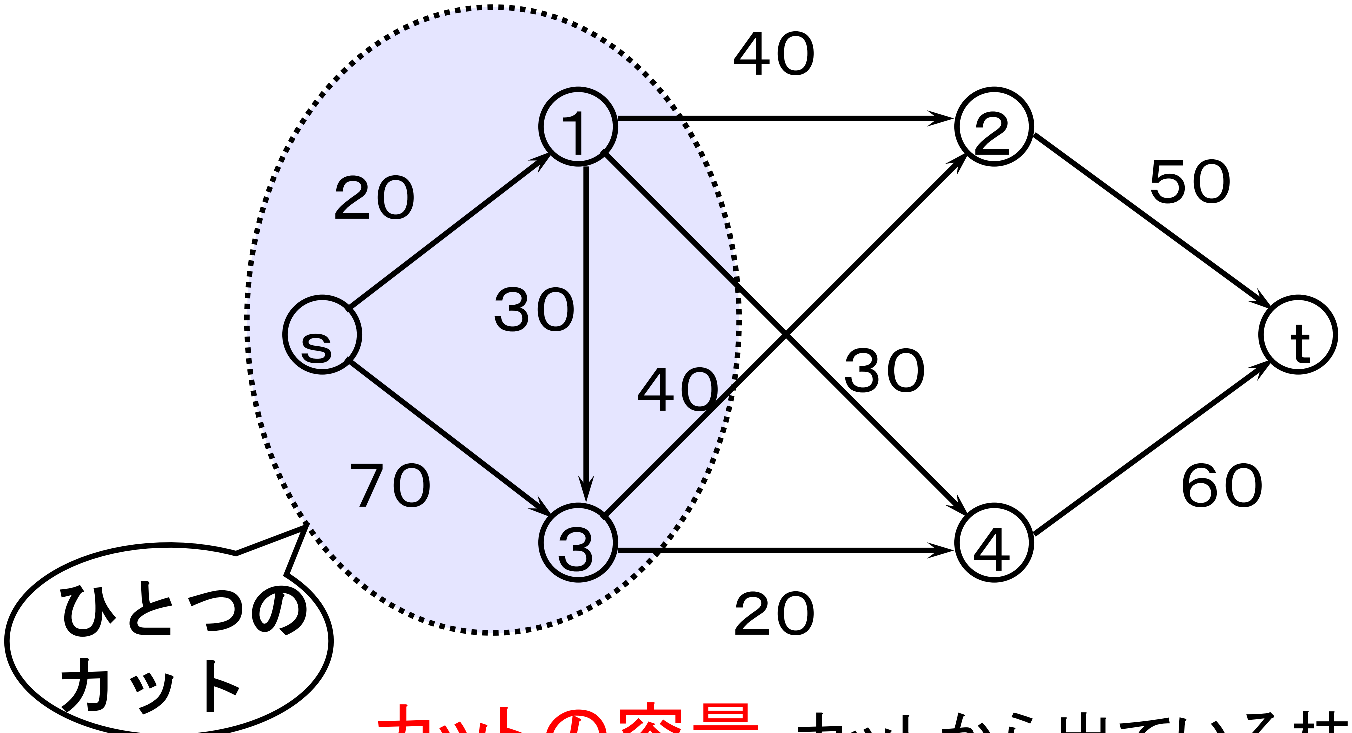
強連結成分分解

ボトルネック

カット

sを含み，tを含まない点の部分集合を**カット**という.

※ネットワーク上にカットはたくさんある



カットの容量：カットから出ている枝の容量の総和

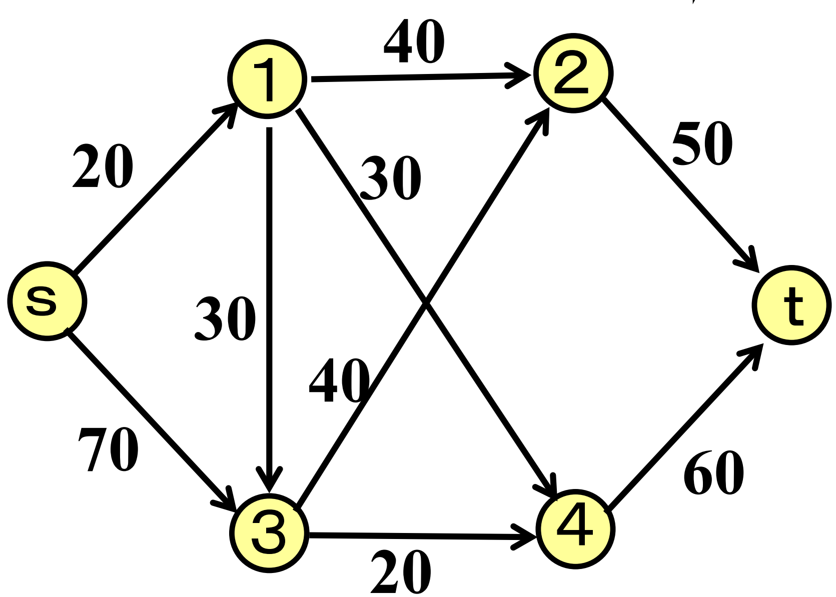
※上記のカットを特に「s-tカット」と呼ぶ場合もある

最小カット

最小カット: 容量最小のカット

演習7-4: 以下のネットワークの最小カットを見つけよう

⇒ **最小カット問題**



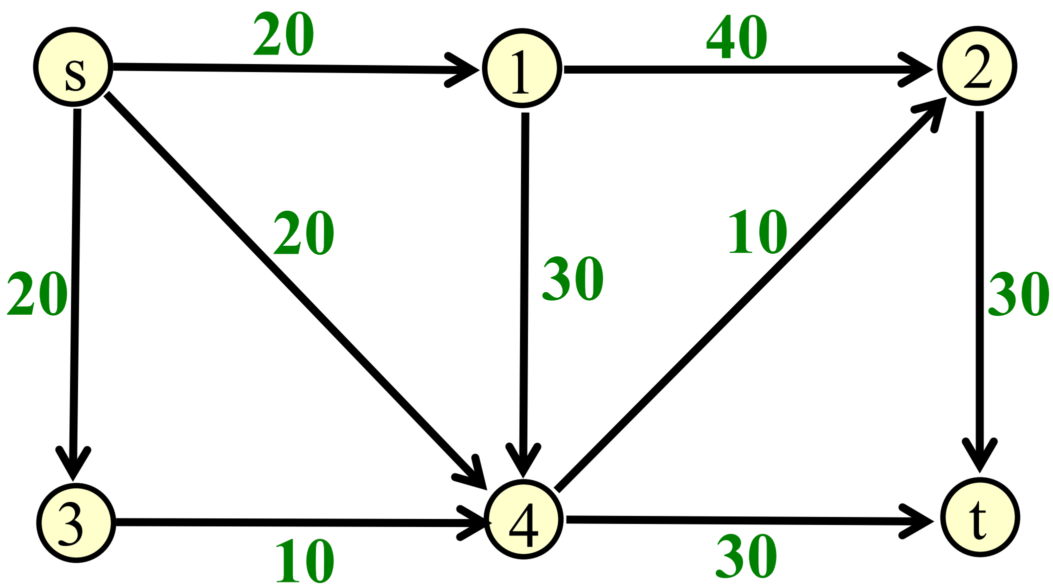
最大フローと最小カットの関係

- **最大フローの流量＝最小カットの容量**（最大フロー・最小カット定理）
- 最小カットは最大フロー問題から導出可能
  - 導出概要：容量いっぱいに流れ，始点sと終点tを分割する枝集合→最小カット.

⇒CPMを実行する時の最小カットは最大フロー問題に帰着することにより得られる.

演習4(1)

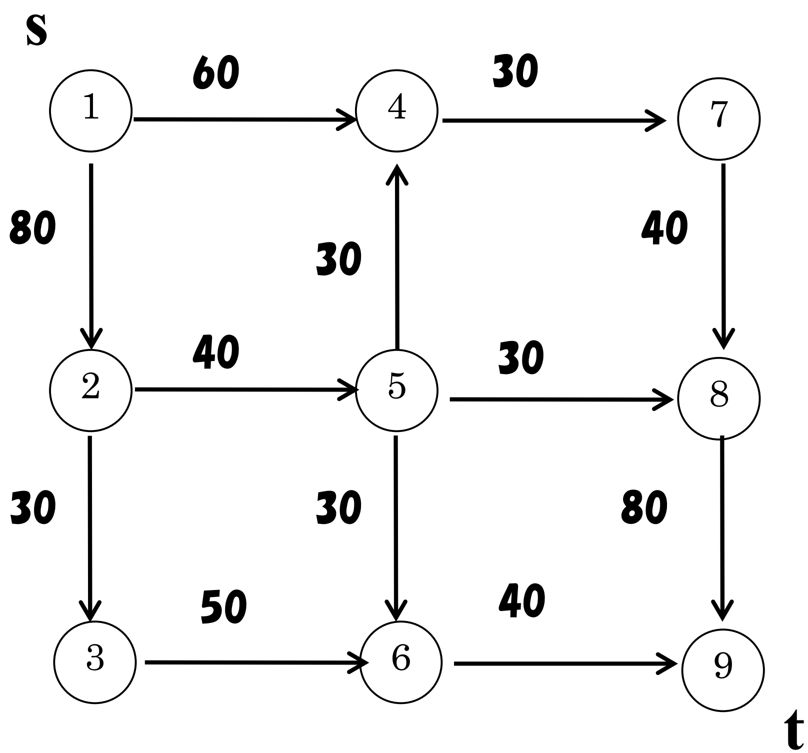
- 最小カットをすべて図示せよ．その容量＝ ＿＿＿＿＿



演習1で導出した最大フローの(残余ネットワーク)情報を利用しよう

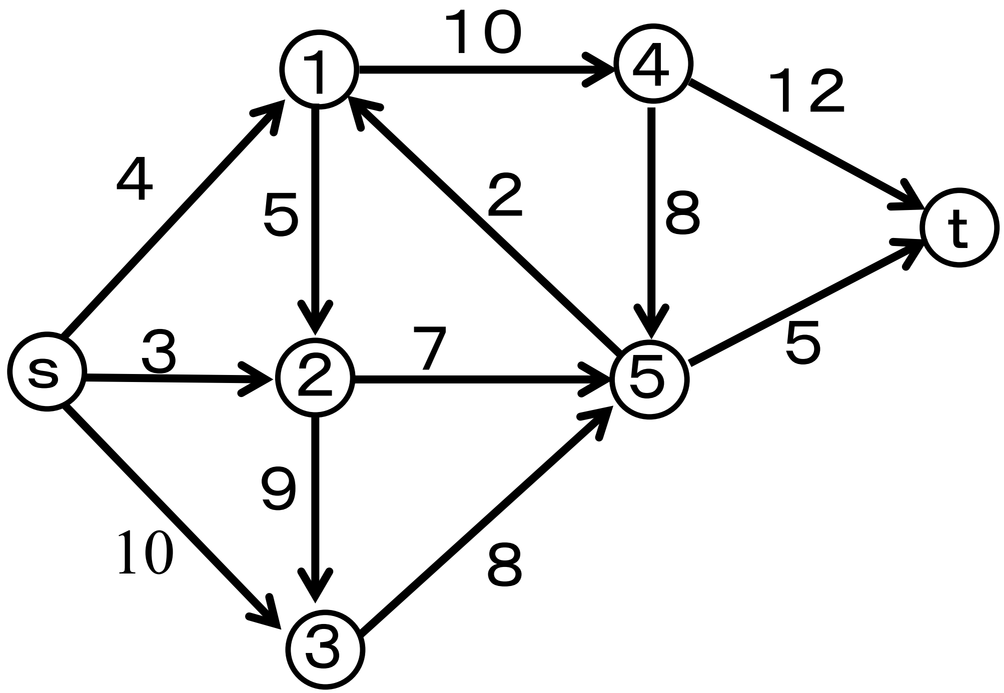
演習4(2)

- 最小カットをすべて図示せよ．その容量＝＿＿＿＿

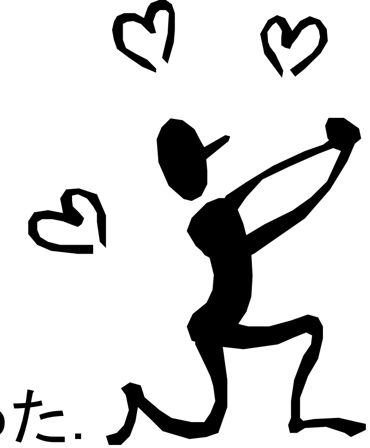


演習 4(1)

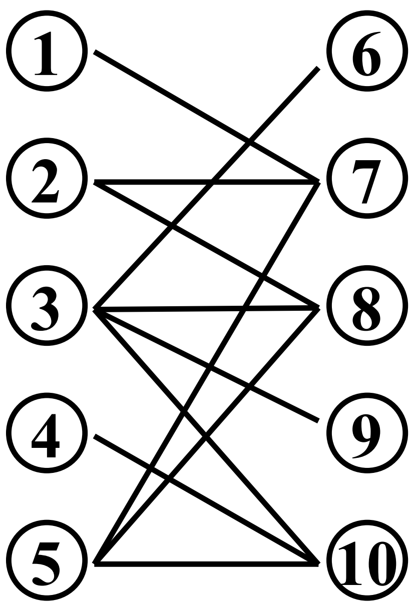
- 最小カットをすべて図示せよ. その容量＝＿＿＿＿



例題3 Shall we dance?



社交ダンスパーティーに男性・女性5人ずつ集まった.
幹事がアンケートをとったところ，パートナーになってもよいとお互い思っているペアは以下の組合せであることがわかった.



男性　　女性

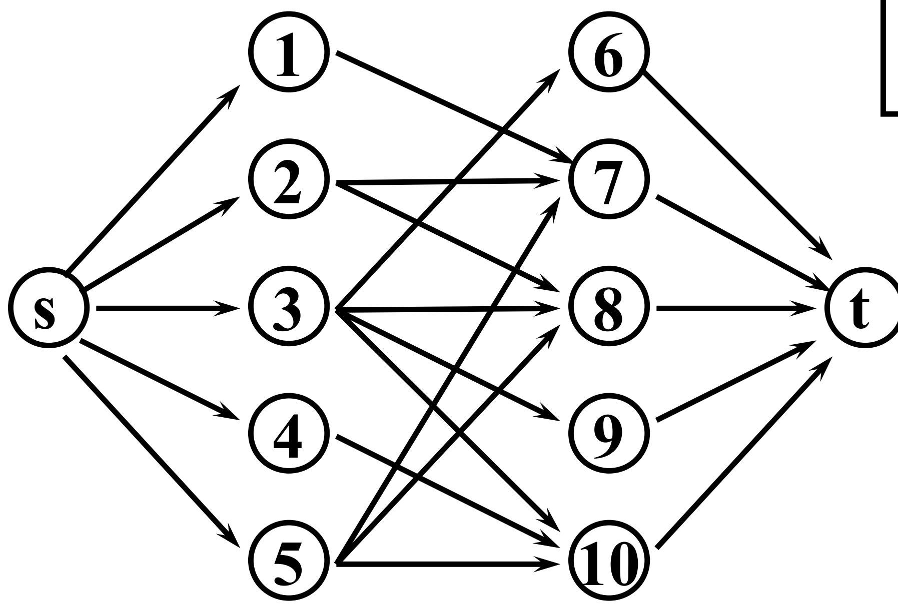
さて，なるべく多くのペアを組みたいが最大で何組できるか？その組み方は？

同時にペアになれる組合せを「**マッチング**」，このような問題を「**マッチング問題**」とよぶ.

マッチング問題の解法

以下のように変形し最大フロー を求める.

演習5
求めてみよう！



各枝の容量はすべて1

- **「フローが流れている元の枝⇔マッチング」⇦なぜか？**
- **「最大フロー⇔最大マッチング」⇦なぜか？**

演習6 最大マッチングを求めよう