

# Network Programming II

Shortest path problem

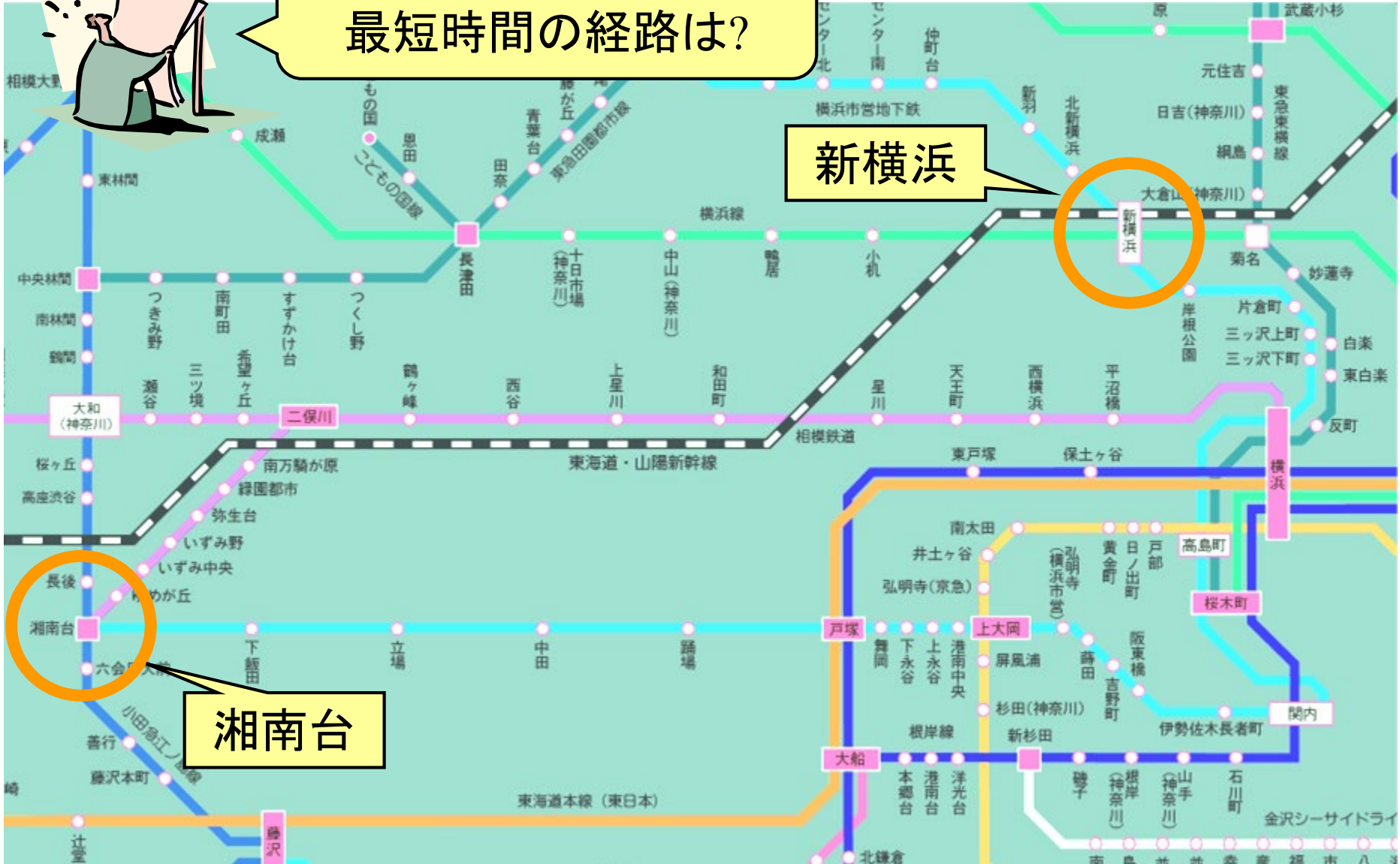
最短路を探せ!

# 最短路問題

最短距離の経路は?  
最短時間の経路は?

新横浜

湘南台



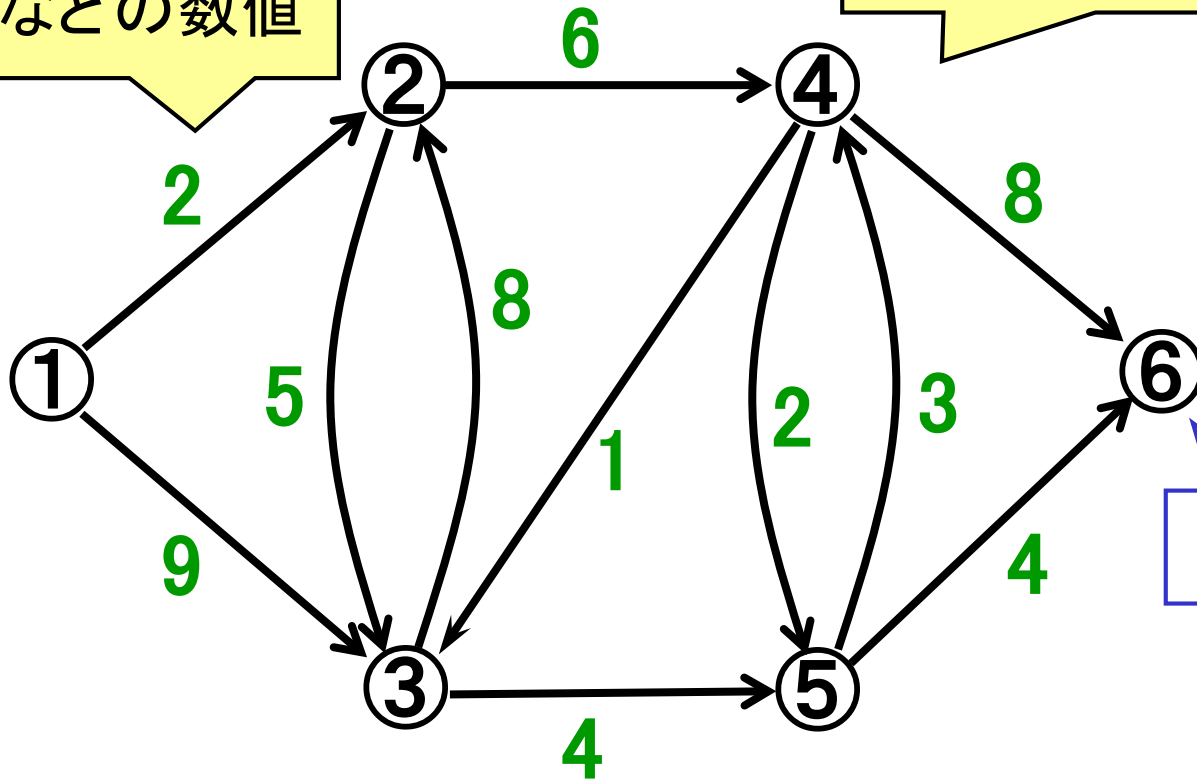
# 最短路問題のネットワーク表現

各枝に距離or  
時間などの数値

問題の舞台を  
(有向)グラフで表現

(例)

スタート



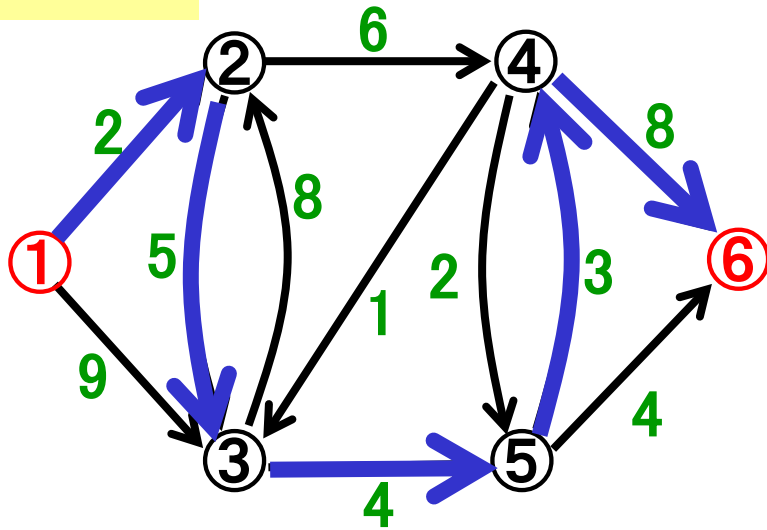
ゴール

スタートとゴールの点を指定

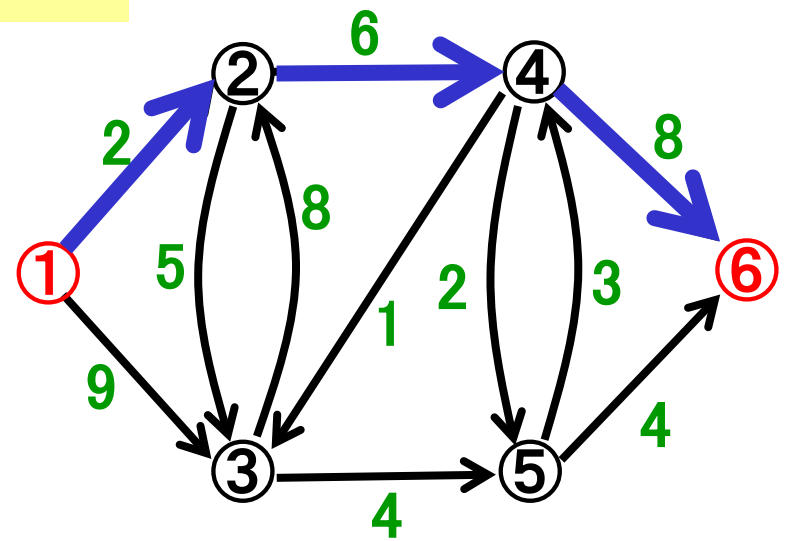
# パス(経路)とその長さ

パス(経路): ある点とある点を結ぶ枝の列(向きに注意!)

パスA



パスB

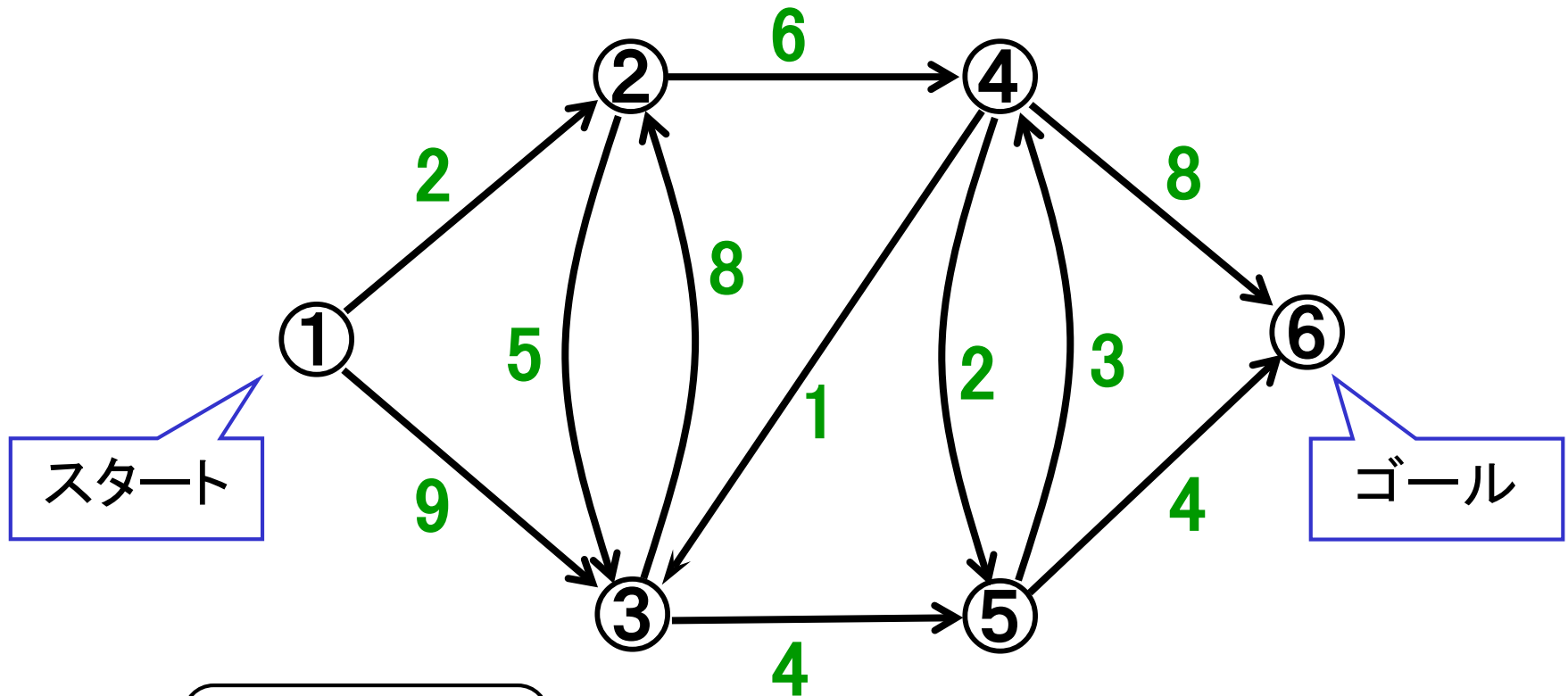


パスの長さ:  $2+5+4+3+8=22$

$2+6+8=16$

- スタートとゴールを結ぶパスは多数
- その中で長さが最短のパス = 最短路
- 最短路を見つける問題: 最短路問題

# 例題1 最短路を求めよ

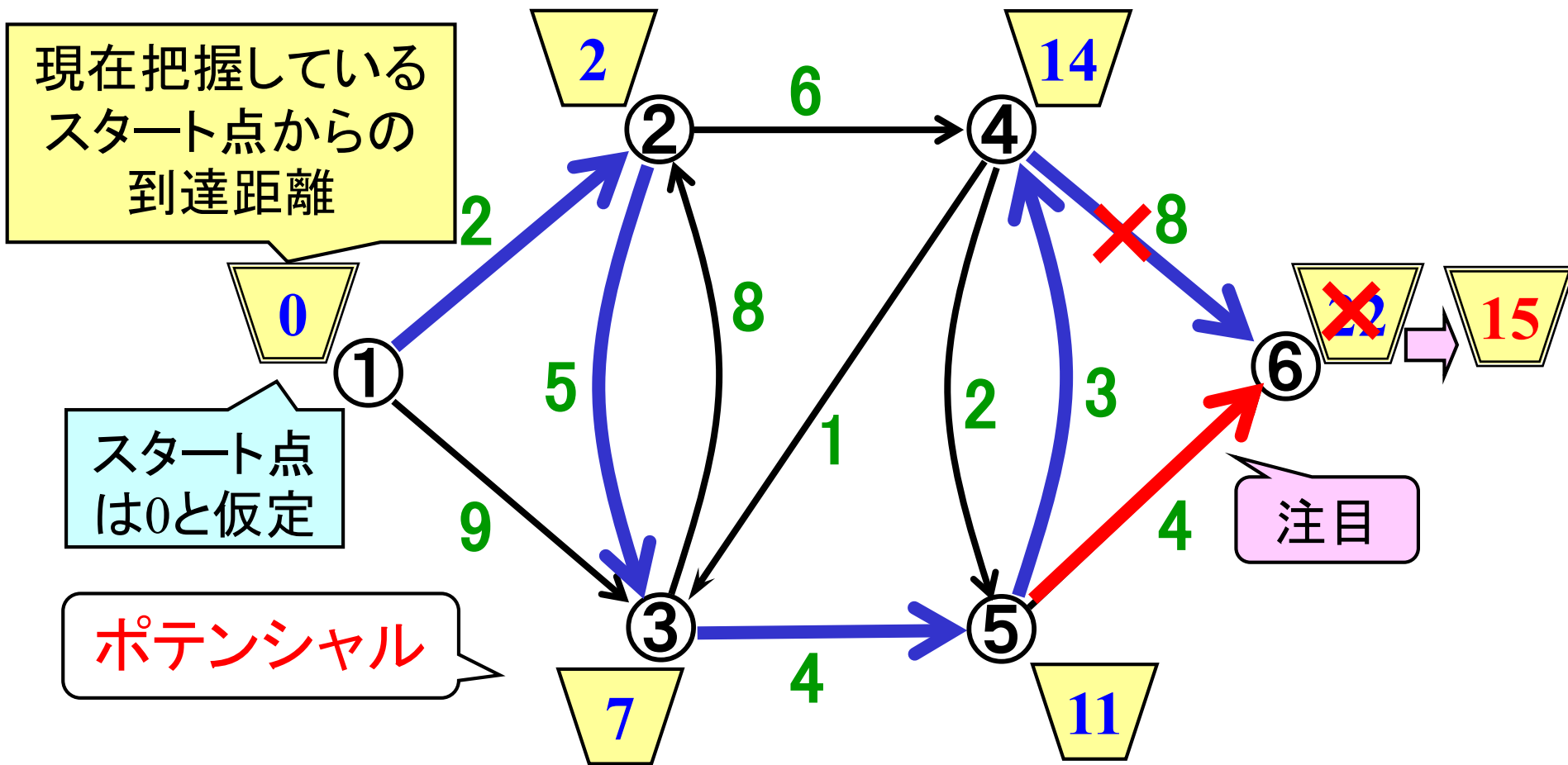


枝の数値は  
非負と仮定!



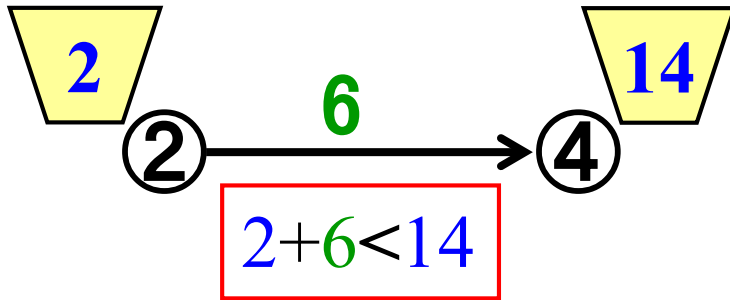
# 例題1(続) 最短路ではないパス

なぜ最短路ではない?



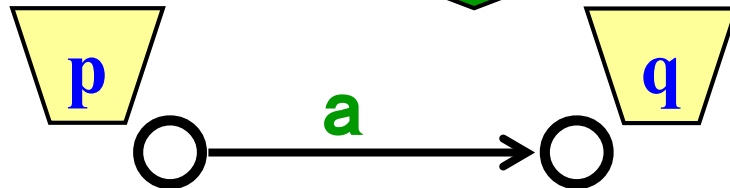
最短路を見つけた $\Leftrightarrow$ ポテンシャルはどのような状況を満足している?

# 最短路とポテンシャル



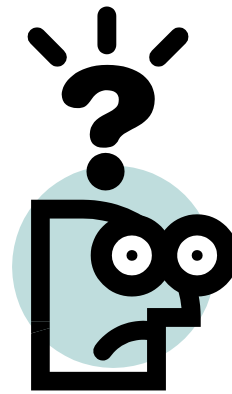
最短路を見つけていない

一般的に書くと



ある枝で  $p + a < q$  が成立

最短路を見つけていない  
証拠



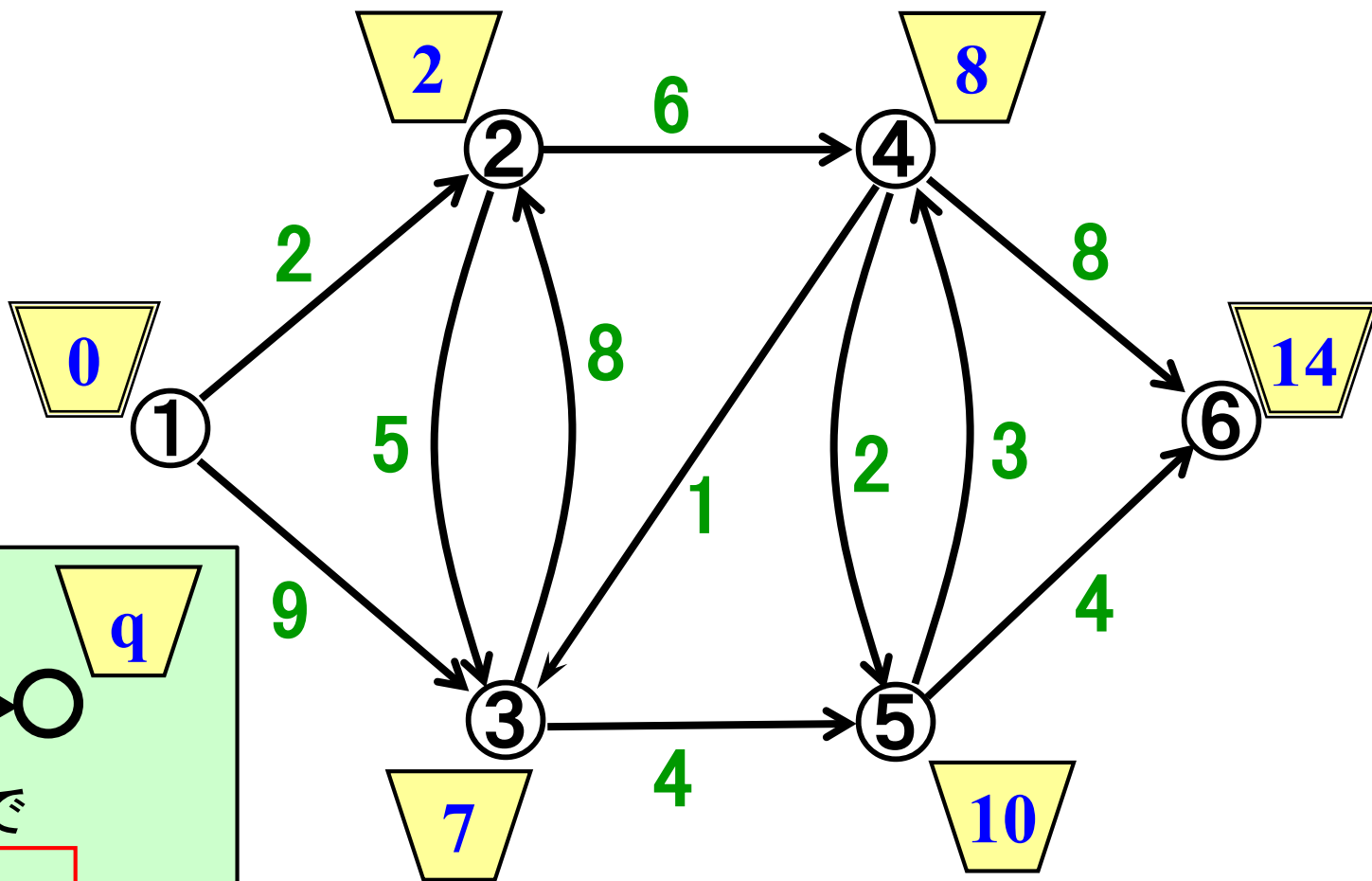
下の性質を満たす  
ポテンシャルの見  
つければいいんだ。  
どうやって？

すべての枝で  
 $p + a \geq q$  が成立

最短路でない証拠が存在しない

最短路を見つけた！

# 例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの例



すべての枝で  
 $p + a \geq q$   
が成立

確認してみよう



# 例題1(続) 性質を満たす ポテンシャルの見つけ方(1)

準備:

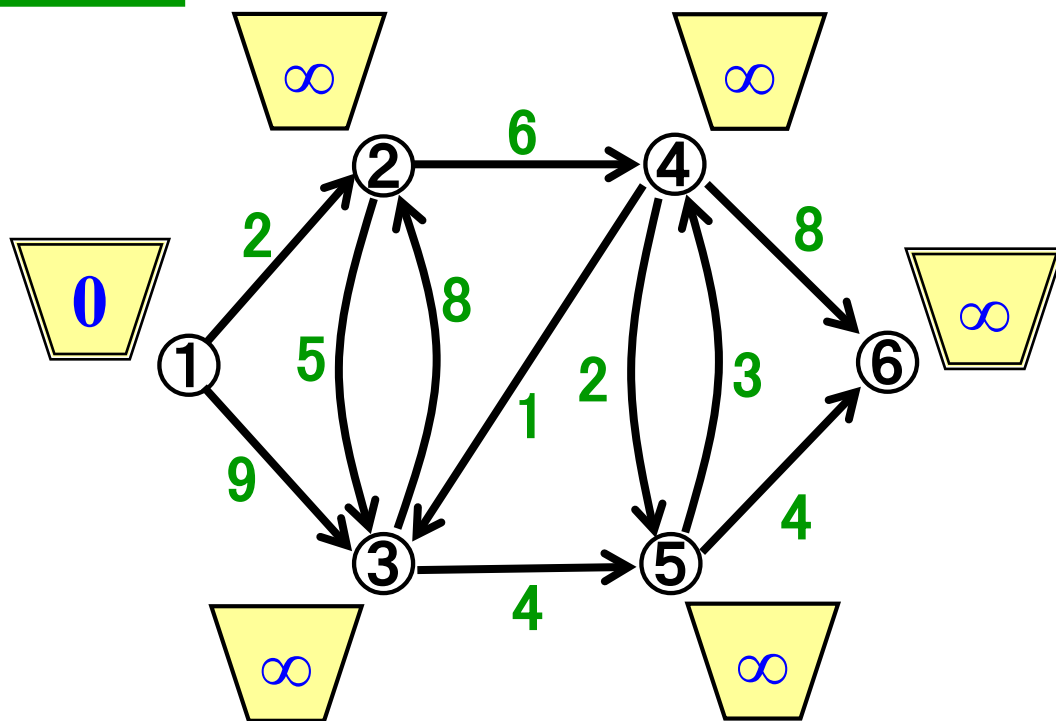
- スタートのポテンシャルを0
- 残りの点のポテンシャルは $\infty$
- 全点が未確定.

性質を満たすよう  
ポテンシャルを順に更新



**ダイクストラ法**

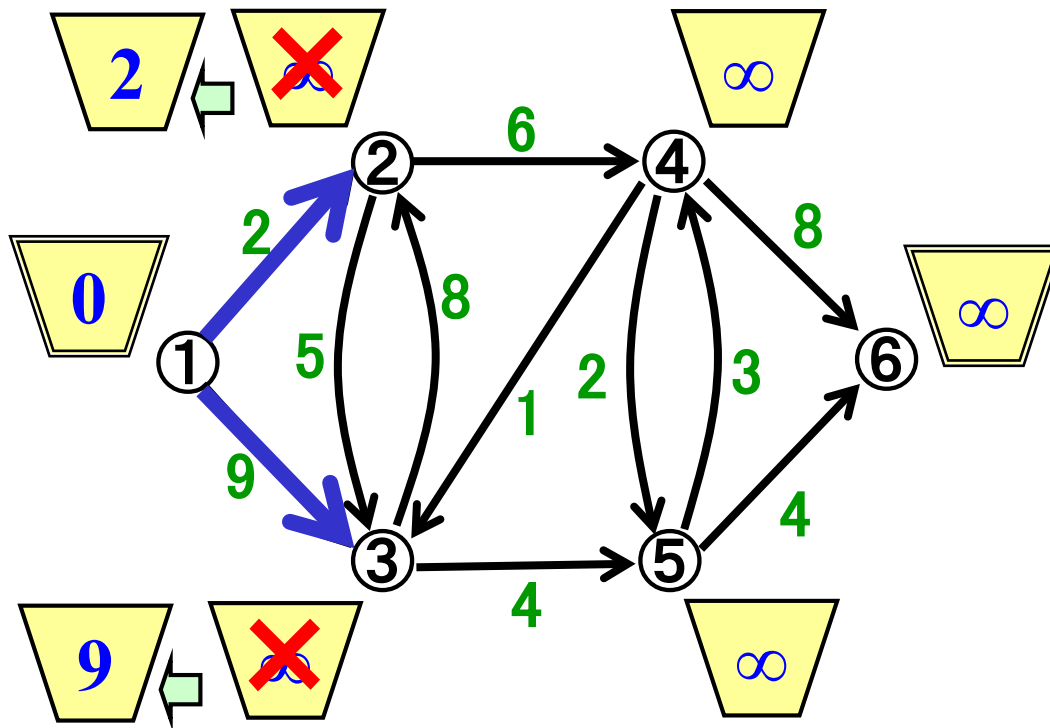
Dijkstra



# 例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(1)

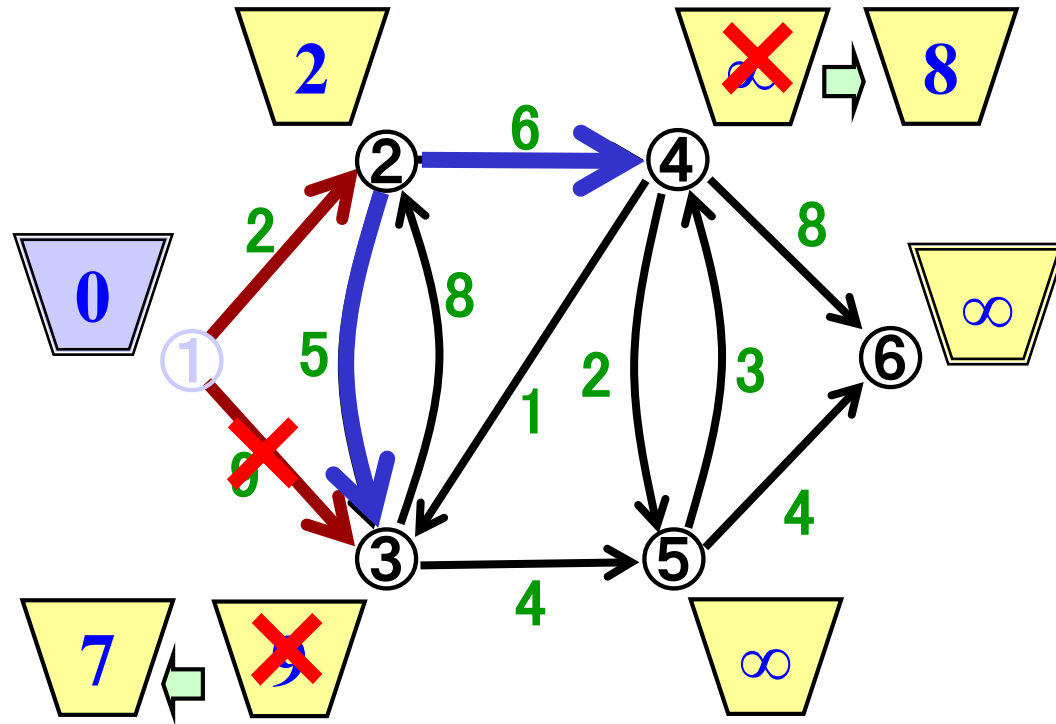
手順: 全点が確定するまで以下を繰り返す

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定



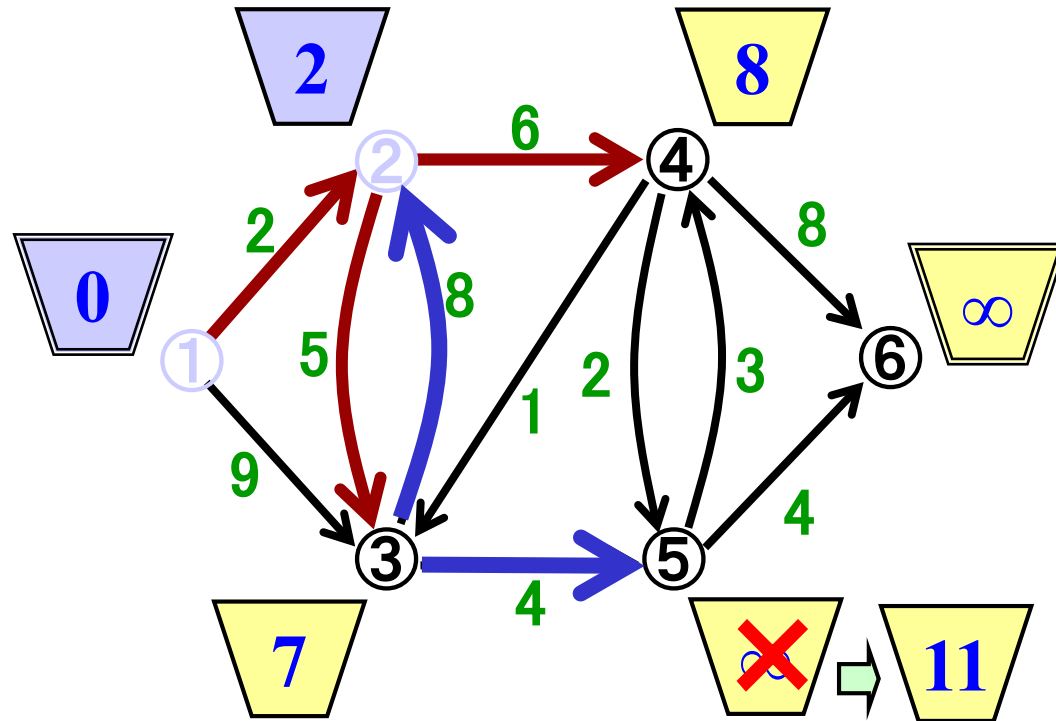
# 例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(2)

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定



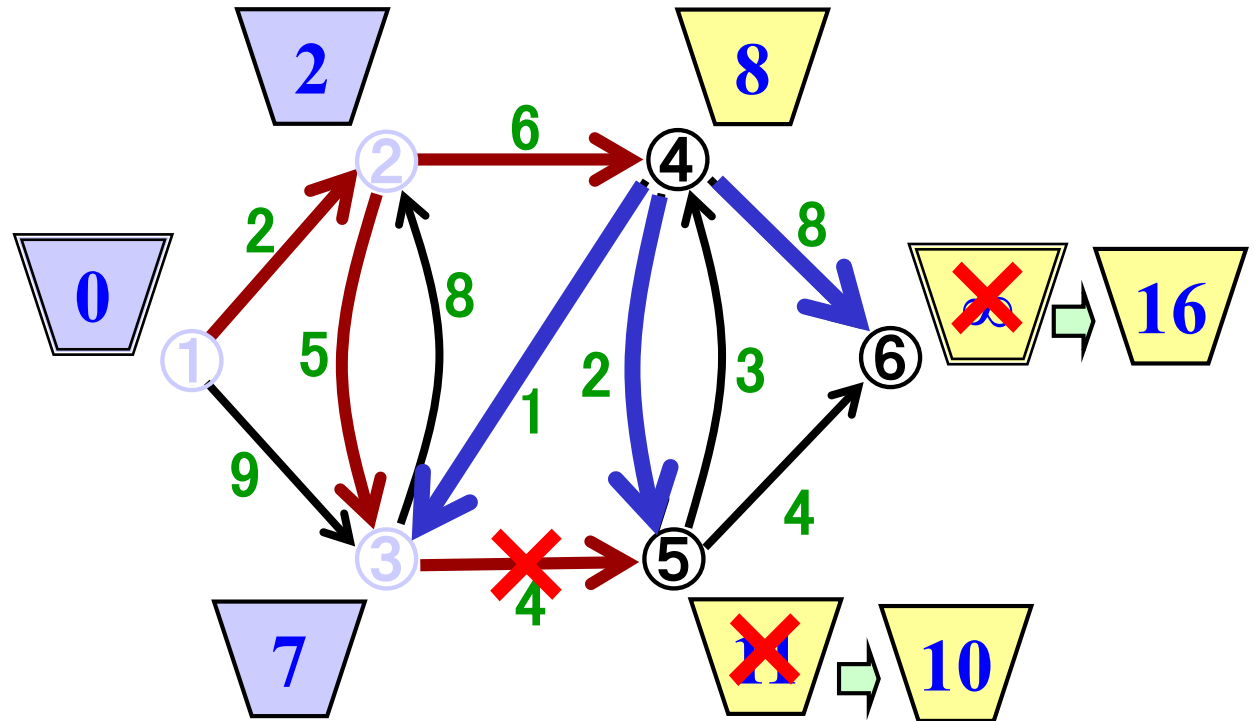
# 例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(3)

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定



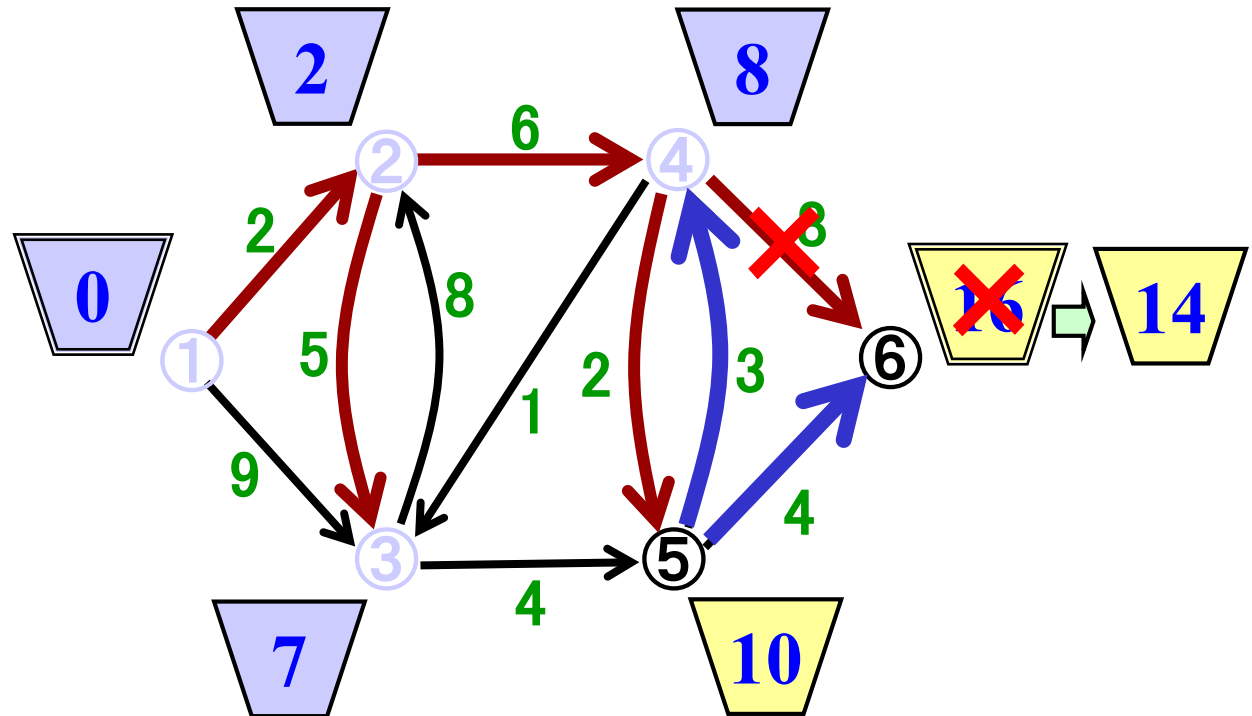
# 例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(4)

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定



# 例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(5)

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定



# 例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(6)

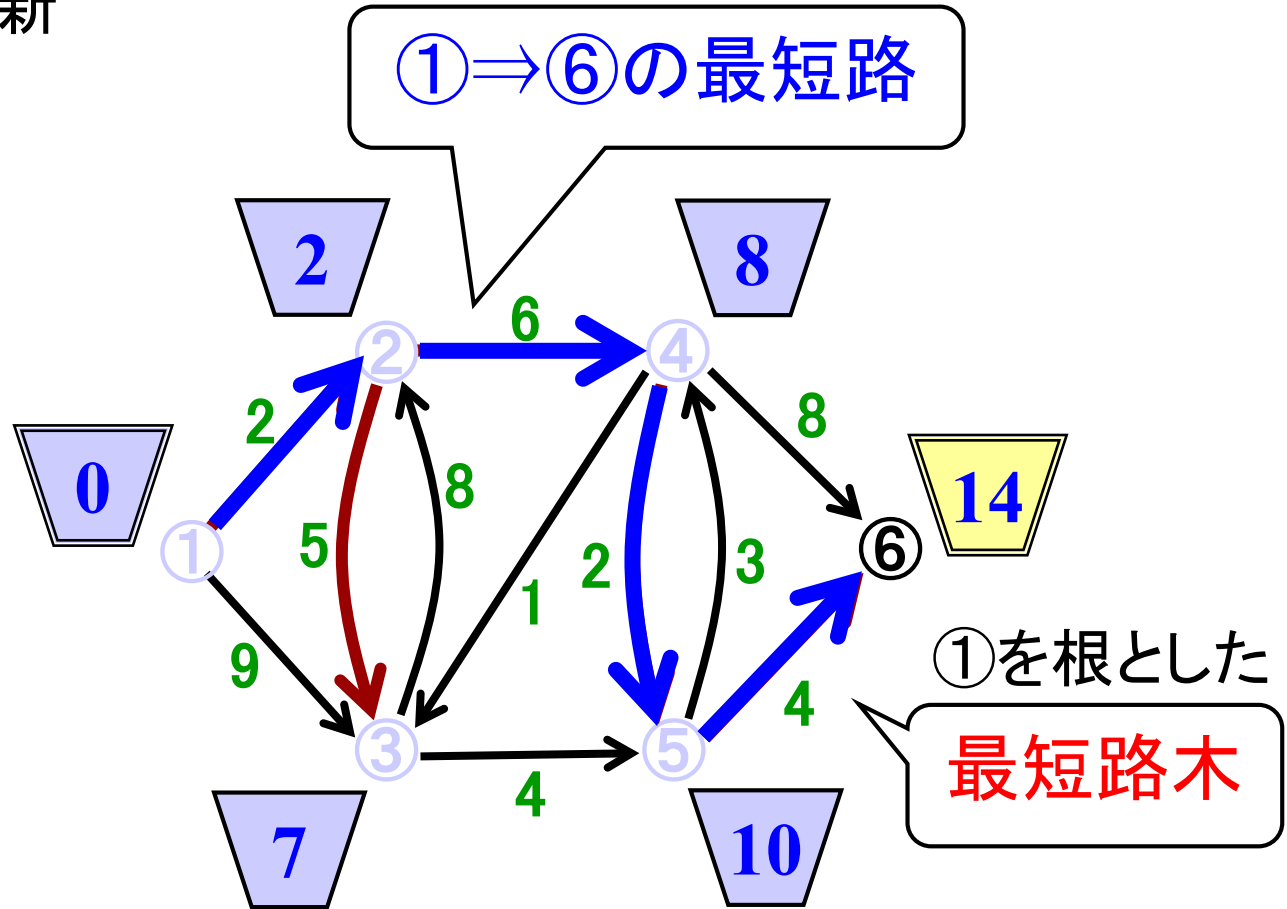
① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定



全点が確定し終了



最適なポテンシャルが見つかった ⇒ 最短路も見つかった

# 練習1 ダイクストラ法

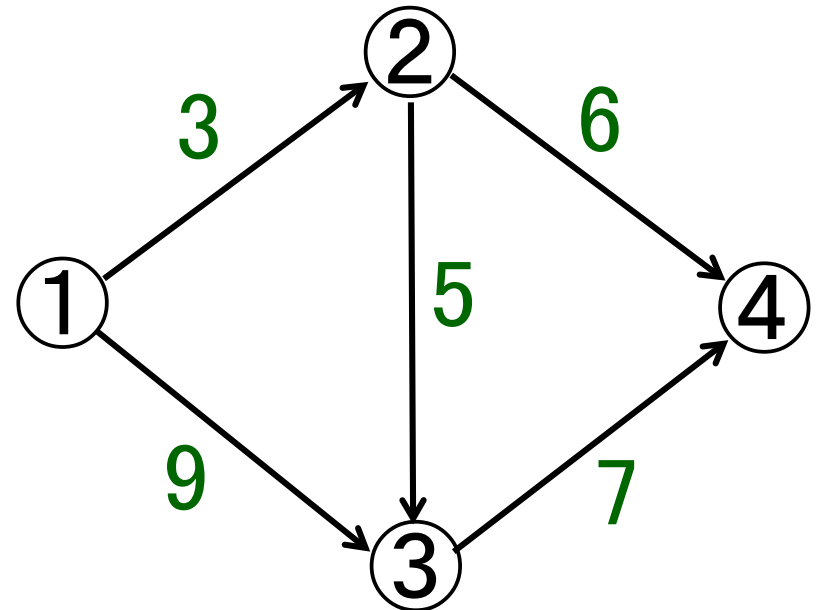
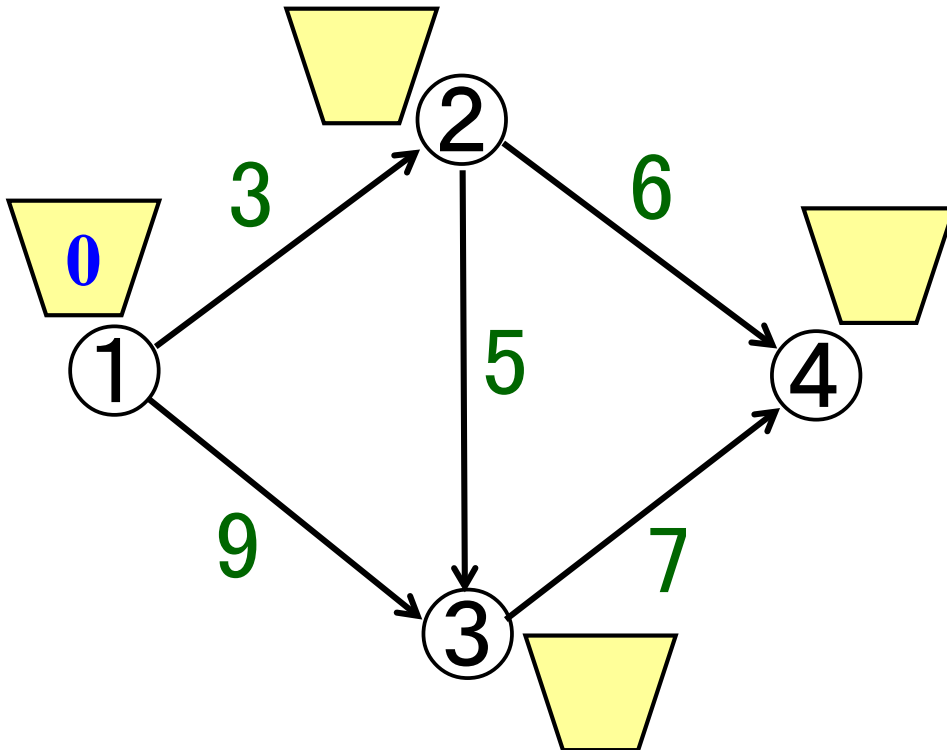
①を根とした**最短路木**は?

→ダイクストラ法で求める



①→④の**最短路**は?

→最短路木をなぞる



①→④の**最短路**の長さは



# 練習1 ダイクストラ法 (解答例)

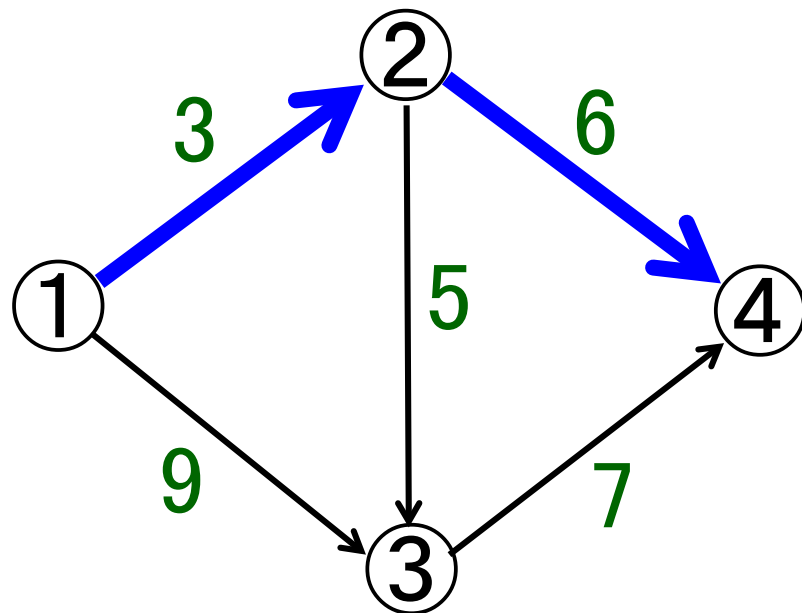
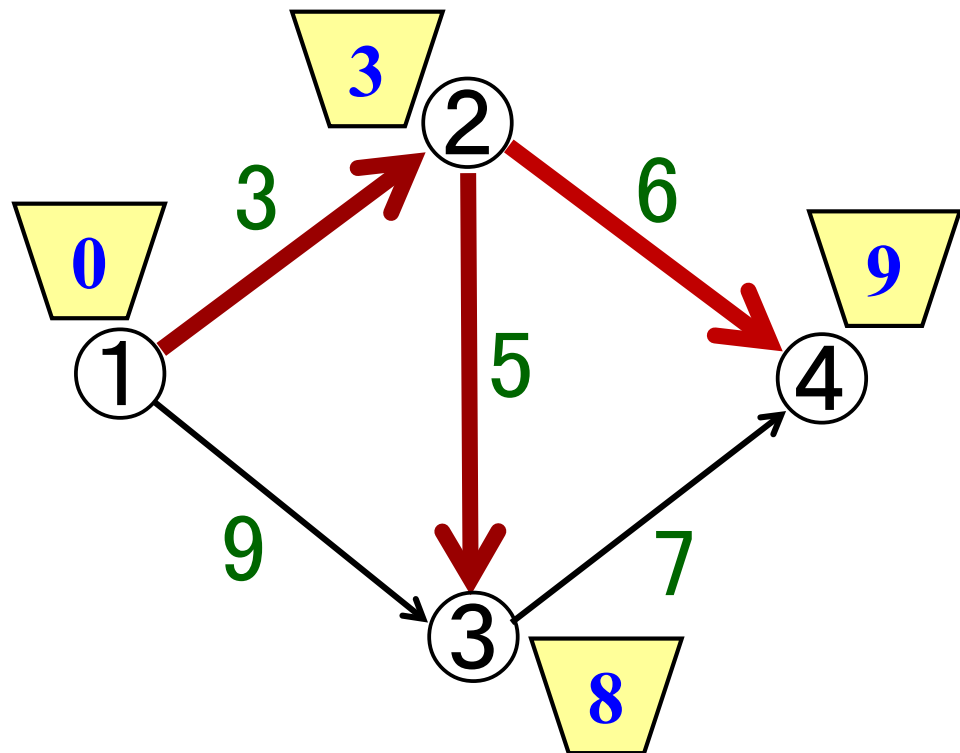
①を根とした**最短路木**は?

→ダイクストラ法で求める



①→④の**最短路**は?

→最短路木をなぞる

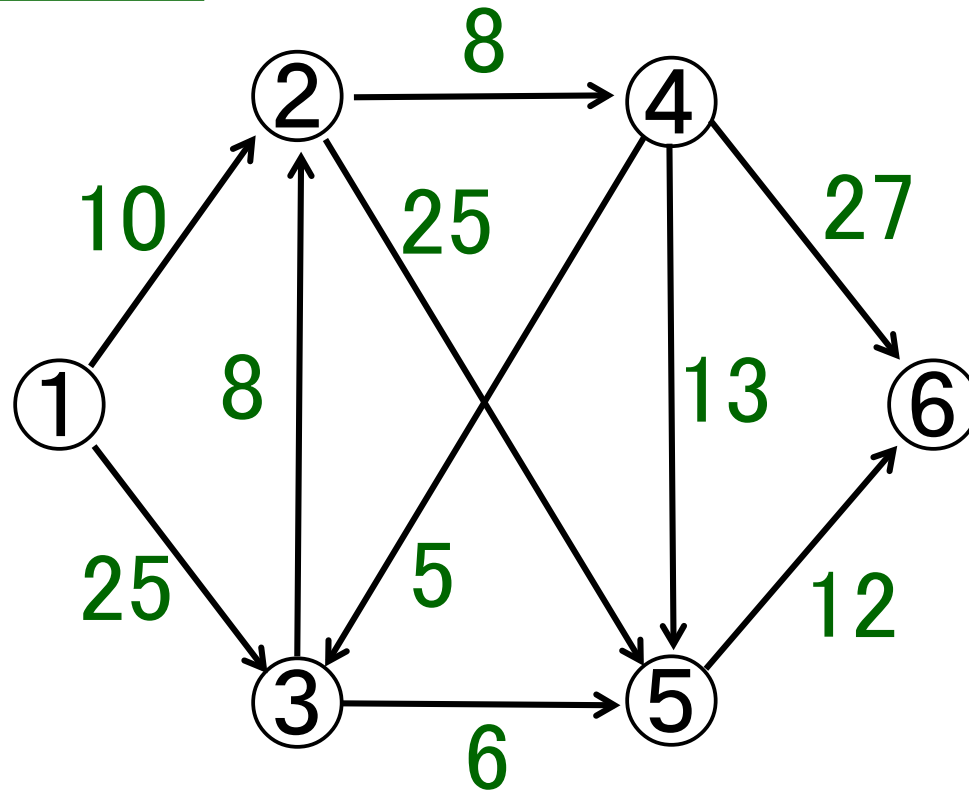


①→④の**最短路**の長さは

9

# 練習2 ダイクストラ法

①⇒⑥の最短路は?

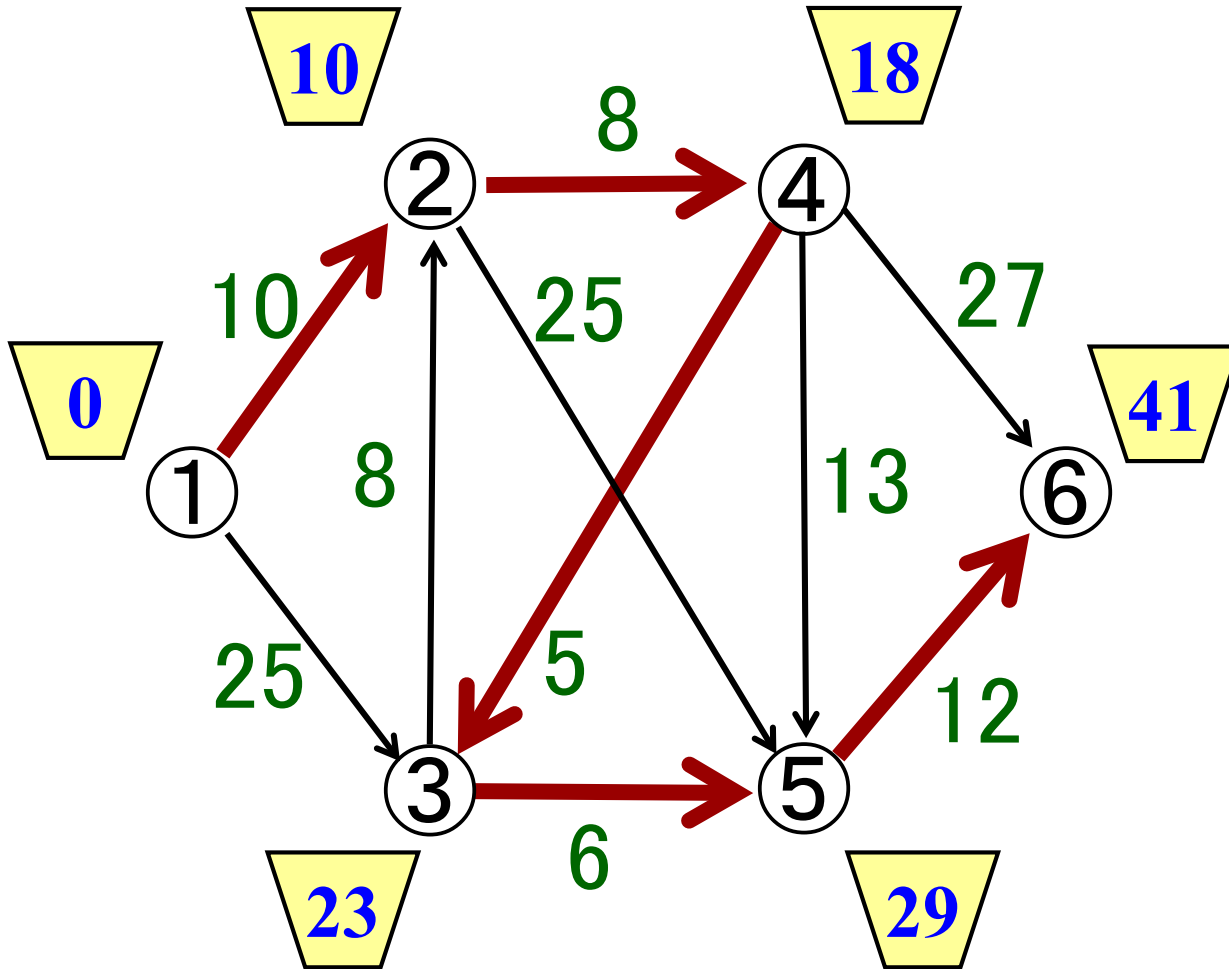


①⇒⑥の最短路の長さは? ⇨

# 練習2 解答例

①を根とした最短路木

※最短路木が最短路になっている



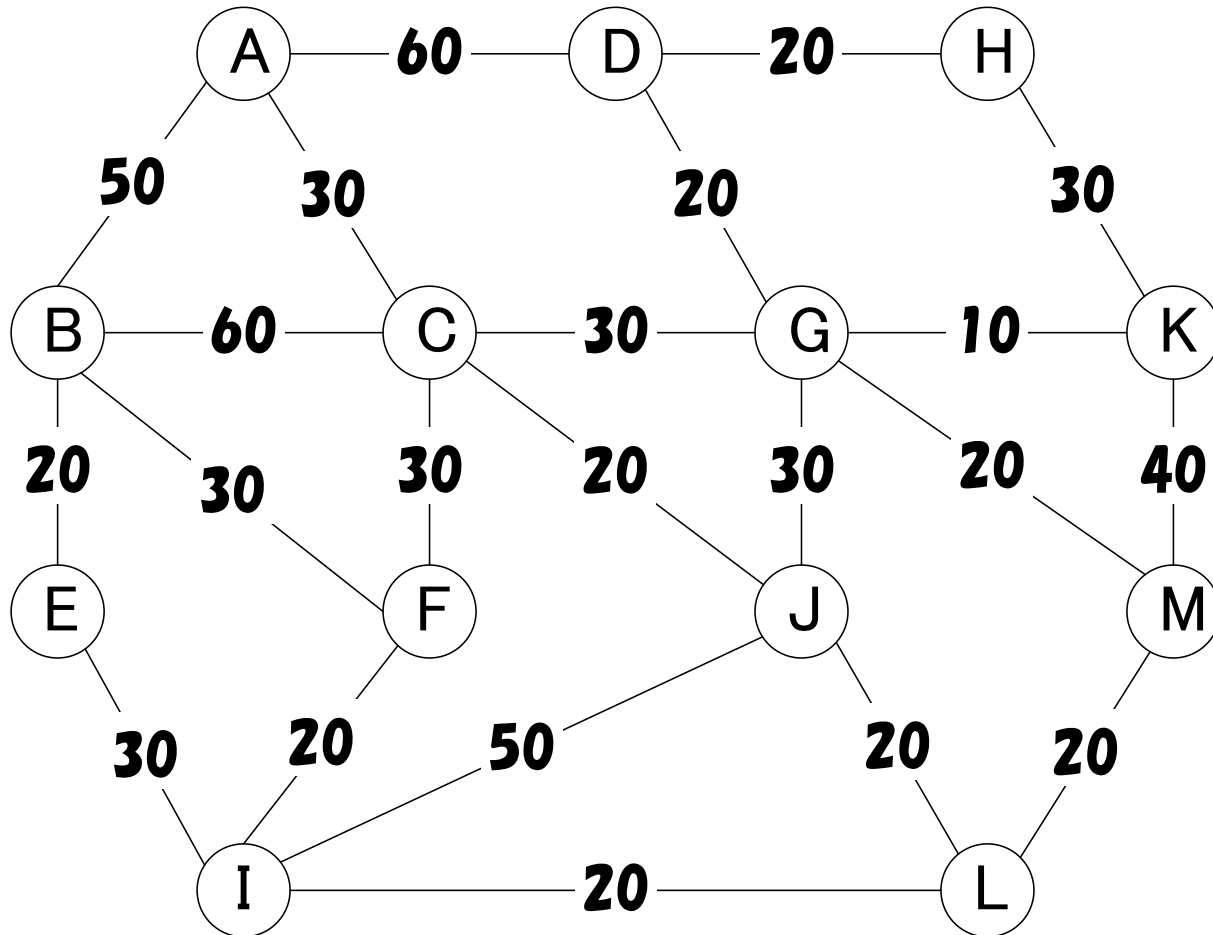
①⇒⑥の最短路の長さは? ⇨ 41

# 練習3 無向グラフの最短路

•E⇒Hの最短路は?

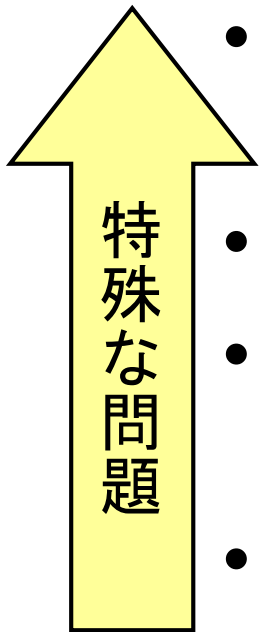
両方向の枝があると考える

→まずはEを根とした最短路木を求める





# 最短路問題のタイプ



- 1始点-1終点間
- 1始点-全点間
- 全点-1終点間
- 全点間

専用的高速解法がある  
かどうかは未解決

利用

中心的なタイプ  
主な解法:  
ダイクストラ法

枝の数値が  
非負の時のみ  
利用可能

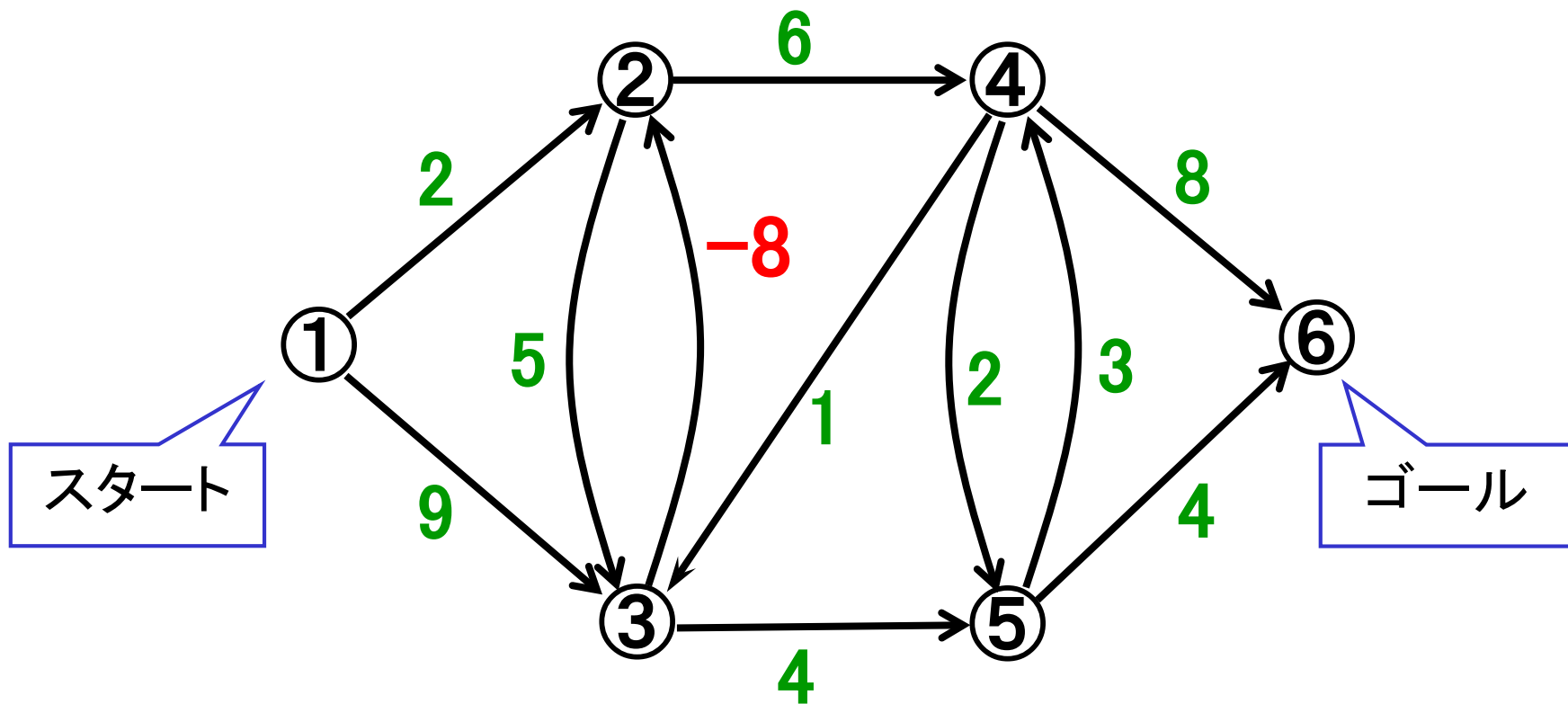
影響

Floyd-Warshall法  
Johnsonの繰り返し法



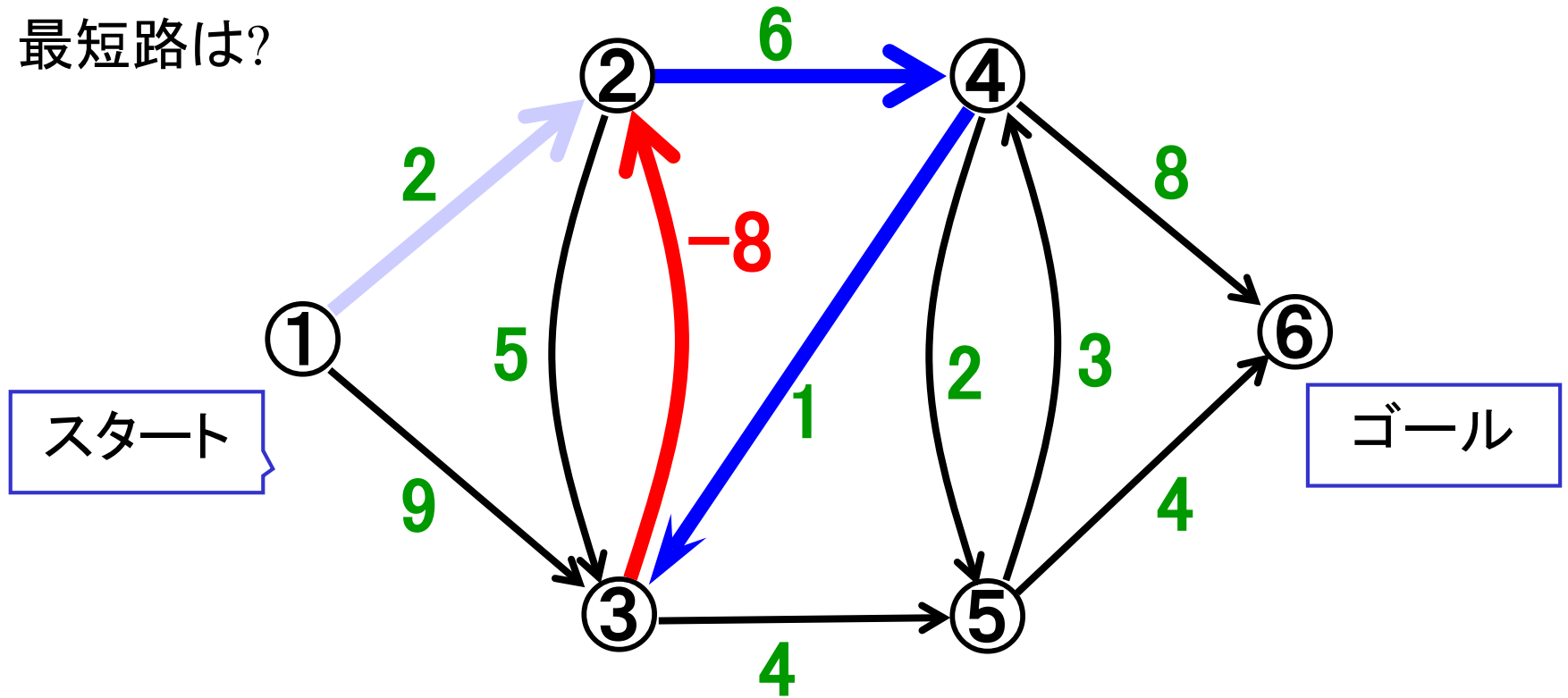
# 例題2 負の長さがある場合

最短路を求めよ



# 例題2(続) 負閉路の存在

最短路は?



ダイクストラ法で実施⇒確定したはずの点が確定できない  
⇒正しい最短路を導かない



負の値があるときは、別な解法を適用(例: **ベキ乗法**)



# 応用例1 端末取替

5年契約で端末リースを受けたい

費用は、5年分のリース料と維持費の合計

## 端末リース料

## 端末維持費

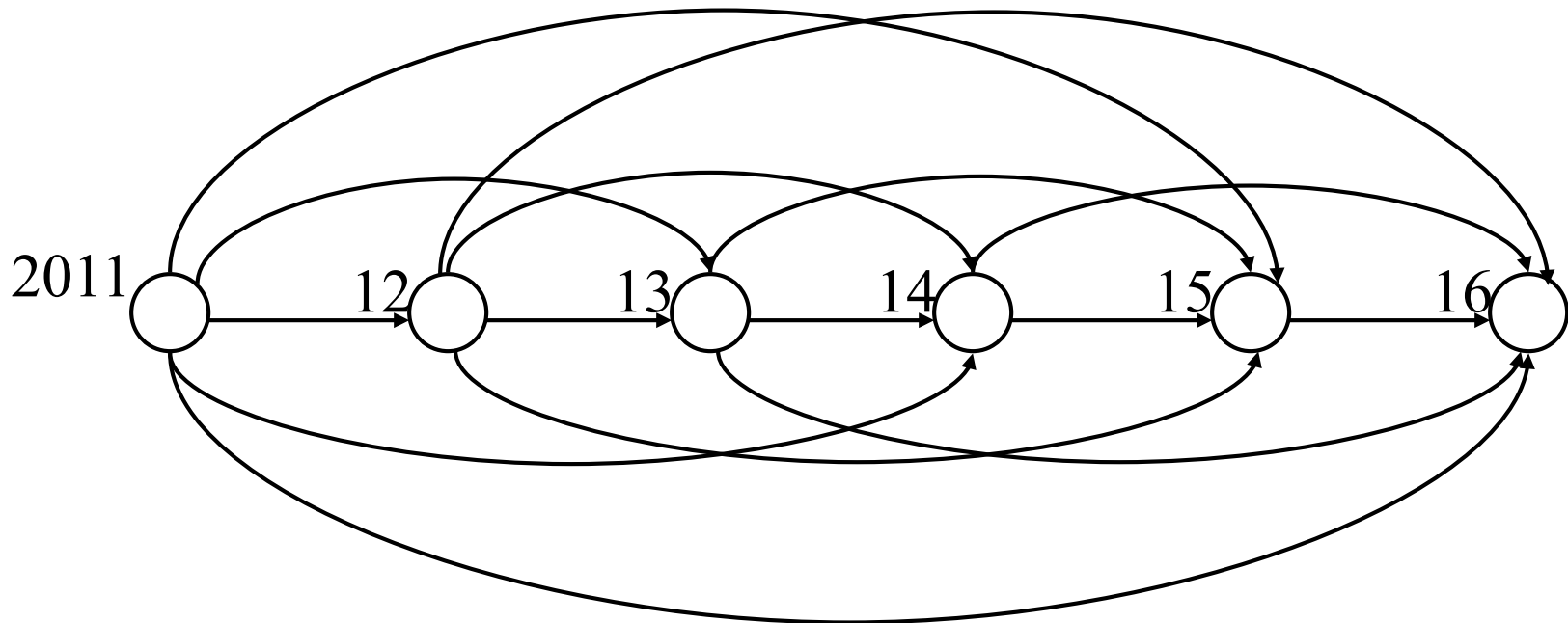
から

	12年	13年	14年	15年	16年	まで
2011年	5	9	13	15	19	
2012年		6	10	17	17	
2013年			7	15	15	
2014年				9	12	
2015年					11	
				(百万円)		

1年間	1
2年間	3
3年間	6
4年間	11
5年間	16
	(百万円)

5年間の最も安価な契約内容を提案せよ

# 応用例1(続き) ネットワークで表現しよう



- 費用最小な取替計画を見つけてみよう
- 最短路問題との関連は?

# 応用例2

文教警備では9時から17時までの正門警備を請け負った。  
正門警備は常時1人の警備員が居ればよい（複数人でも可）。

警備員採用候補者は5名。勤務時間・給与は固定。給料支払総額を最小になるよう採用者を決定せよ。

採用候補者	A	B	C	D	E
勤務時間(固定)	09-11	09-15	11-15	11-17	13-17
給料(固定)	¥6000	¥18000	¥10000	¥1900	¥8000

ヒント：



9, 11, 13, 15, 17時を点に対応させた  
「あるネットワーク」で問題を表現してみよう。  
→最短路問題で解けるよ。

# ダイクストラ法的高速実現法

ポテンシャル最小の点を高速に発見する

- 未確定点を配列でなくリスト構造で保持  
(走査する点数を減らす)
- 未確定点をポテンシャルの値順に整列  
→ 整列アルゴリズムの知識が必要

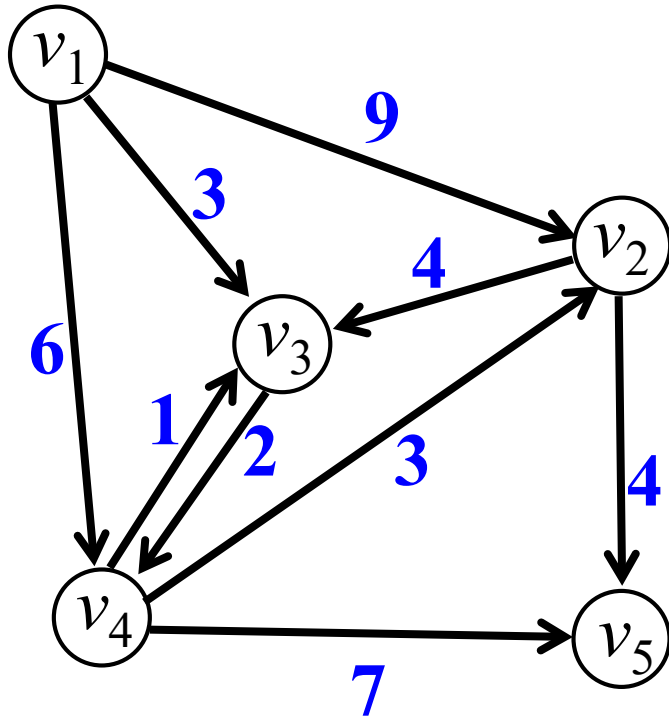
効率的実装に

基本的なアルゴリズム+  
データ構造の知識は  
不可欠

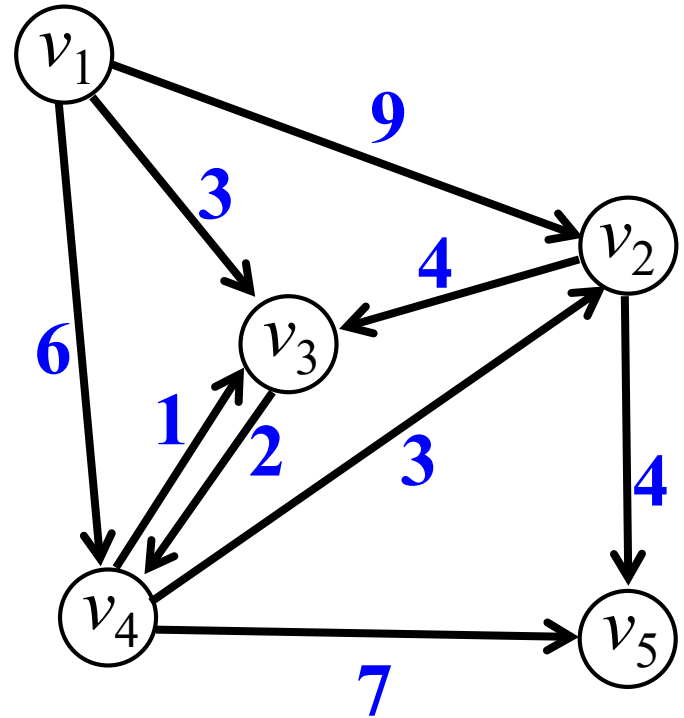


# 演習6-1

(1) 点 $v_1$ を根とした最短路木を求めよ.



(2) 点 $v_1$ から点 $v_5$ への最短路を求めよ.



(3) 点 $v_1$ から点 $v_5$ への最短路の長さは？

# 演習6-2



文教警備では9時～17時までの警備を契約社員でまかなう。  
警備は常時1人いればよい(複数人いても問題はない)。  
候補者8人をリストアップした。契約上労働時間帯も給料も変更不可。

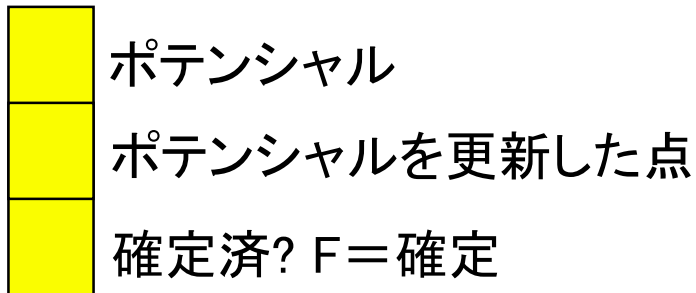
候補者	A	B	C	D	E	F	G	H
労働時間帯	9-12	9-11	10-13	12-15	12-17	13-16	14-17	16-17
給料	31	14	16	22	38	26	15	9

支払う給料の合計を最小にしたい。

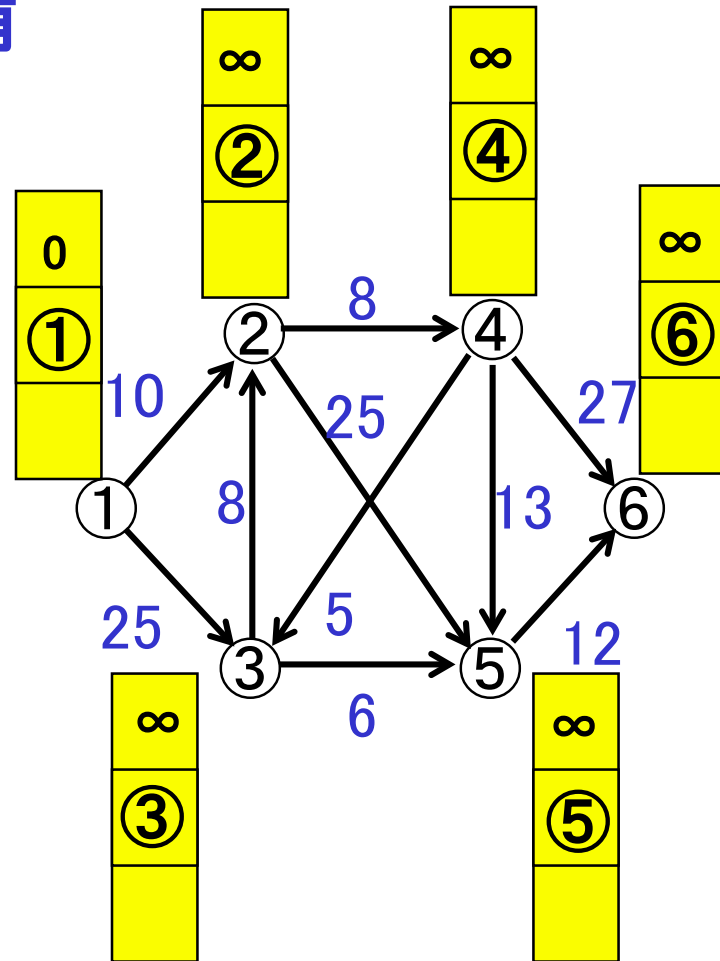
- (1)採用者と警備計画(誰がどの時間帯に警備するか)を提案せよ。
- (2)依頼者から9時～15時の警備に変更したいとの連絡があった。  
採用者と警備計画(誰がどの時間帯に警備するか)を提案せよ。

# 練習1 解答例詳細

①⇒⑥の最短路は?

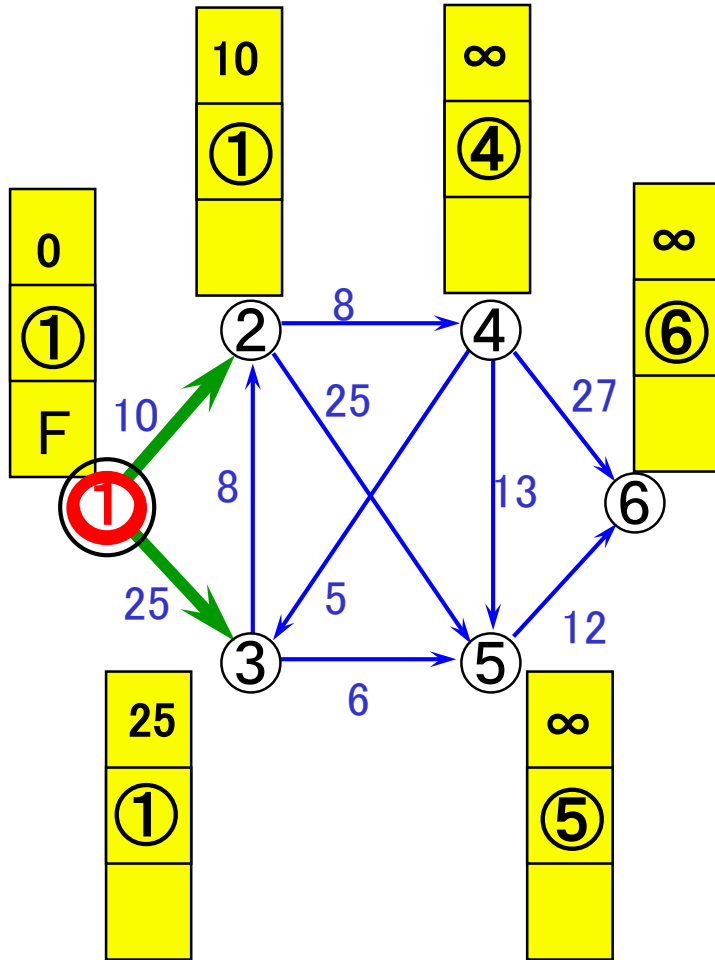


準備

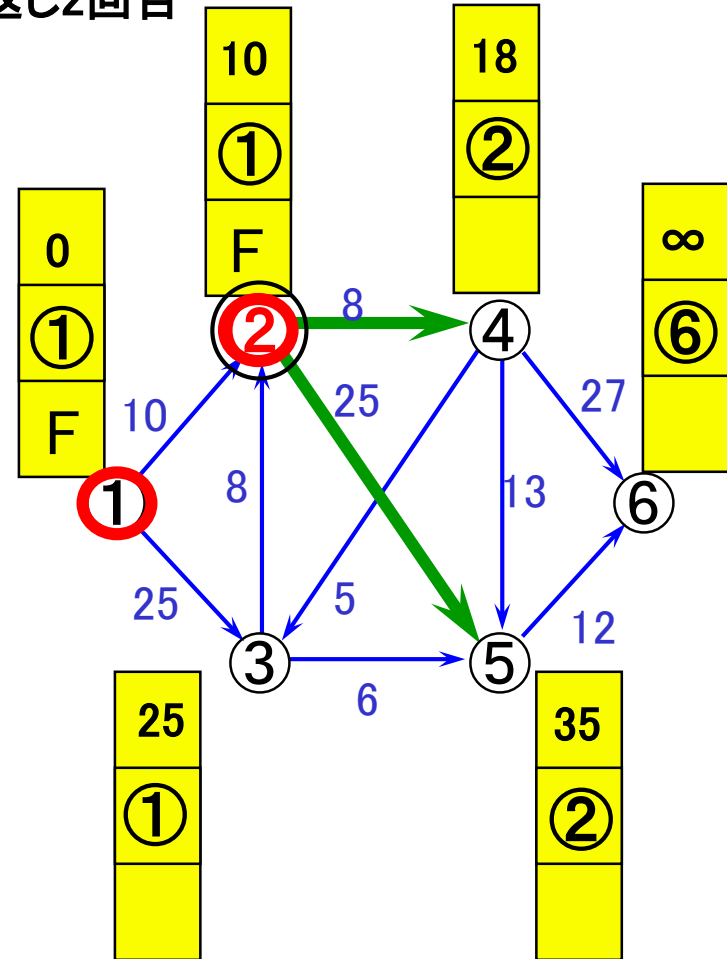


# 練習1 ポテンシャルの更新

繰り返し1回目



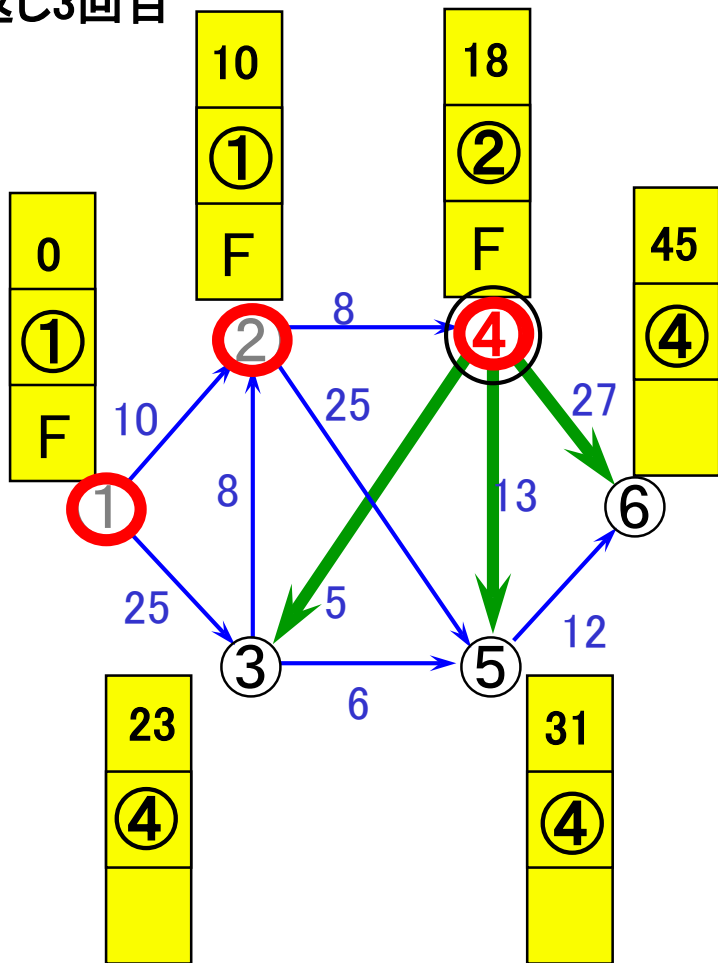
繰り返し2回目



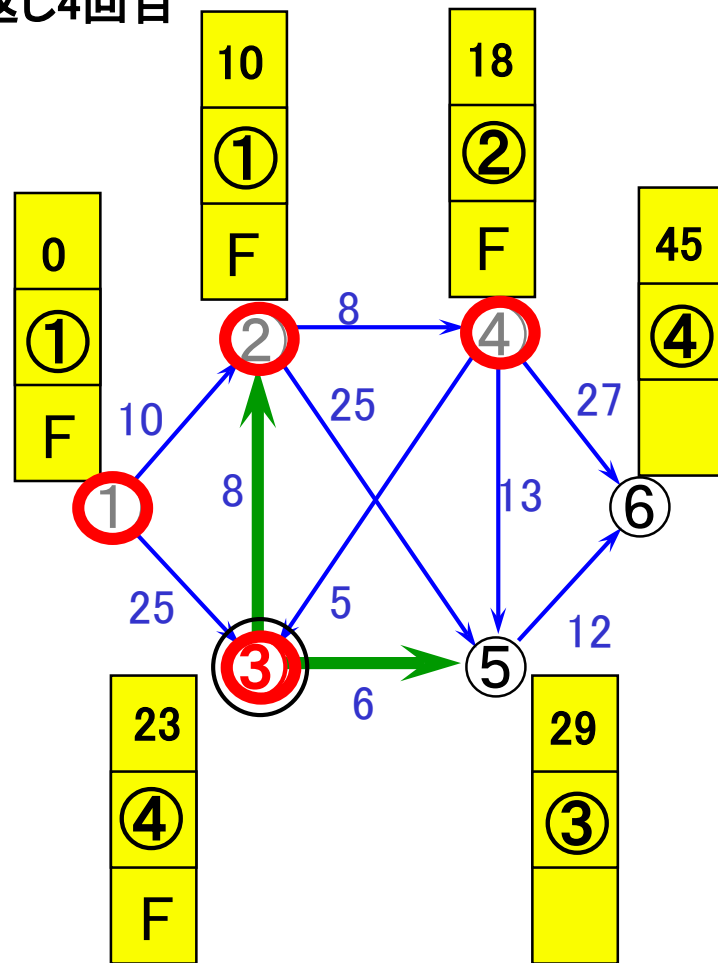


# 練習1 ポテンシャルの更新(2)

繰り返し3回目

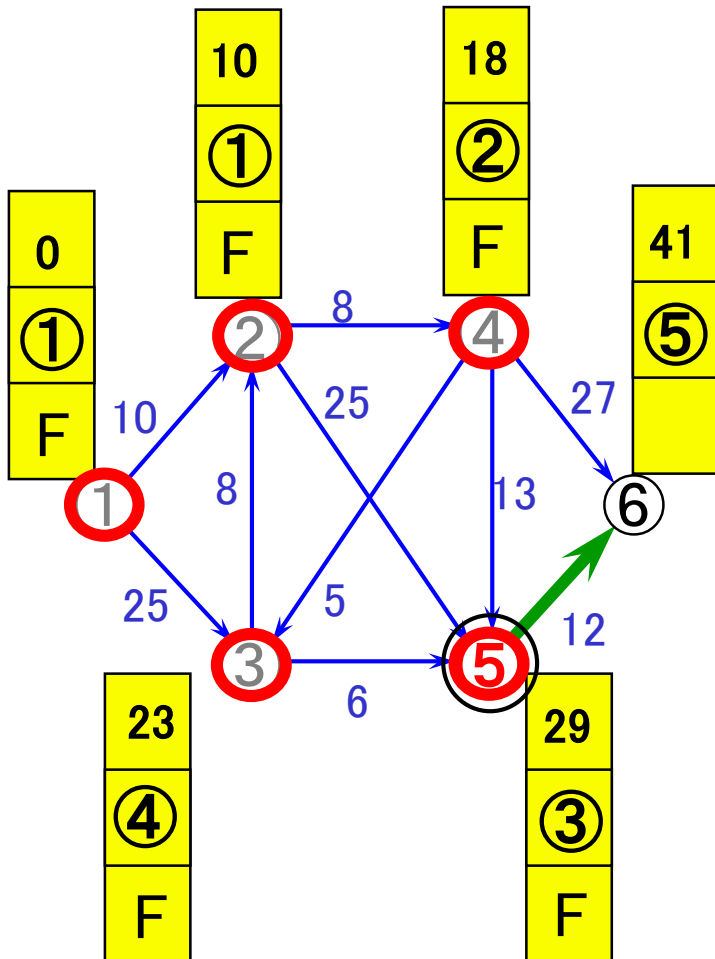


繰り返し4回目

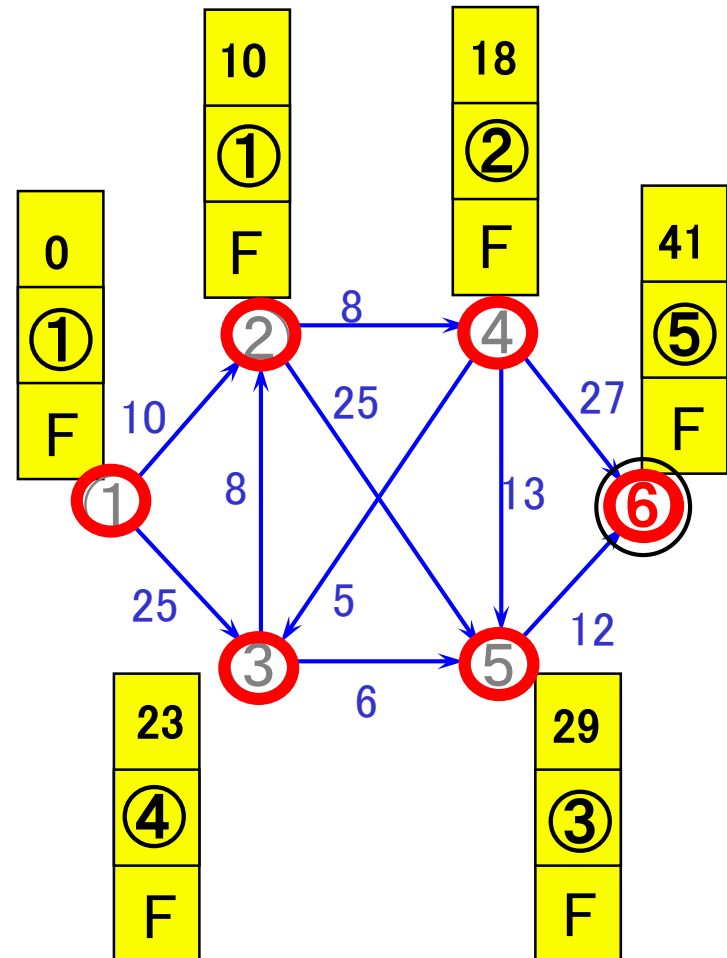


# 練習1 ポテンシャルの更新(3)

繰り返し5回目

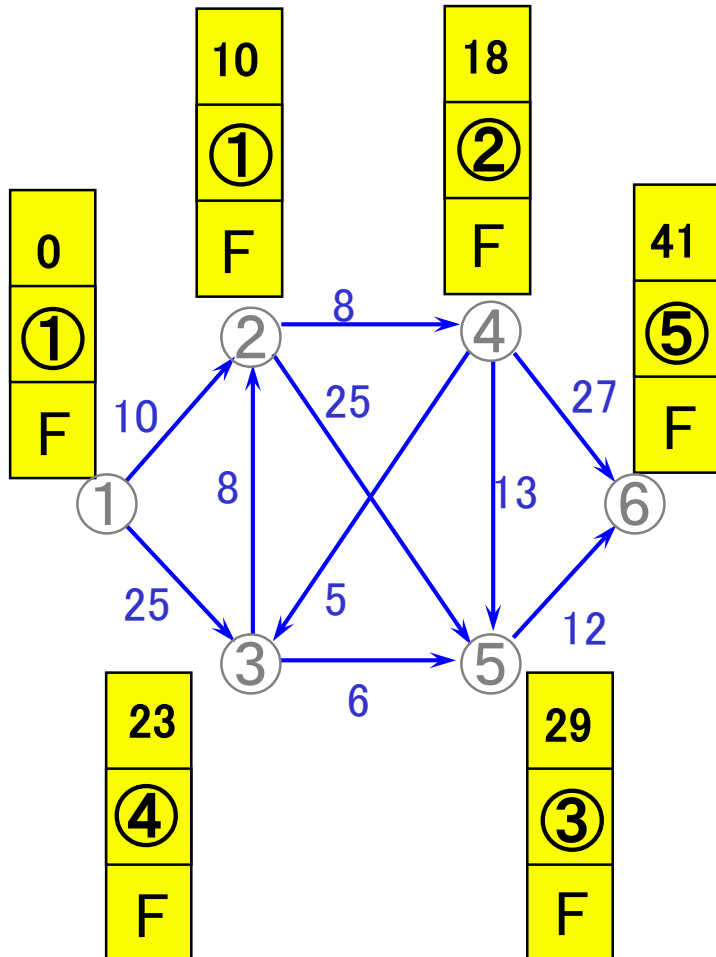


繰り返し6回目



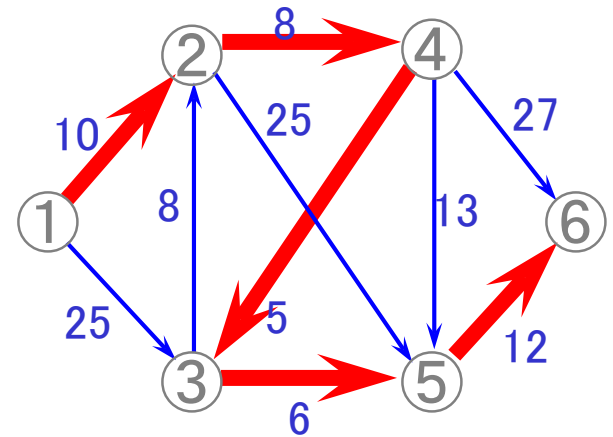
# 練習1 解答例 まとめ

繰り返し6回目



①を根とした最短路木

終了



最短路の長さは41