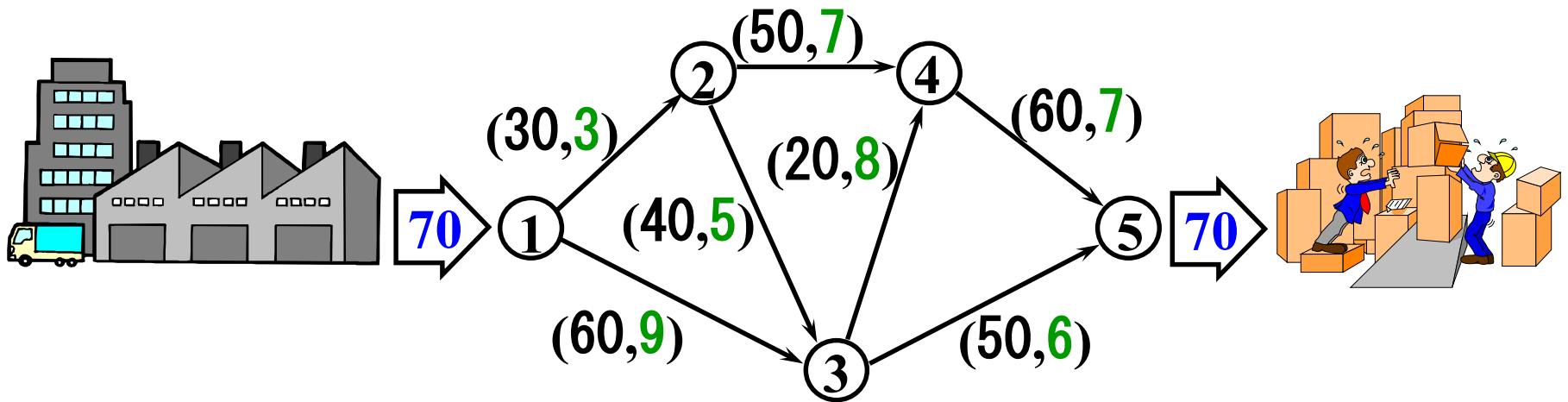


Network Programming IV



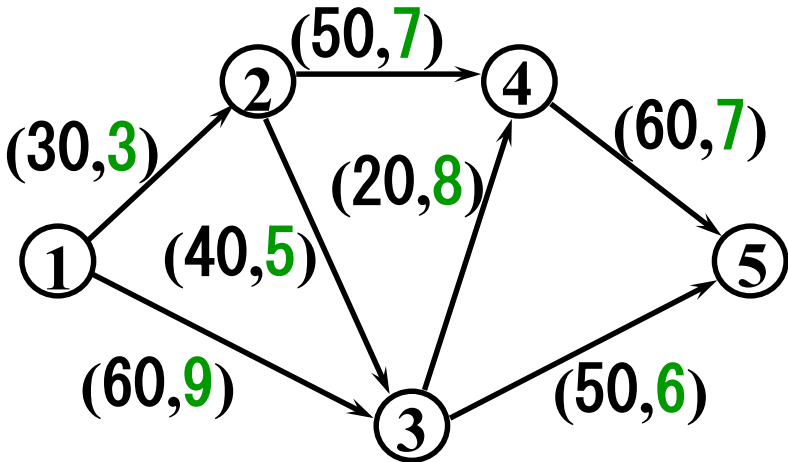
例題1 輸送作戦

文教工業では工場から倉庫へ70トン製品を輸送したい。最も費用の安い輸送計画を提案してほしい。

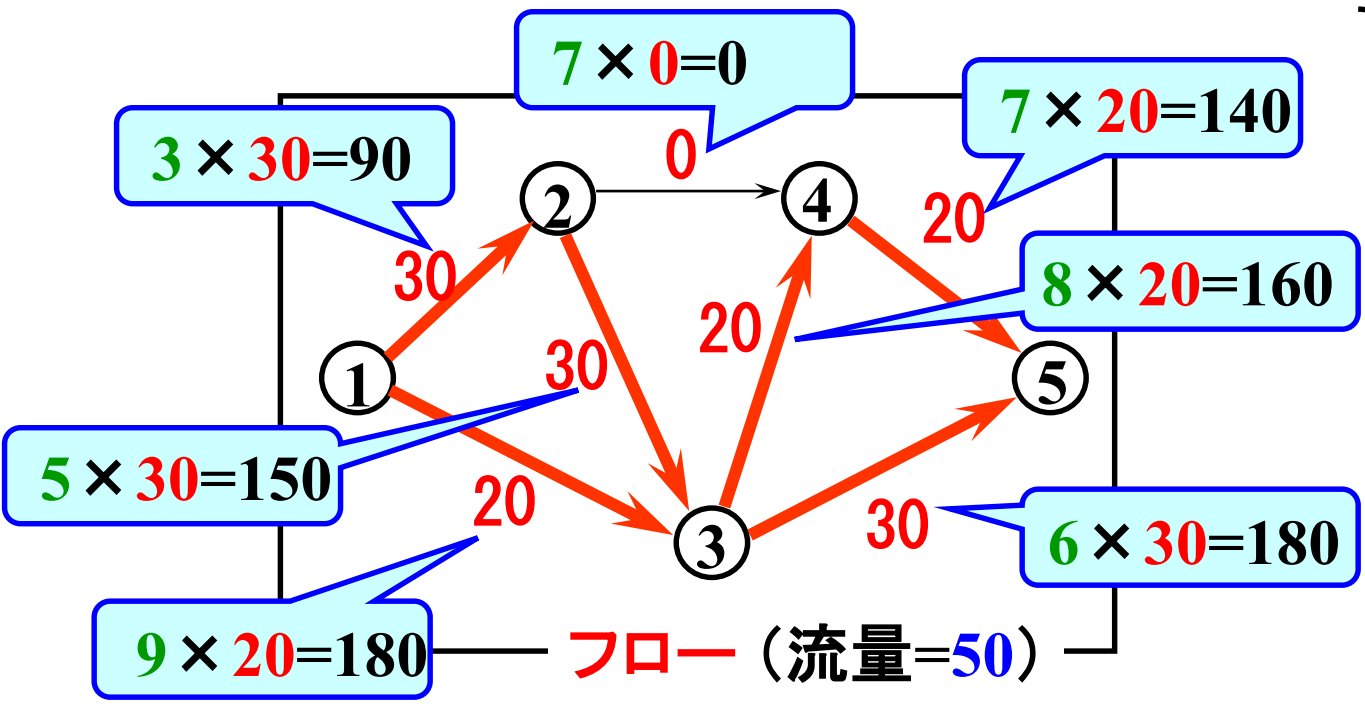


(枝の容量(トン), 1トン当たりの費用(万円))

フローにより 生じる費用



単位フロー当
たりの費用 × フロー



このフローに
対する費用
900

最小費用フロー問題

目的 フローにより生じる費用→最小

条件 指定された流量の実行可能フローであること

最小費用フロー: 指定された流量を持つ
費用最小の実行可能フロー



最小費用流問題に対する主な解法

- **負サイクル法**

- コストがより下がる閉路を見つけて更新する.
- 簡単. 工夫次第でより高速にできる.

- **最短路繰返し法** (→主双対法)

- コスト最小路にフローを流す手続きを繰返す.
- 簡単. 工夫次第でより高速にできる.

- **ネットワーク単体法**

- 実用的解法.

他多数の解法が提案されている.

最短路繰返し法

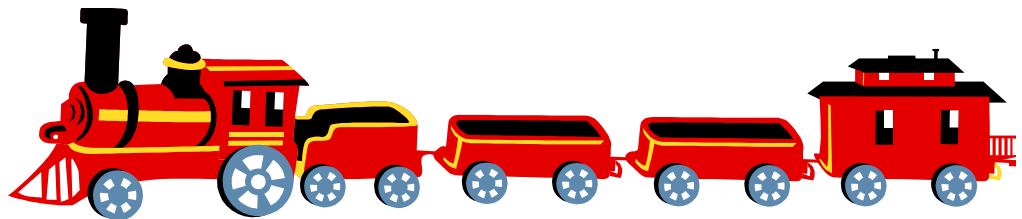
手順1:全枝のフローを0と置く.

手順2:以下を指定流量が得られるまで繰返す.

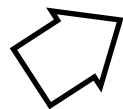
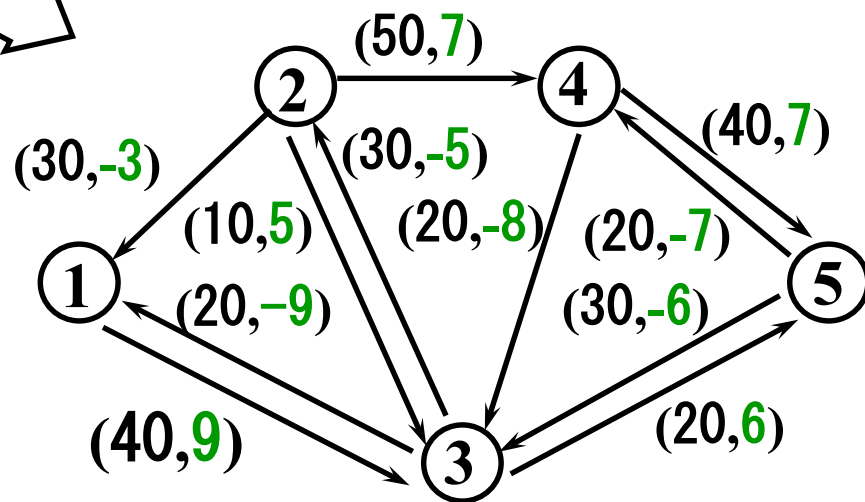
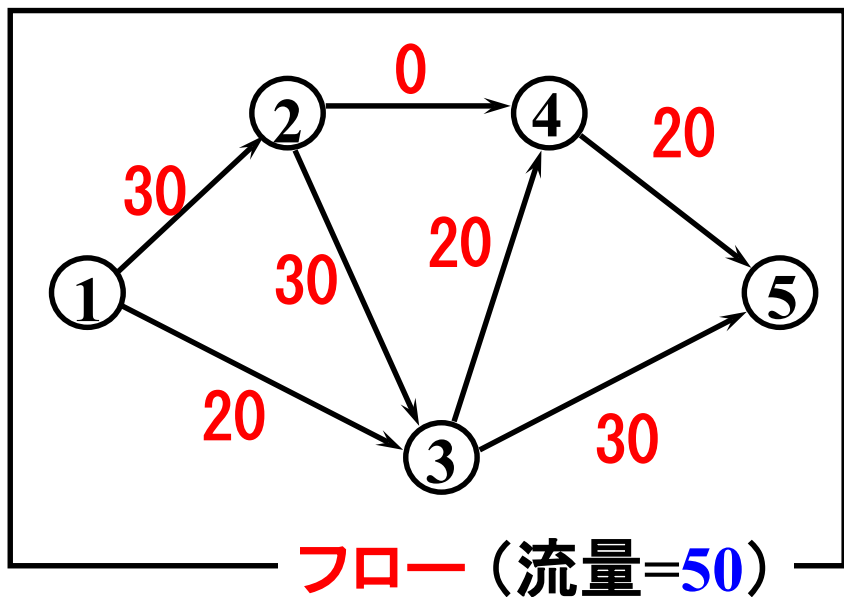
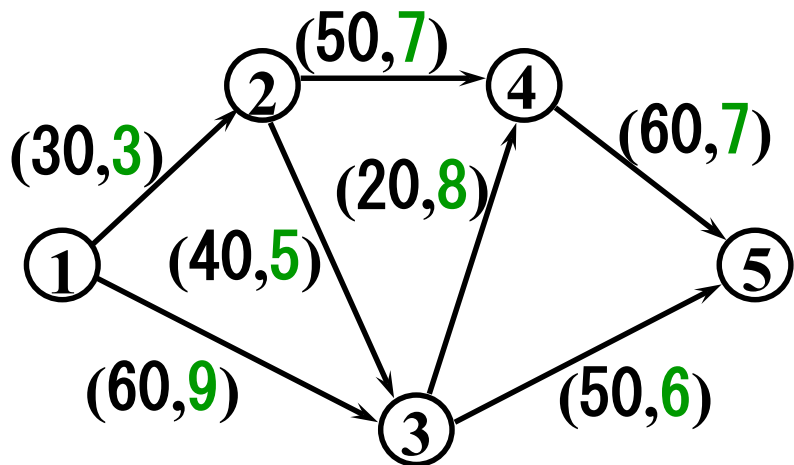
(1) **残余ネットワーク**を作る.

(2) 残余ネットワーク上で供給点から需要点への**コスト最小の路**(最短路)を求める.

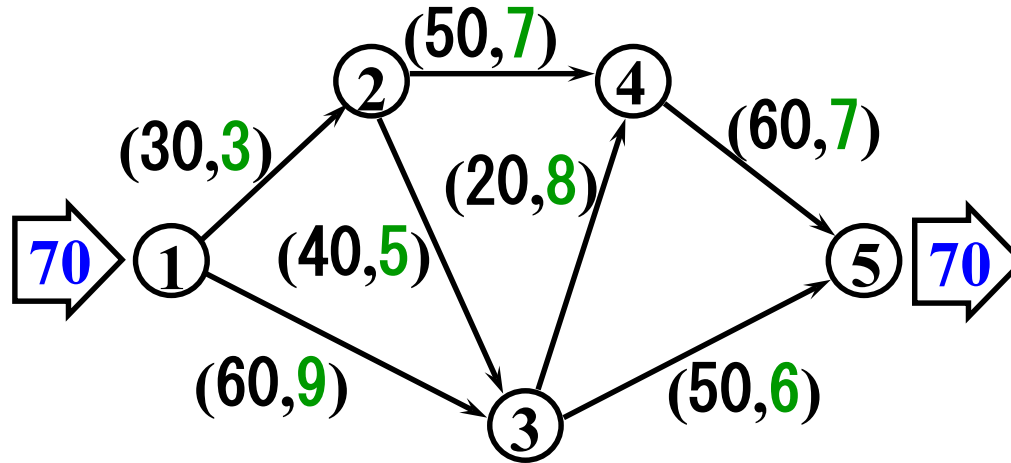
(3) 最短路に沿って流せるだけ**フローを流す**.



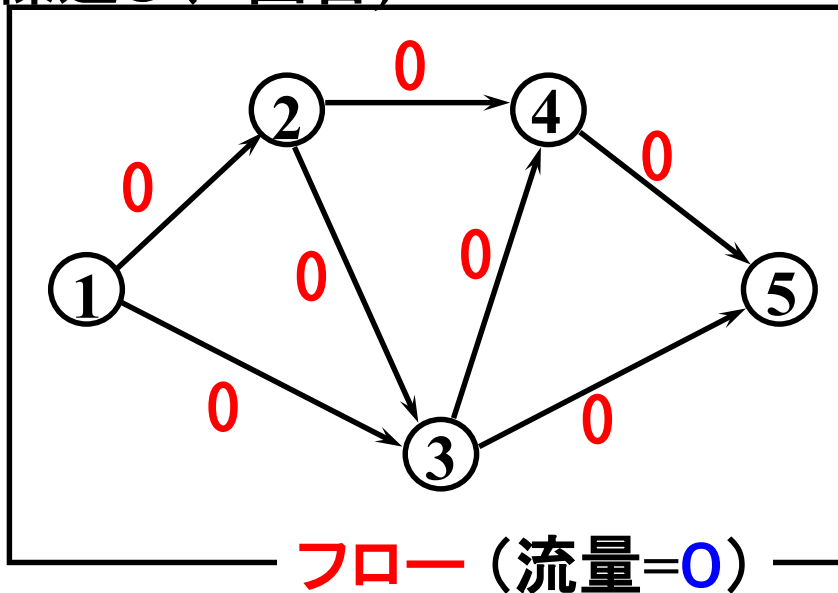
最小費用フローでの 残余ネットワーク



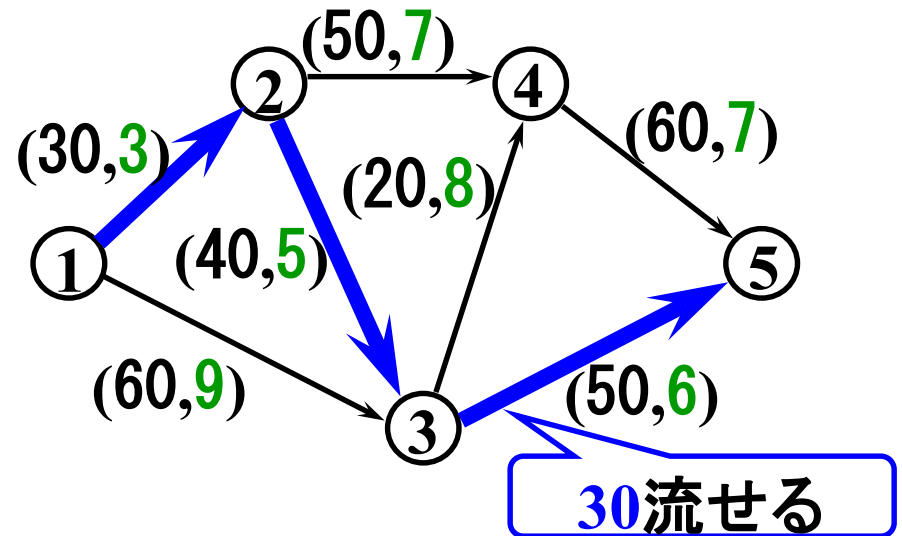
例題2 最短路繰返し法



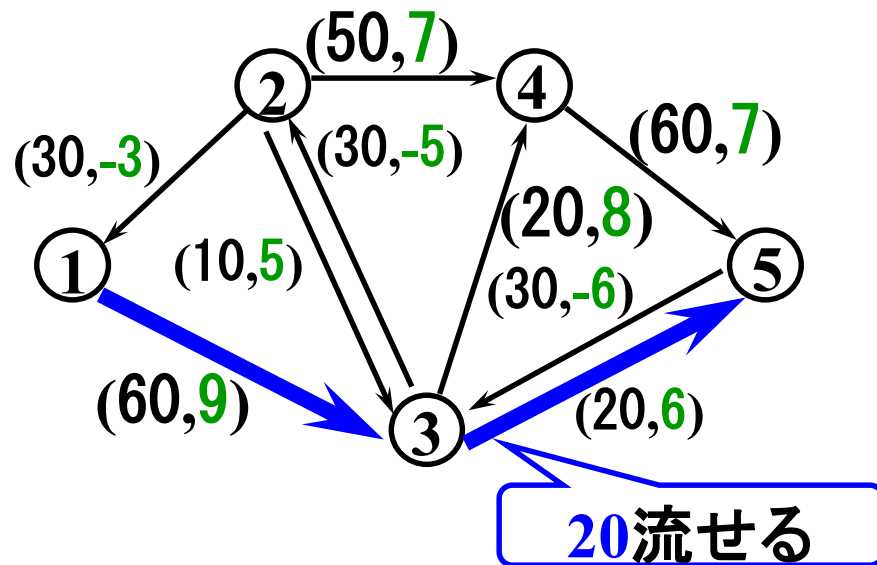
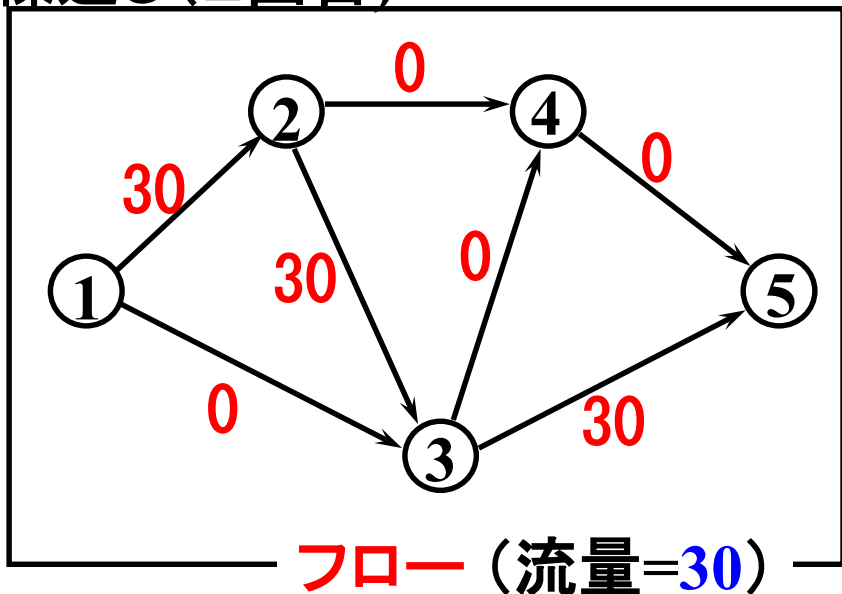
繰返し(1回目)



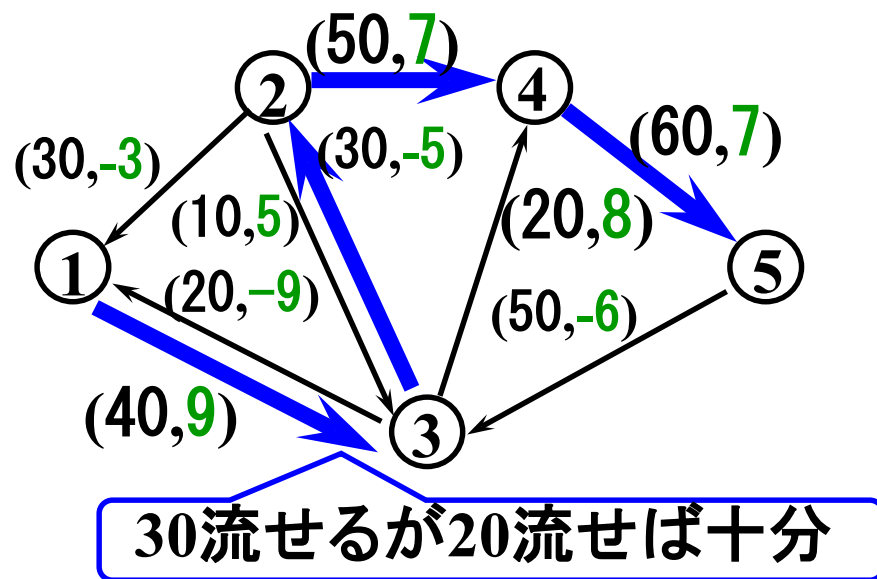
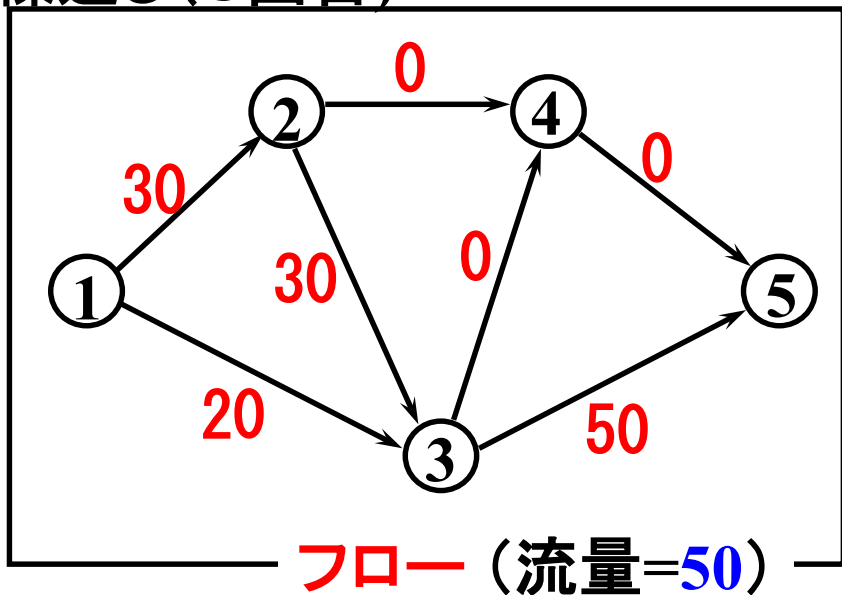
残余ネットワーク



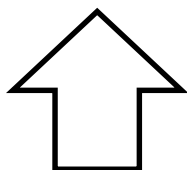
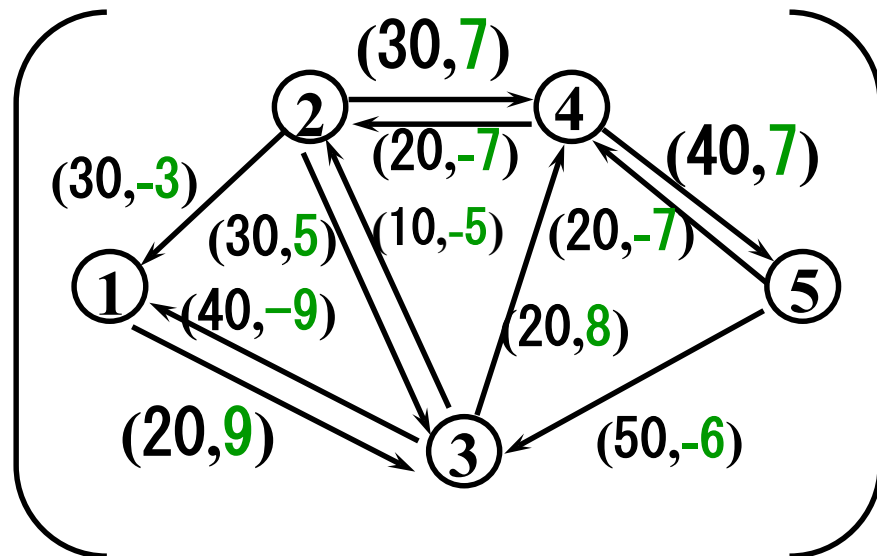
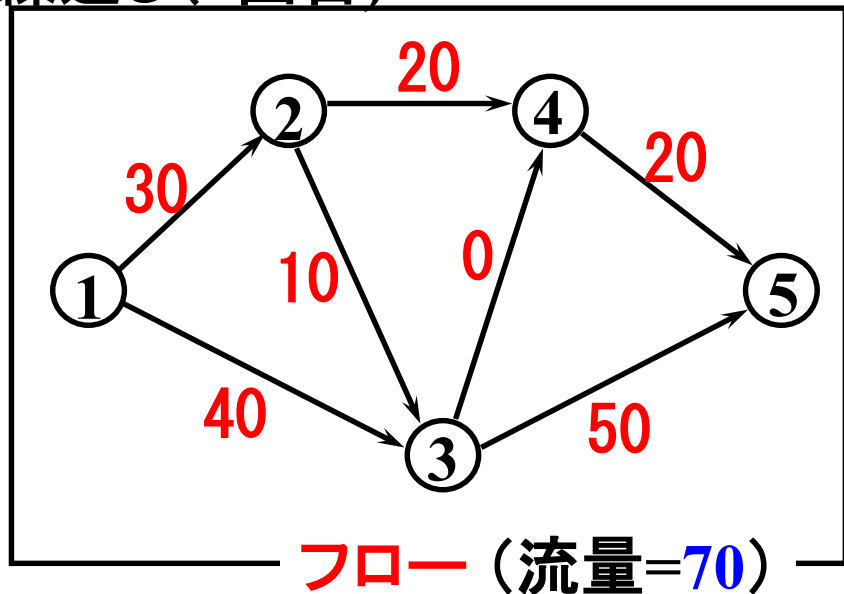
繰返し(2回目)



繰返し(3回目)



繰返し(4回目)

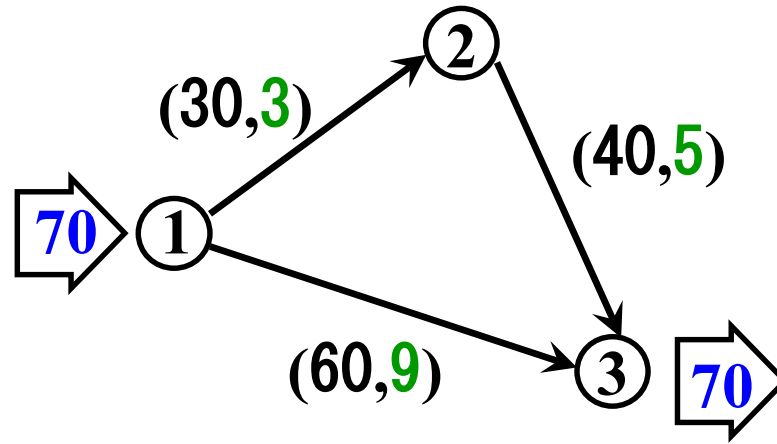


流量が供給量の70に到達したので終了.

流量70の最小費用フロー

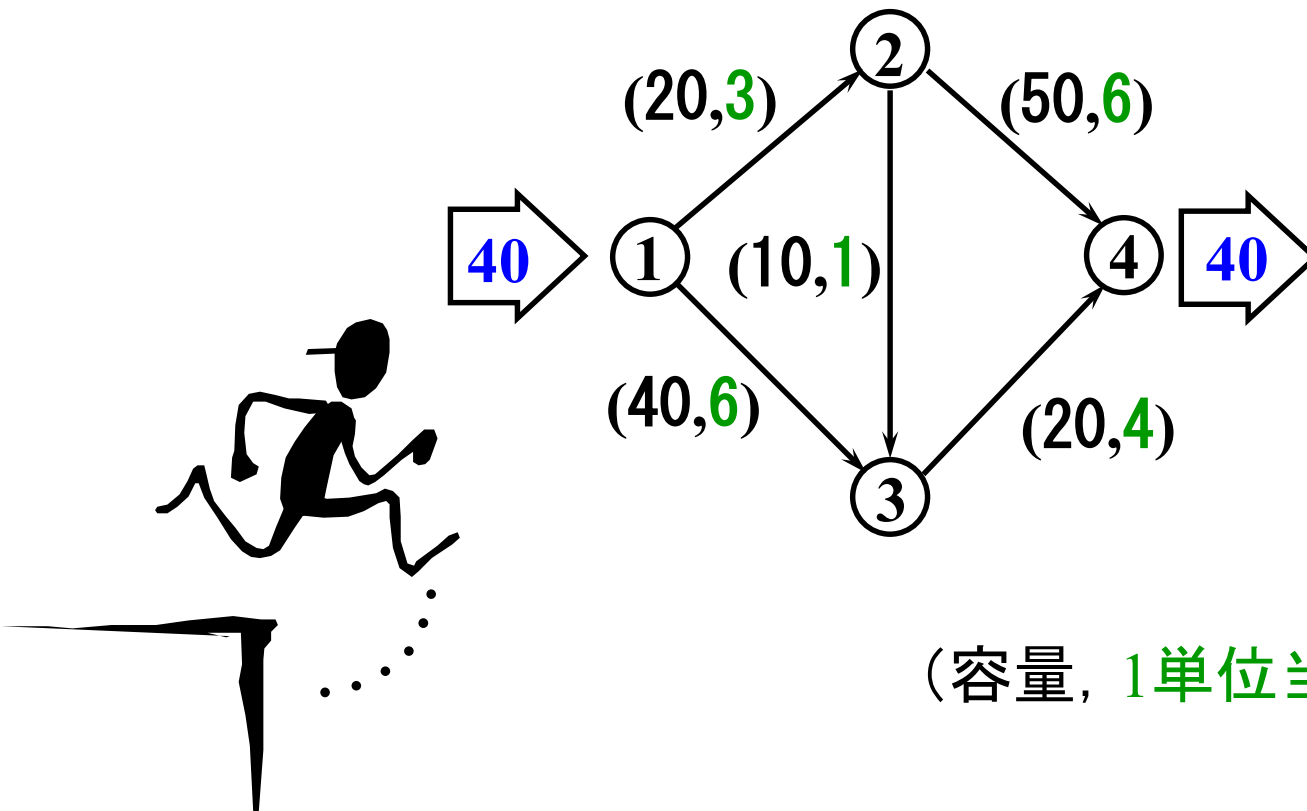


練習



演習1

流量40の最小費用フローを求めよ. また, その時の費用を求めよ.

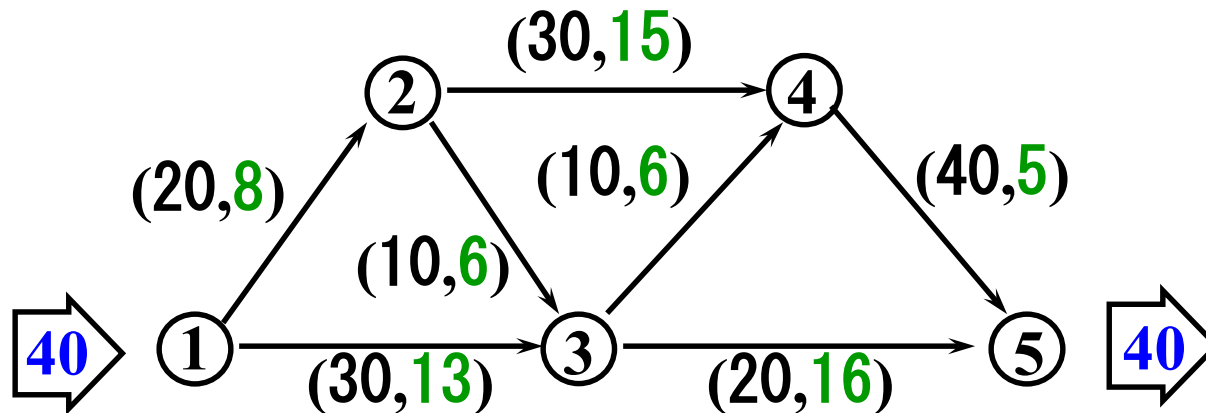


ワークシート有



演習1-2

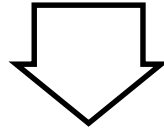
流量40の最小費用フローを求めよ. また, その時の総費用も示せ.



(容量, フロー1単位当たりの費用)

最短路繰返し法の弱い点

残余ネットワークに負の長さの枝が現れる。



最短路を求めるのにダイクストラ法が使えない。

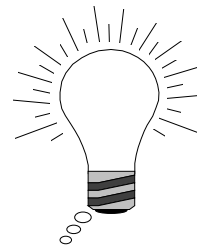
対策1

対策2

ダイクストラ法より計算時間はかかるが、負の長さも扱える解法を利用する。

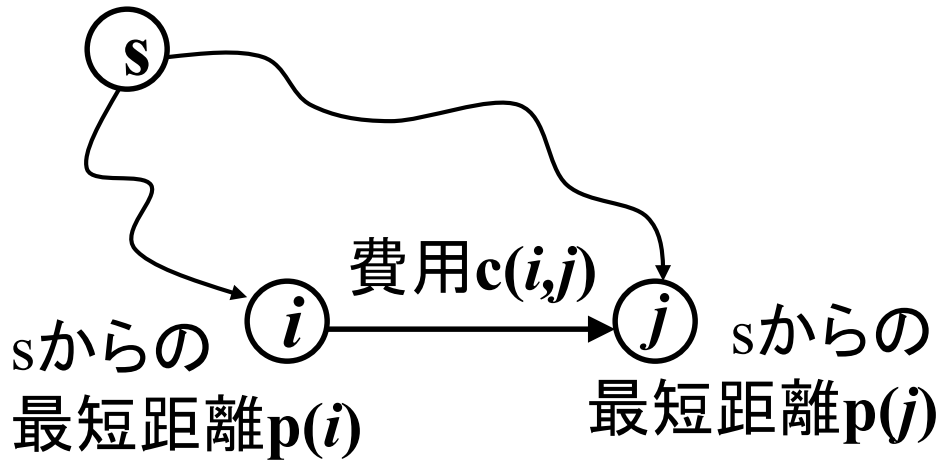
あまり良い対策ではない

残余ネットワークを工夫し、高速なダイクストラ法を利用する。



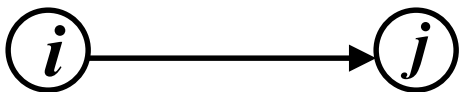
残余費用の導入

残余費用

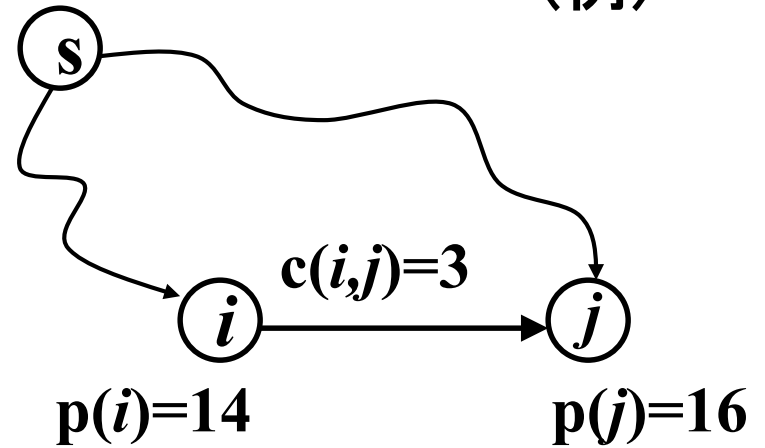


残余費用

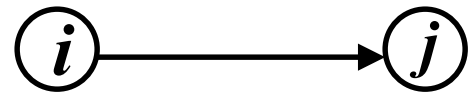
$$\underline{c}(i,j) = c(i,j) + p(i) - p(j)$$



(例)



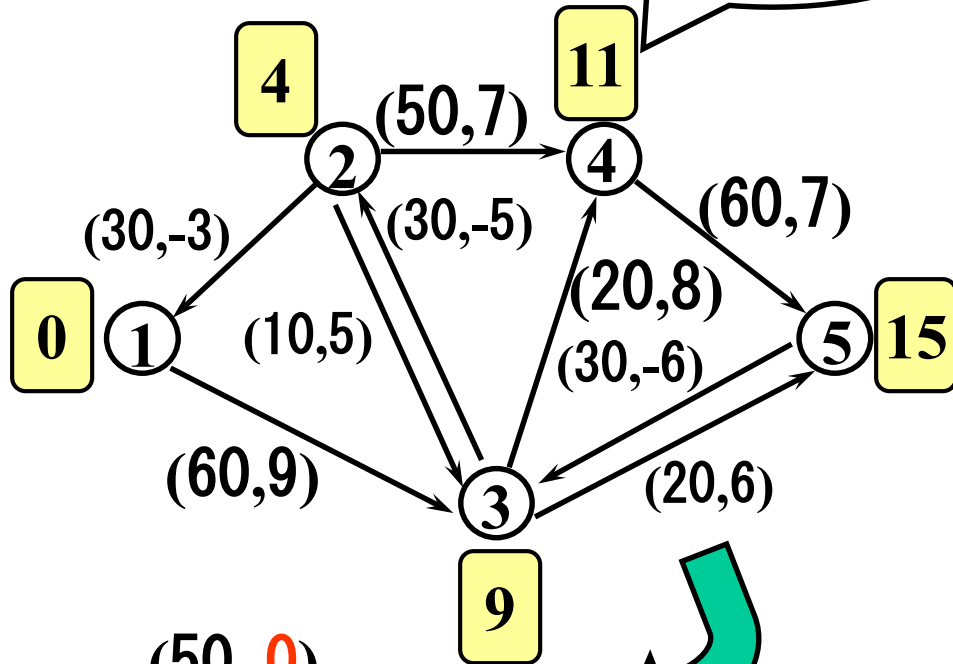
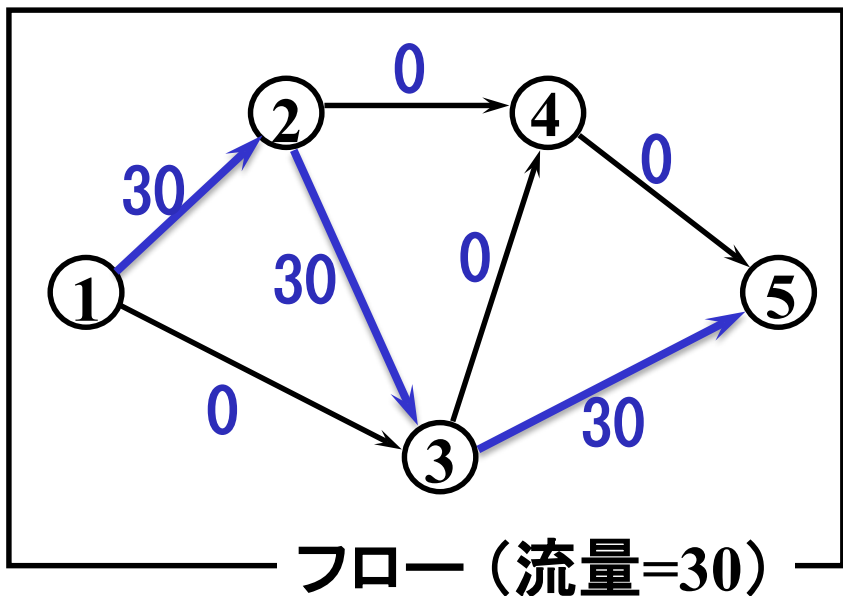
$$\underline{c}(i,j) = 3 + 14 - 16 = 1$$



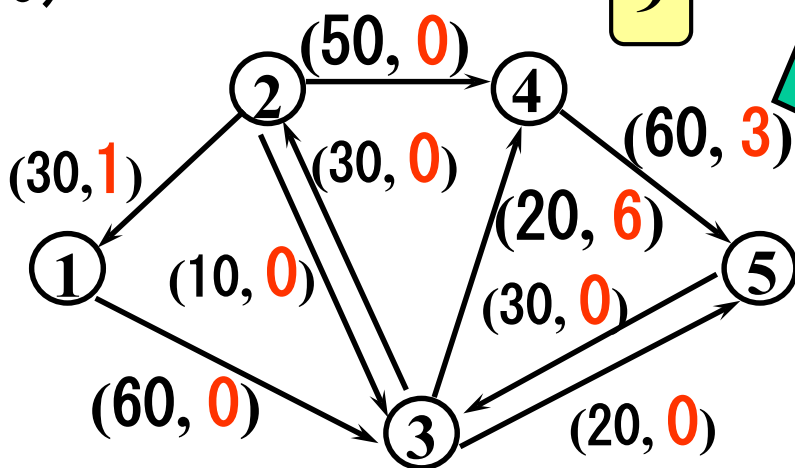
残余費用は非負である. なぜ?

改訂残余ネットワーク

供給点からの最短距離 p



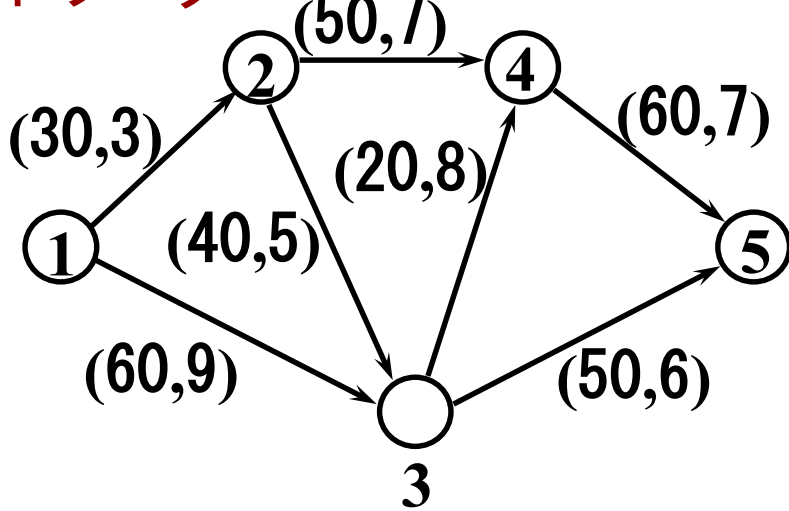
改訂残余
ネットワーク



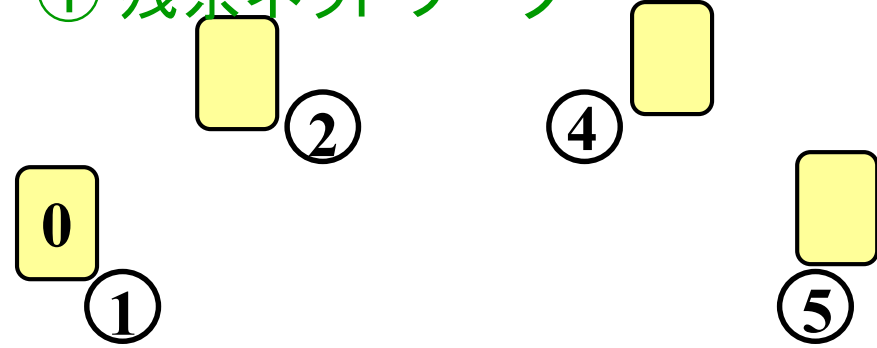
残余費用に
置き換える

練習 改訂残余ネットワークを描こう

ネットワーク

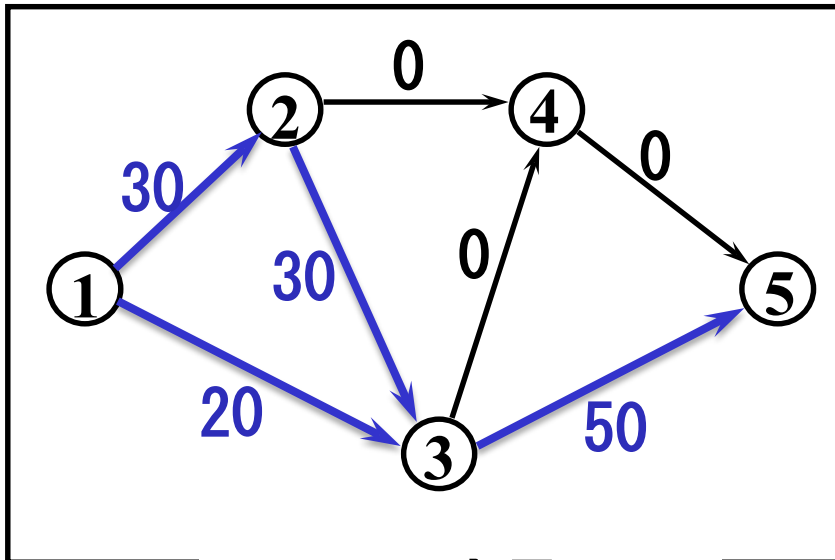
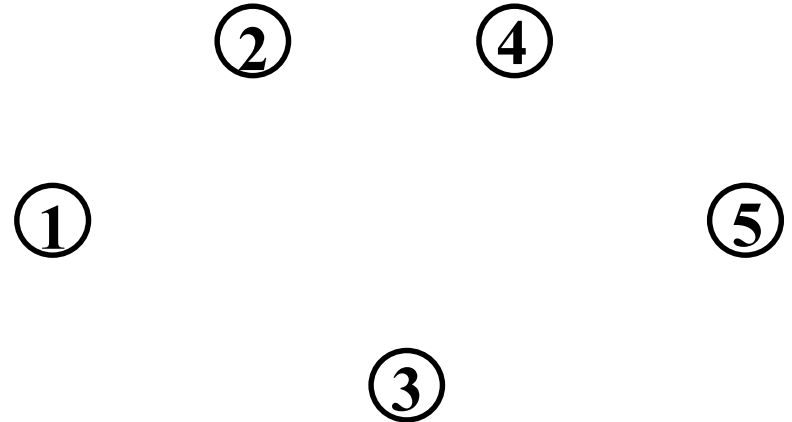


① 残余ネットワーク



② 最短距離pを算出

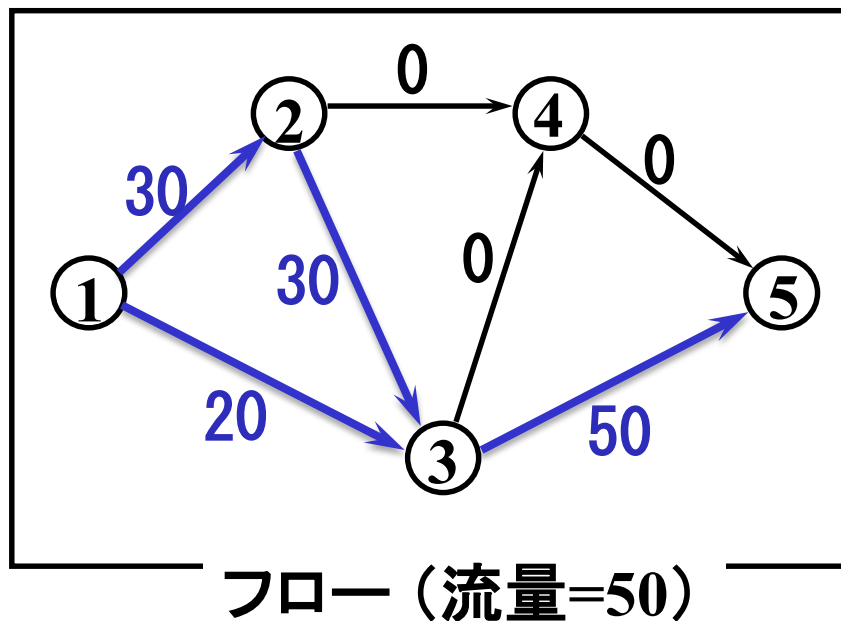
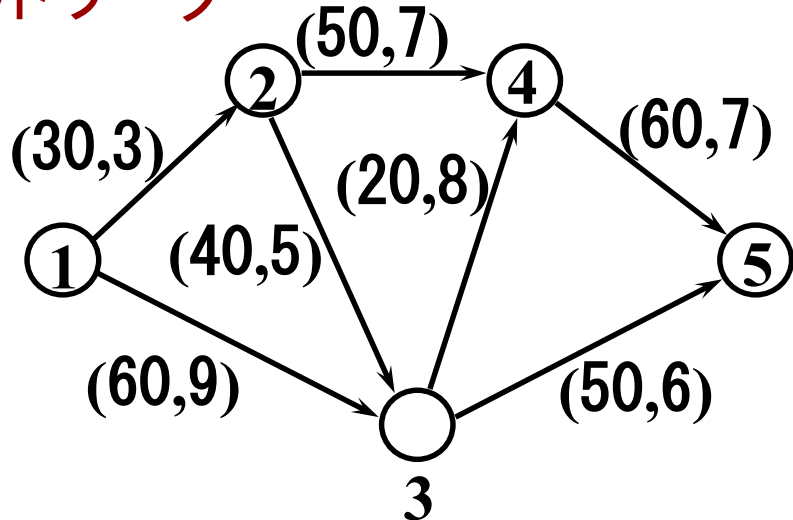
③ 改訂残余ネットワーク



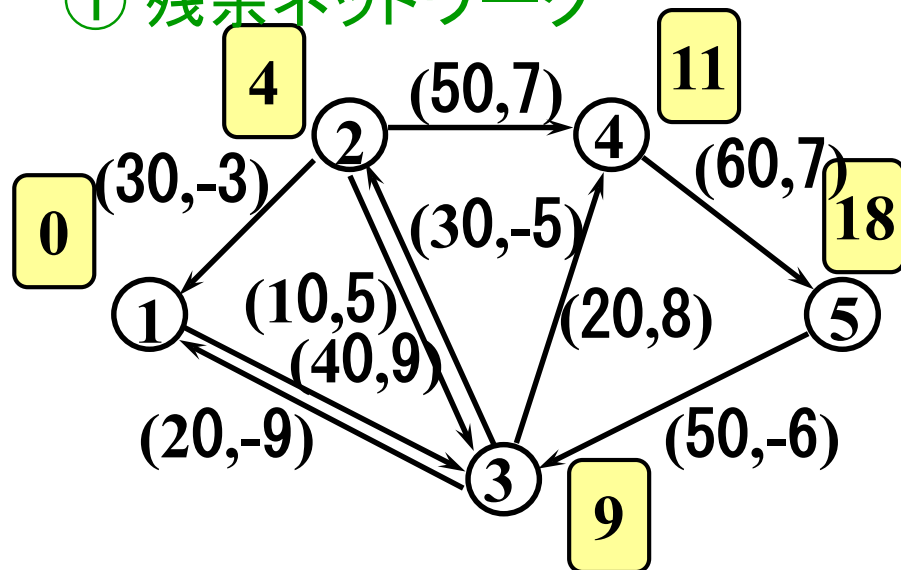
フロー (流量=50)

練習 解答例

ネットワーク

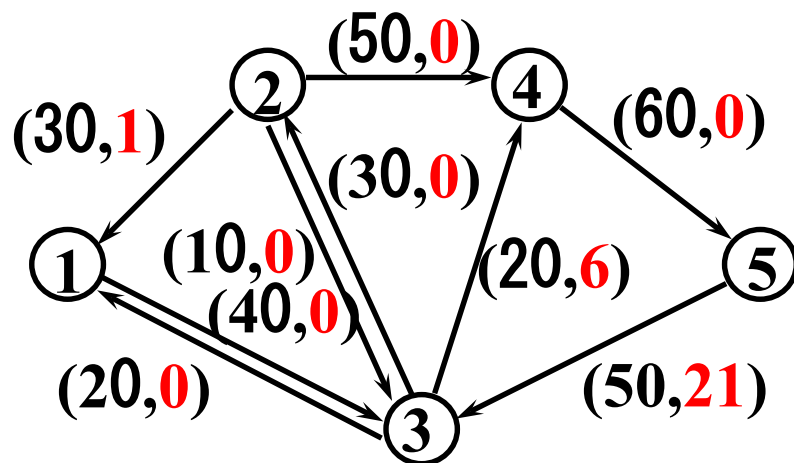


① 残余ネットワーク



② 最短距離pを算出

③ 改訂残余ネットワーク



改訂最短路繰り返し法

手順1: 全枝のフローを0, 各点での $p(v)$ を0とおく.

手順2: 以下を指定流量が得られるまで繰り返す.

(1) **改訂残余ネットワーク**を作る.

① 現在のフローに対するネットワークの構造を作る

② 現在の p に対する残余費用を定める

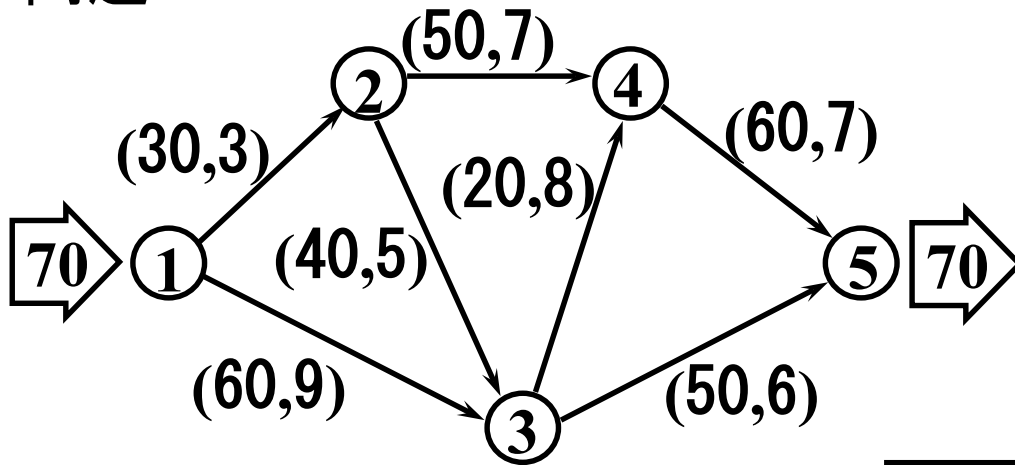
③ 供給点から各点への最短距離 $d(v)$ を求める.

(2) 供給点から需要点への**最短路**に沿って流せるだけ**フローを流す**.

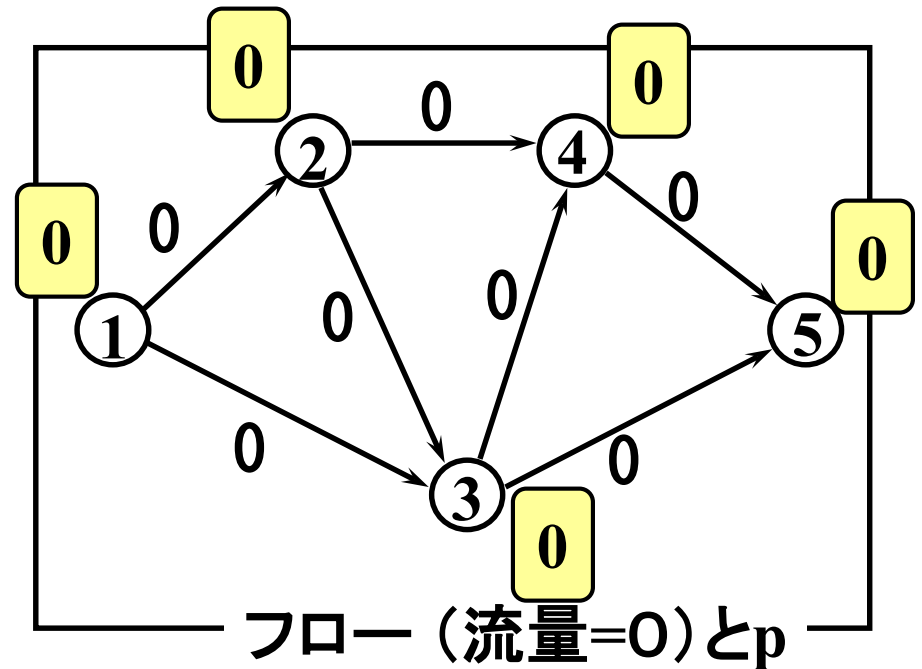
(3) 各点において $p(v) \leftarrow p(v) + d(v)$ とおく.

例題3 改訂最短路繰返し法

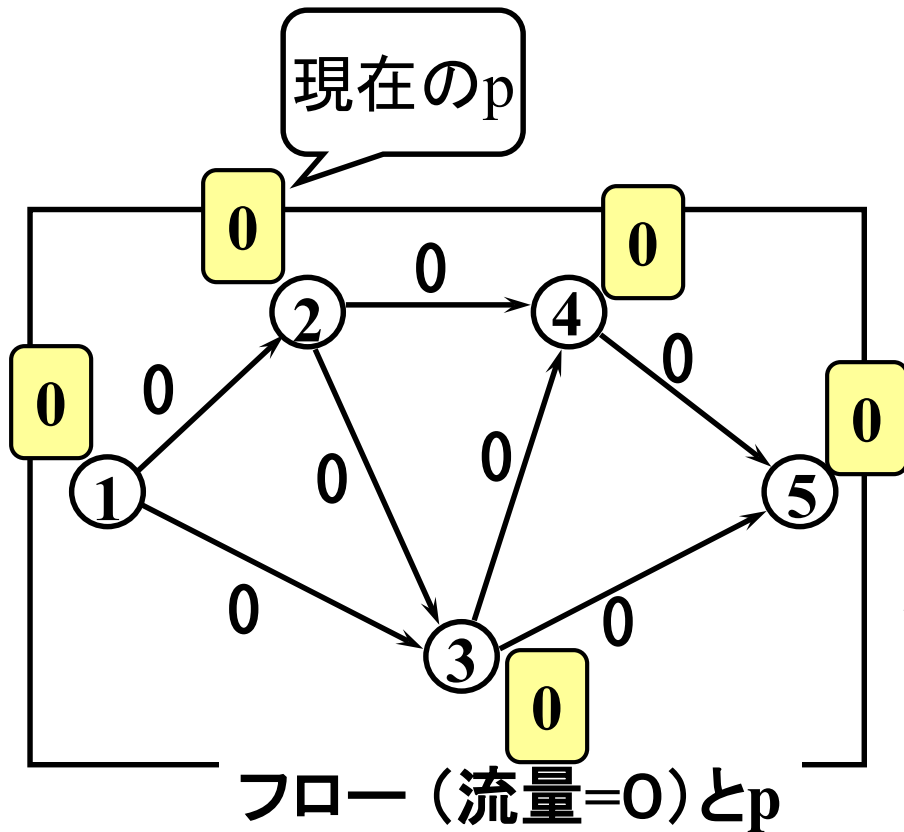
問題



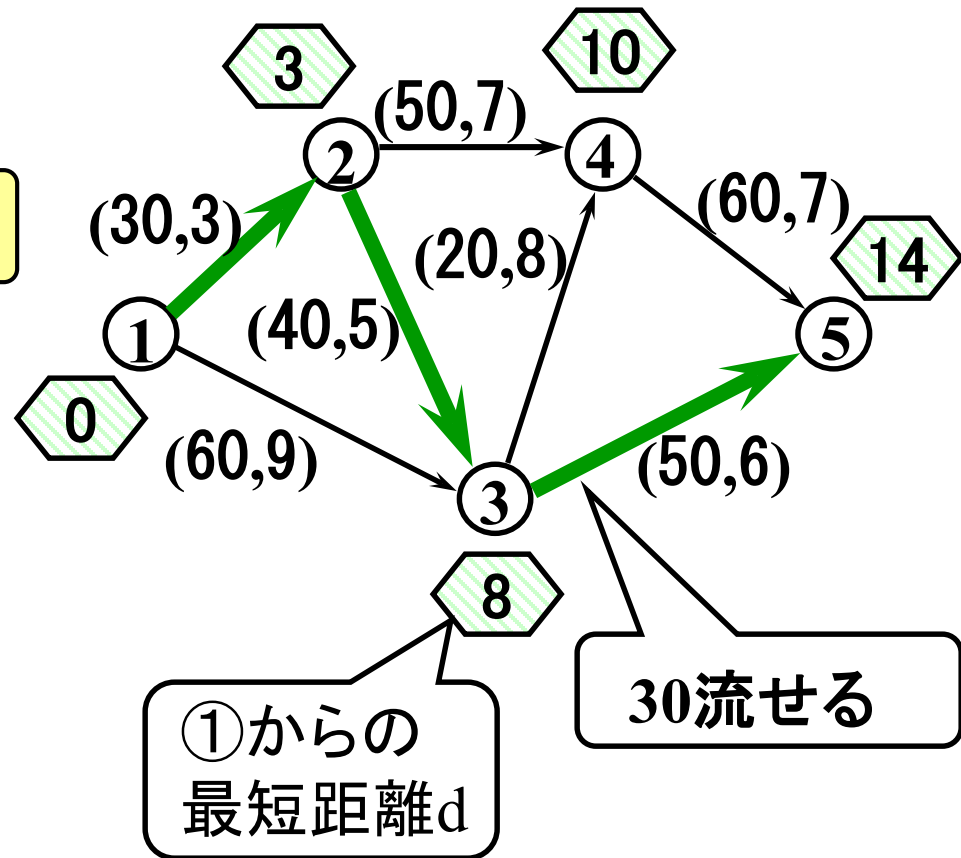
手順1 初期設定



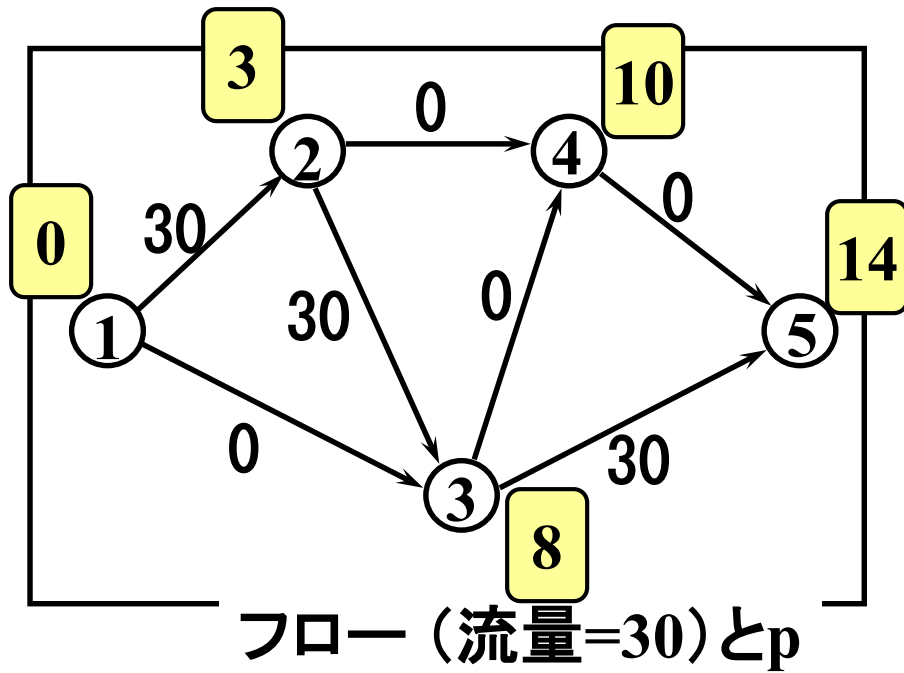
手順2 繰り返し1回目前半



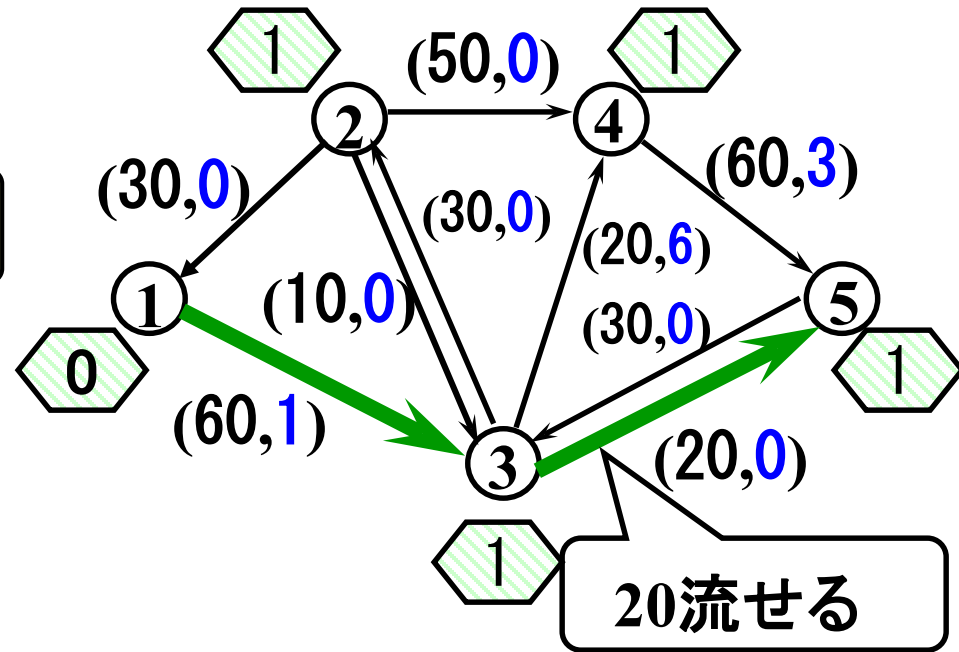
左図のフローとpに対する
改訂残余ネットワーク



手順2 繰り返し1回目後半+2回目前半

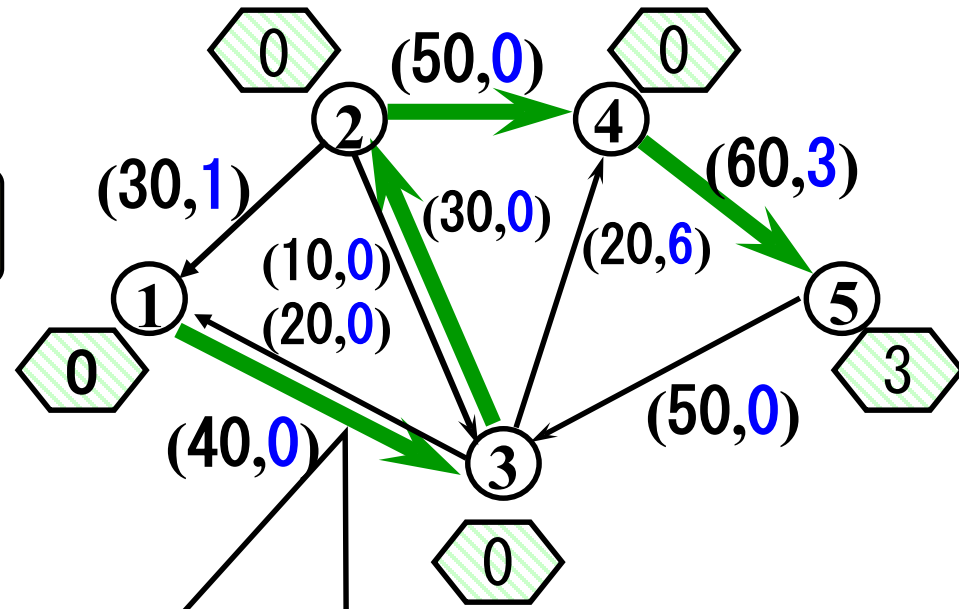
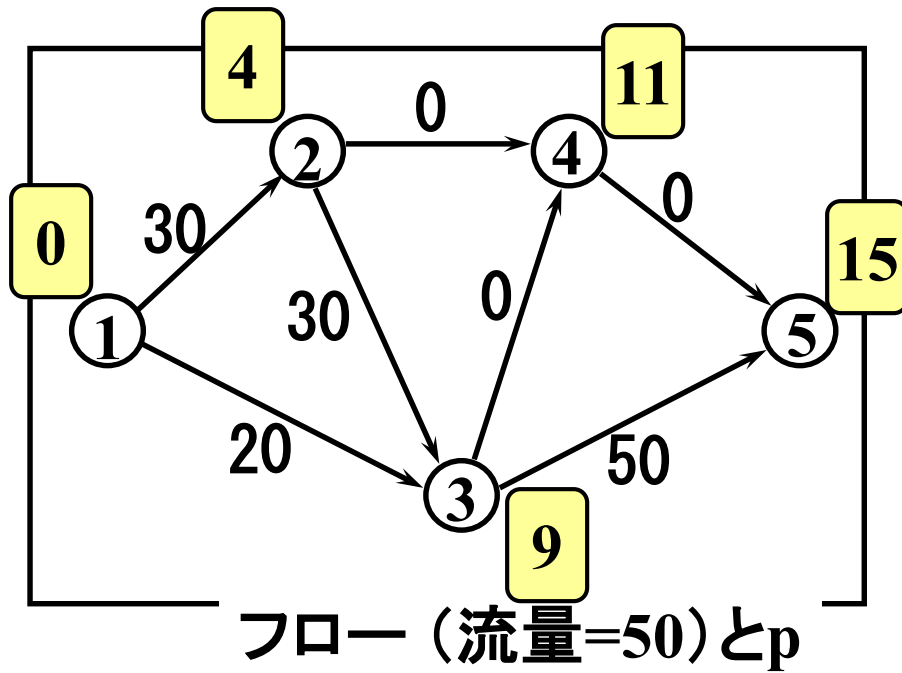


左図のフローとpに対する
改訂残余ネットワーク



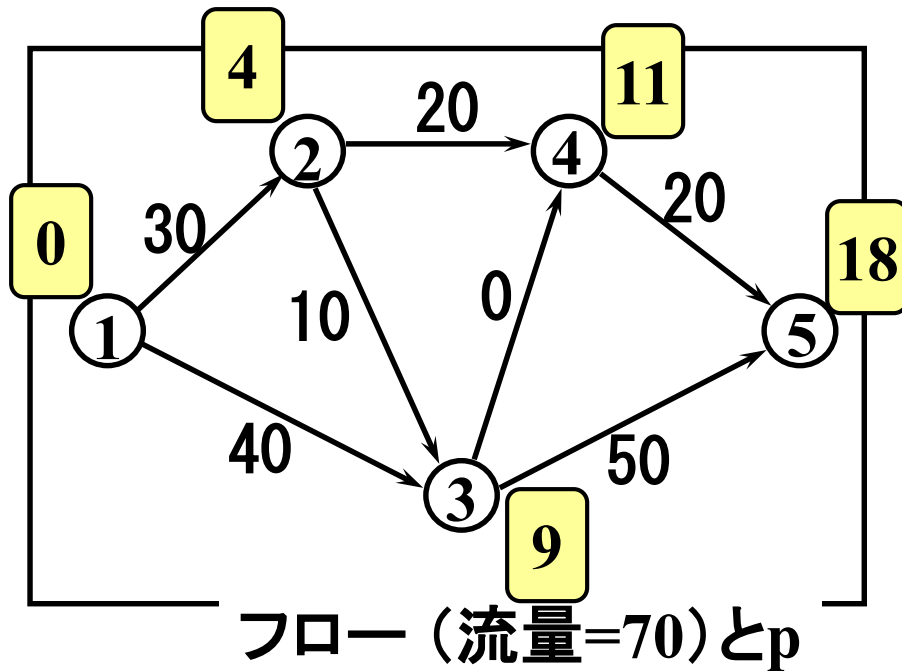
手順2 繰り返し2回目後半+3回目前半

左図のフローとpに対する
改訂残余ネットワーク



30流せるが、20流せば
流量70を満たす

手順2 繰り返し3回目後半+4回目前半



演習8-2

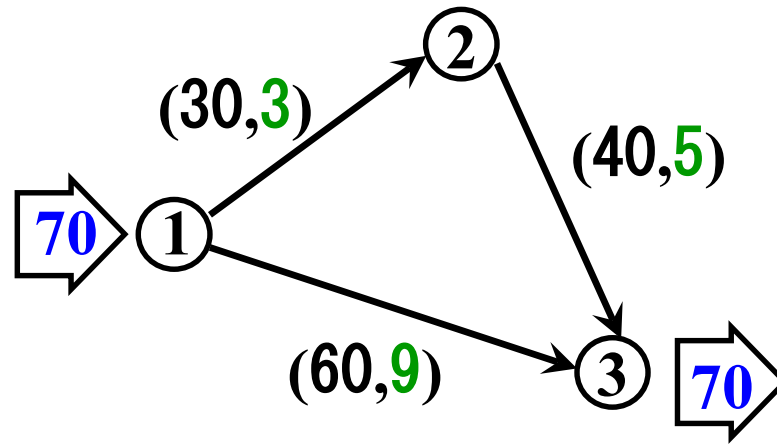
演習8-1において、改訂最短路繰り返し法を用いて最小費用フローを求めてみよう。



流量が70に到達したので終了

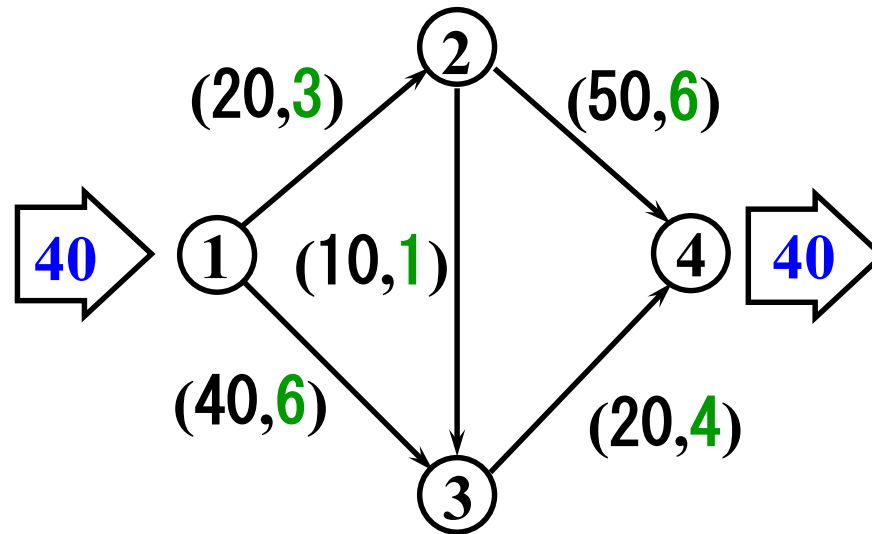
流量70の最小費用フロー

練習 2



演習2

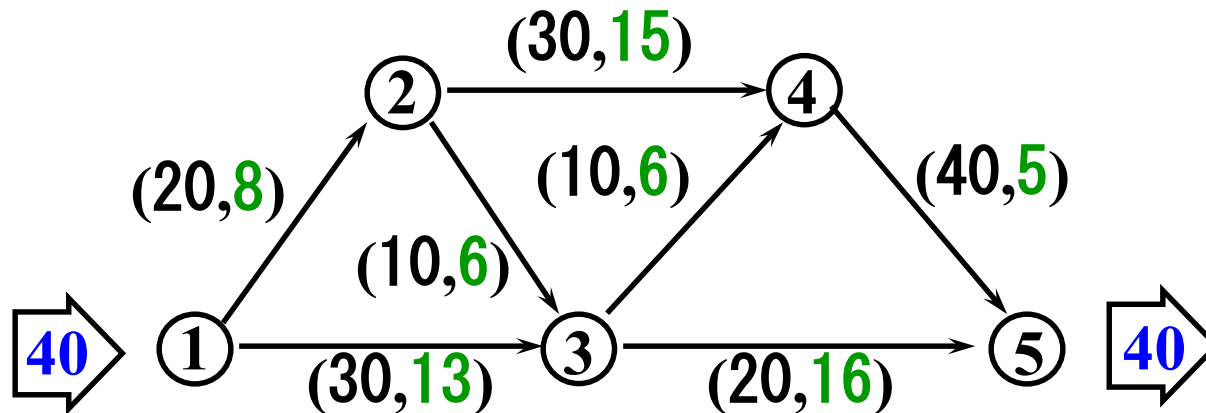
流量40の最小費用フローを「改訂最短路繰り返し法」にて求めよ.



(容量, 1単位当たりの費用)

演習3

流量40の最小費用フローを求めよ. また, その時の総費用も示せ.



(容量, フロー1単位当たりの費用)

例題4

文教商事では5つの支社へ一人ずつの人員補強を計画している。5人が希望している任地と、その任地へ赴く際に予想される費用は以下のようにまとめられた。

	支社①	支社②	支社③	支社④	支社⑤
Aさん	25	30			
Bさん	20		70	35	
Cさん	80	75	90	65	
Dさん				55	40
Eさん				60	50

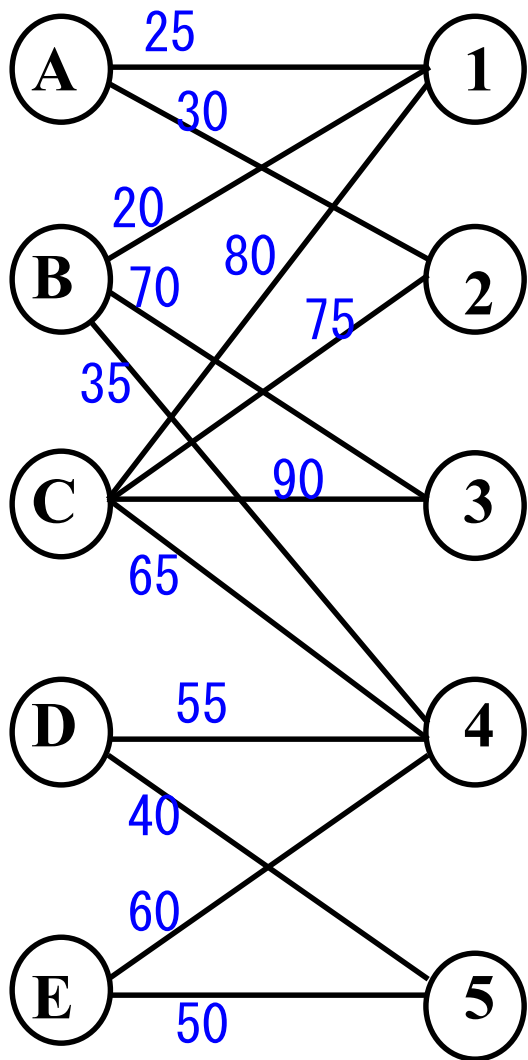
空白は希望
しない支社



さて、誰をどの支社に配属すれば最も費用が安く済むか？

関連問題：5人を各支社に割り当てることはできるか？

割当問題

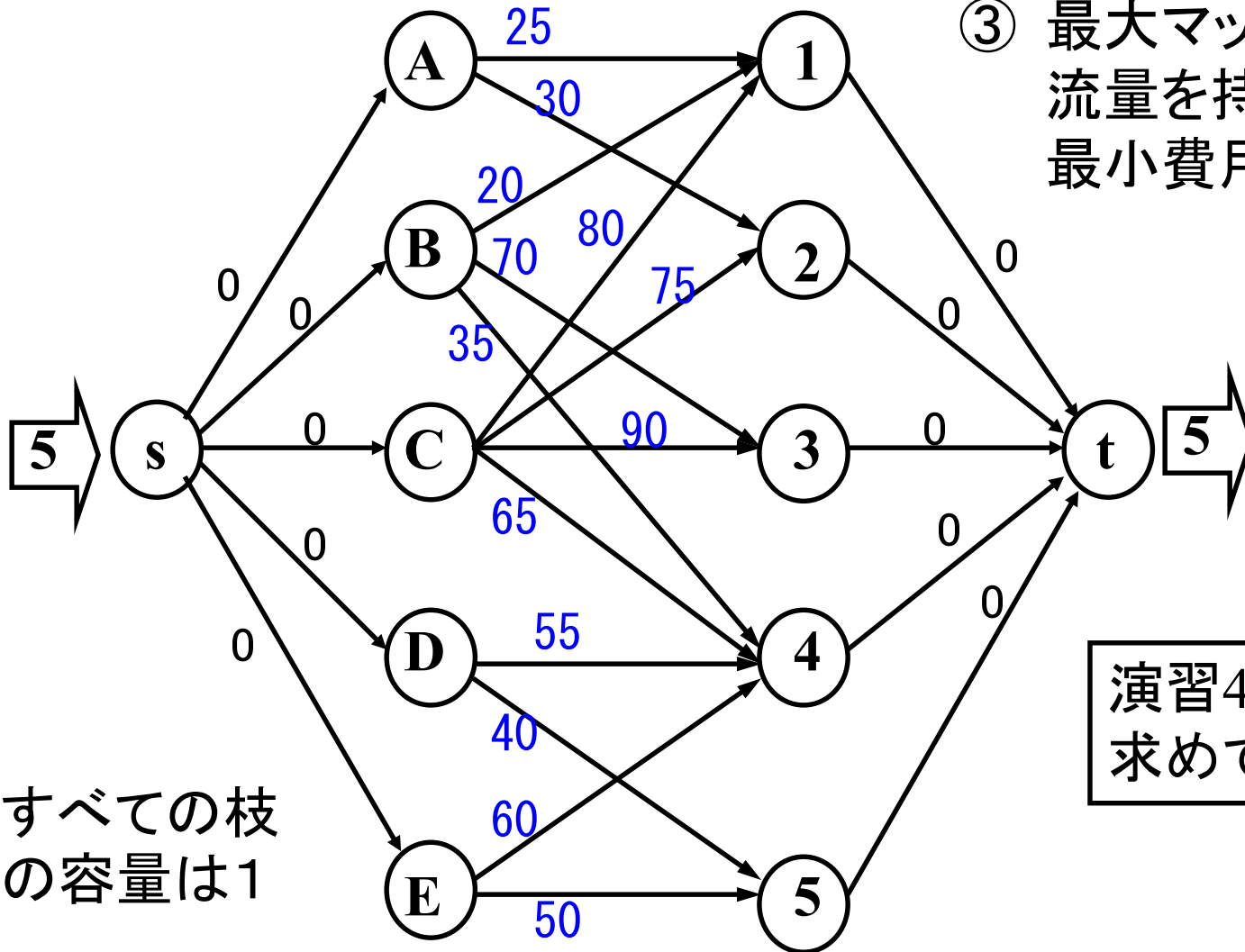


完全マッチングの中で
(最大マッチングの中で)
重みの和が最小のマッチ
ングを求める問題



割当問題の一解法

- ① 最大マッチング数導出
- ② 左図のように変形
- ③ 最大マッチング数の流量を持つ
最小費用フロー導出



演習4
求めてみよう!!

例題5 輸送問題

ある会社では、倉庫A,B, Cにそれぞれ30(千個), 20(千個), 40(千個)の製品を保管しているが、これをP町, Q町, R町にそれぞれ30(千個), 15(千個), 45(千個)ずつ発送したい。

輸送費	(万円/千個)		
	P町	Q町	R町
倉庫A	4	2	3
倉庫B	6	1	4
倉庫C	8	2	7

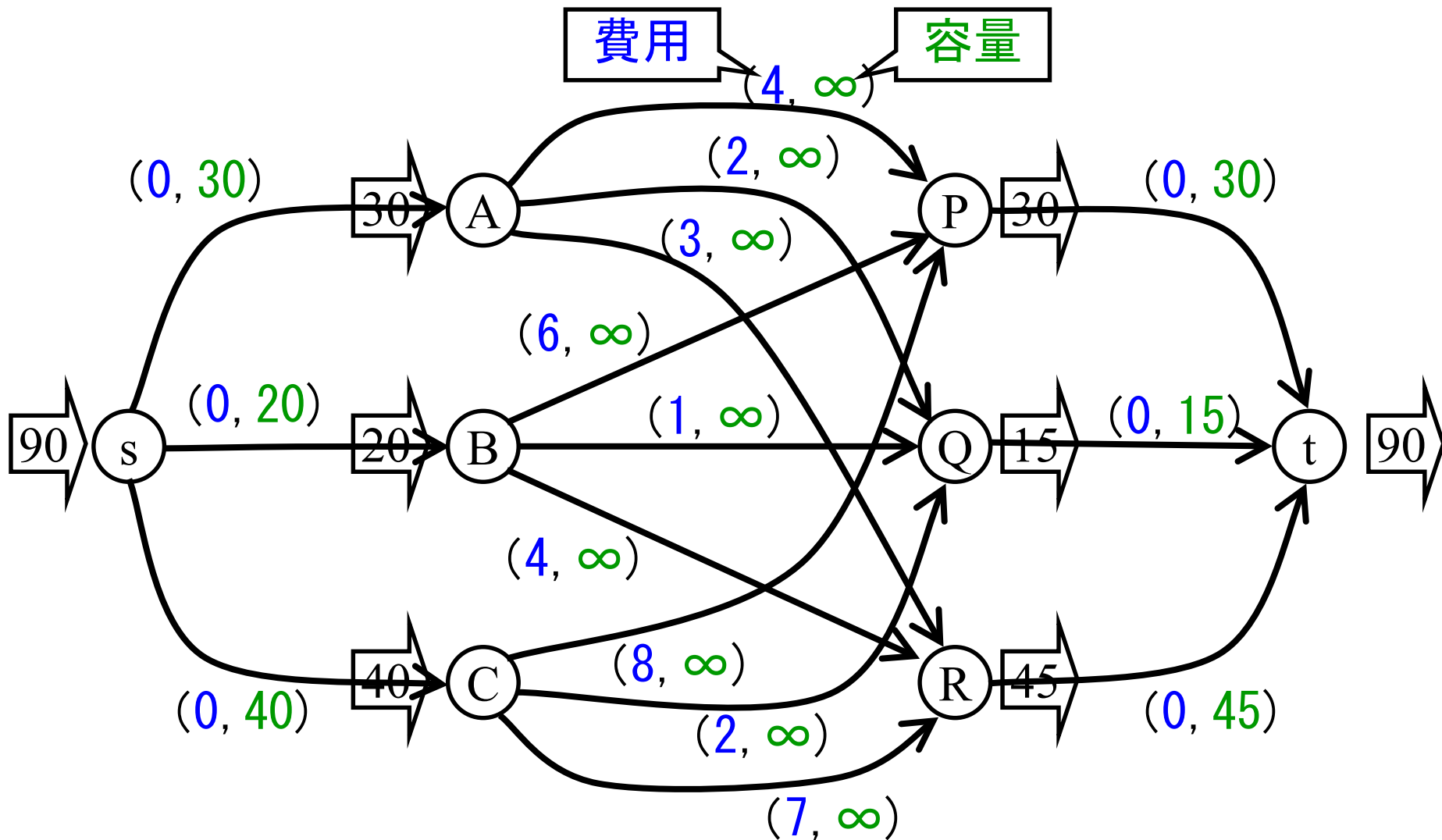
輸送費総額が最小になる輸送プランを提示せよ。

ハンガリアン法等

飛び石法等

最短経路繰り返し法等

割当問題 \subseteq 輸送問題 \subseteq 最小費用
の図示 フロー問題



輸送問題に特化した解法

見つけ方は?

⇒ **ハウタッカー法**
or **北西隅法**

判定方法は?

⇒ **飛び石法**

結果を利用

改善方法は?

⇒ **飛び石法**

需要供給を満たす
適当なフローを見つける

最小費用フロー?

Yes!

最適解

No!

フローを改善する

需要・供給を満たすフローを見つける方法 ハウタッカー法

費用の安い順に
流していく

	P	Q	R	供給量
A	4 0	2 0	3 30	30
B	6 0	1 15	4 5	20
C	8 30	2 0	7 10	40
需要量	30	15	45	

初期フローが得られた！

最小費用かを判定する 飛び石法

現在「0」の部分にフローを流したら費用が改善するかをチェック

例: CQを増やしてみよう

変更可能な
最大量は?
⇒ **10**

サイクル(閉路)

$$+2 - 7 + 4 - 1 = -2$$

	P	Q	R
A	4 0	2 0	3 30
B	6 0	1 15	4 5
C	8 30	2 0	7 10

⇒ サイクルに沿ってフロー変更すると、費用は下がる

⇔ 現在のフローは最小費用フローではない

フロー更新⇒飛び石法の繰り返し

更新後のフロー

例: APを増やしてみよう

サイクル

$$+4 - 8 + 2 - 1 + 4 - 3 = -2$$

最小費用でない

サイクルに沿って

5変更可能

⇒ フロー更新

	P	Q	R
A	4 + 0	2 0	3 - 30
B	6 0	1 - 5	4 + 15
C	8 - 30	2 + 10	7 0

需要・供給を満たすフローを見つける方法(2)

北西隅法

左上から埋めていく

	P	Q	R	供給量
A	4	2	3	30
	30	0	0	
B	6	1	4	20
	0	15	5	
C	8	2	7	40
	0	0	40	
需要量	30	15	45	

初期フローが得られた！

飛び石法で時々出会うトラブル: 退化

北西隅法で得た
初期解

	P	Q	R	供給量
A	4	2	3 +	30
	30	0	0	
B	6	1 +	4 -	20
	0	15	5	
C	8	2	7	40
	0	0	40	
需要量	30	15	45	



退化は
なぜ起きる?

⇐ A. 正フローの数が不足

通常は, 正フロー数 = (需要点) + (供給点) - 1

退化時の対処法

	P	Q	R	供給量
A	4	2 -	3 +	30
	30	ε 0	0	$+\varepsilon$
B	6	1 +	4 -	20
	0	15	5	
C	8	2	7	40
	0	0	40	
需要量	30	15 $+\varepsilon$	45	

判定可能

0をほんのちよつと(= ε)増やす

イプシロン

最小費用輸送案 の導出(1)

$$+AR(3) - AQ(2)$$

$$+BQ(1) - BR(4) = -2$$

AR増加

	P	Q	R	供給量
A	4	2 -	3 +	30
	30	ϵ 0	0	$+\epsilon$
B	6	1 +	4 -	20
	0	15	5	
C	8	2	7	40
	0	0	40	
需要量	30	15 $+\epsilon$	45	

最小費用輸送案 の導出(2)

	P	Q	R	供給量
A	4	2	3	30
	30	0	ϵ	$+\epsilon$
B	6	1	4	20
	0	$15+\epsilon$	$5-\epsilon$	
C	8	2	7	40
	0	0	40	
需要量	30	$15+\epsilon$	45	

CQ増加

($15+\epsilon$)の変更

$$+CQ(2) - CR(7)$$

$$+BR(4) - BQ(1) = -2$$

最小費用輸送案 の導出(3)

更新できる箇所が無い
⇒最小費用輸送案の発見

	P	Q	R	供給量
A	4	2	3	30
	30	0	0-ε	±ε
B	6	1	4	20
	0	0	20	
C	8	2	7	40
	0	15+ε	25-ε	
需要量	30	15 ±ε	45	

εを0にリセットする

演習5 輸送問題

	P	Q	R	供給量
A	2	3	1	30
B	4	1	2	20
需要量	25	10	15	

倉庫A,Bから、町P,Q,Rへの最小費用輸送プランを提示せよ

演習6 輸送問題

文教サイクルは、3つの工場と4つの販売店を有している。各工場の週間製造台数、工場から販売店への輸送費、各販売店の週間需要は以下の通りである。

	販売店①	販売店②	販売店③	販売店④	週間製造台数
工場A	6千円/台	7千円/台	3千円/台	7千円/台	100台
工場B	8千円/台	3千円/台	6千円/台	5千円/台	250台
工場C	5千円/台	4千円/台	5千円/台	6千円/台	150台
週間需要台数	80台	160台	60台	200台	

総輸送費を最小にするには、各工場から各販売店へどのように製品を輸送すれば良いか。