配属の数理（1）

良いペアを作ろう！

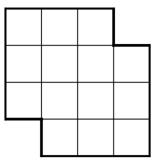
ここで学ぶこと

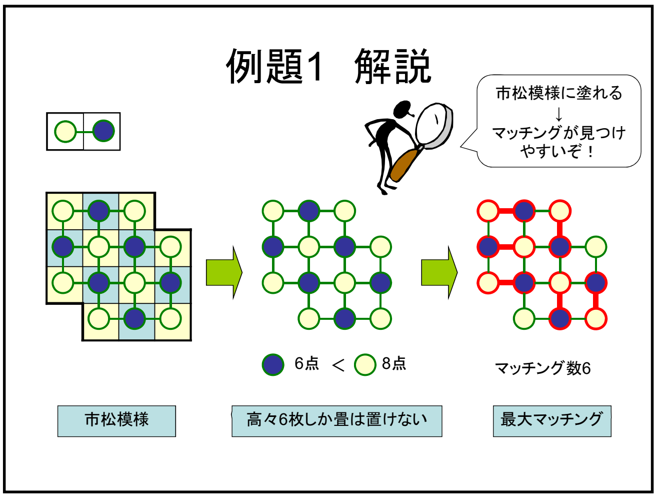
- マッチング問題
  - 市松模様で色分け可能(2部グラフ)の場合
  - 一般グラフの場合
- 割当問題　誰にどの仕事を割り当てる?
- 配属問題　ゼミの配属を決めよう
- 安定結婚問題　不満を抑えるマッチング

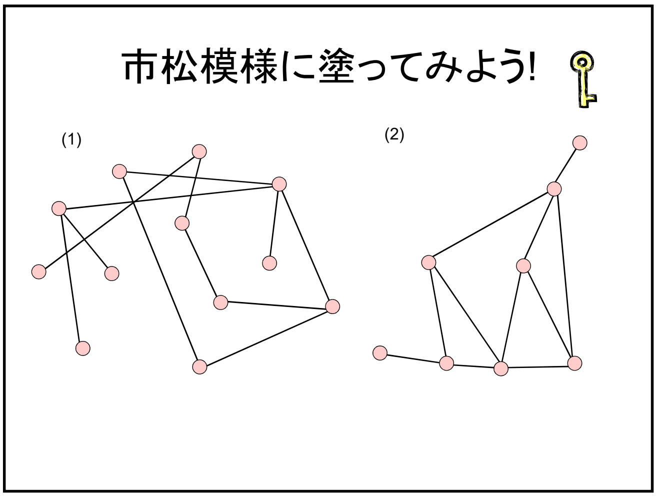
例題1

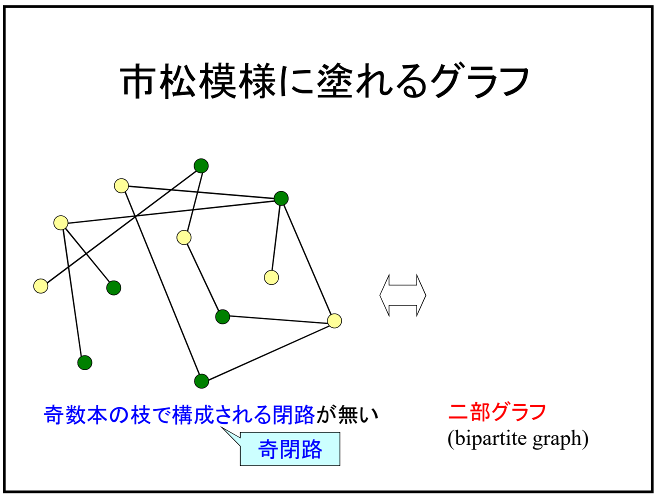
畳の敷き詰めプランを作成しよう

畳1枚



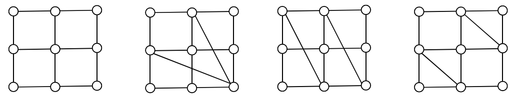

例題1　解説
市松模様に塗れる
↓
マッチングが見つけ
やすいぞ！
6点 ＜ 8点
マッチング数6
市松模様
高々6枚しか畳は置けない
最大マッチング


市松模様に塗ってみよう!
(1)
(2)


市松模様に塗れるグラフ
奇数本の枝で構成される閉路が無い
奇閉路
二部グラフ
(bipartite graph)

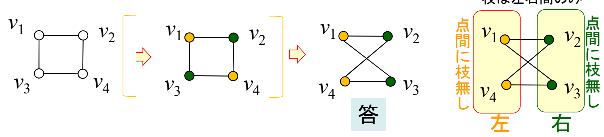
ワーク1　2部グラフをすべて挙げよ.

[ア]　[イ]　[ウ]　[エ]

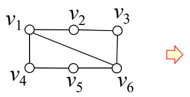


ワーク2　次の2部グラフを点集合を左右に分け表現しなおせ.

[例]

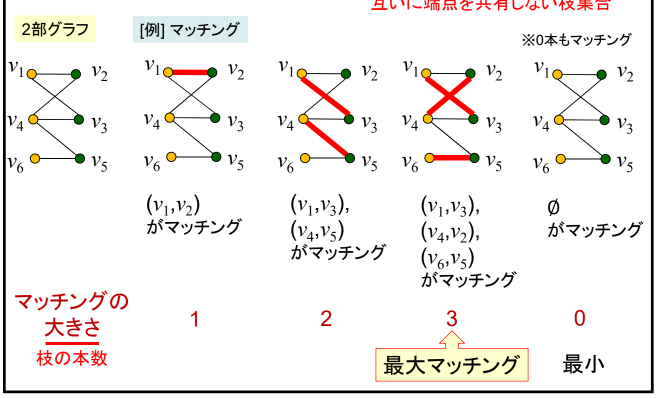


(1)



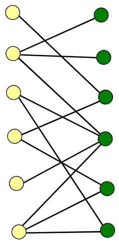
2部グラフ上のマッチング

互いに端点を共有しない枝集合



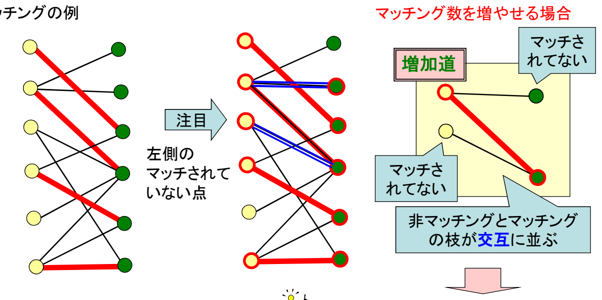
2部グラフとマッチングの例

① 輸送	倉庫（工場）		店舗
② 宅配	荷物		トラック
③ ネット広告	ユーザー		広告
④ 検索結果	履歴		表示順
⑤ 作業シフト	従業員		勤務帯
⑥ メドレーリレー	選手		種目



Q. 他には?

2部グラフ上の最大マッチング

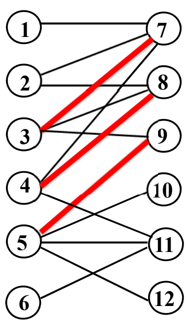


Q. 最大マッチング?

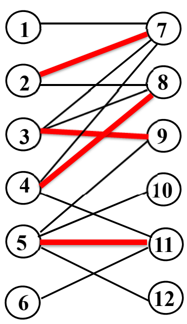
増加道を見つけて，マッチングを増やす
増加道が無ければ，最大マッチング
→**増加道法**

練習：増加道を見つけよう

(1)

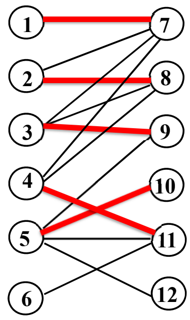


(2)



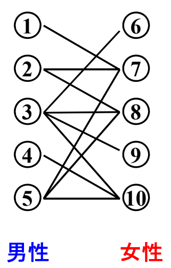
練習：増加道はある？

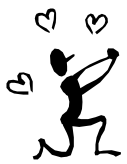
(3)



練習 Shall we dance?

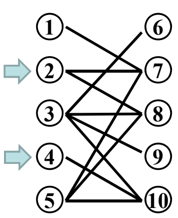
ダンスパーティーに男性・女性各5人が集まった.
パートナーになりたい希望は以下の組合せである.





さて，なるべく多くのペアを組みたいが
最大で何組できるか？その組み方は？

増加道法の適用例



増加道法

(手順1) 適当にマッチングを見つける

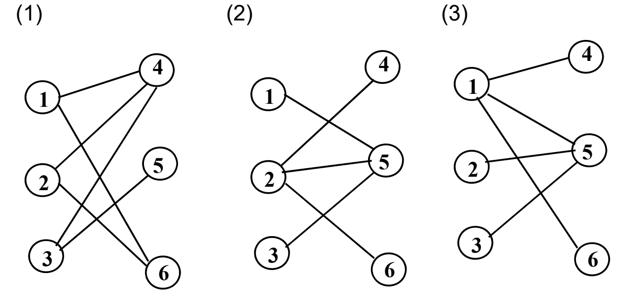
(手順2) マッチされていない点から
増加道を探す

増加道があった → マッチング変更

増加道が無い → 最大マッチング
発見！
(終了)

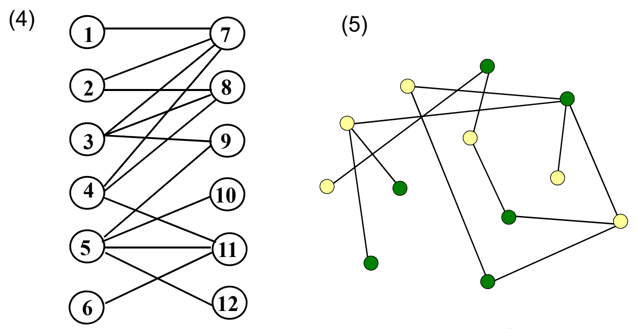
練習　最大マッチングを求めよう

最大マッチングである証拠も示そう



最大マッチングの大きさ＝ □　最大マッチングの大きさ＝ □　最大マッチングの大きさ＝ □

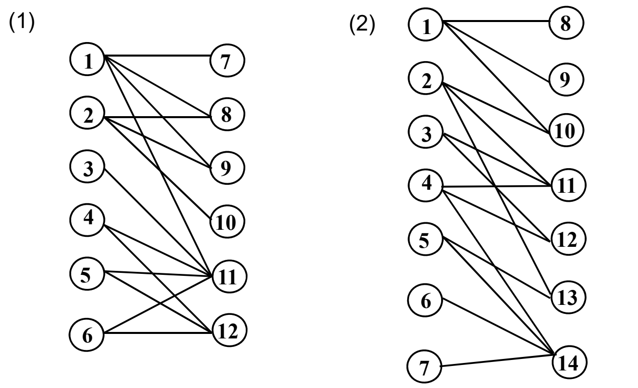
練習：最大マッチングを求めよう



最大マッチングの大きさ＝ □　最大マッチングの大きさ＝ □

ワーク3

最大マッチングを求めよう



ワーク

店番シフト作成係

必ず一人は店番が必要な24hクリーニング屋さんがある.
パートさん(6人)の働ける時間帯が把握できた.

(1) 一人4時間勤務で勤務シフトを組むことは可能?

可能なら勤務シフトを示せ. 不可ならその理由を示せ.

	02-06	06-10	10-14	14-18	18-22	22-02
Aさん	○		○			
Bさん		○		○		
Cさん	○				○	○
Dさん		○	○			
Eさん					○	○
Fさん			○			○

○:働ける時間帯

2部グラフで描いてみよう

演習2 バス会社運行係

- 6ルートのバス運行を計画中
- 各ターミナル間の回送時間は右下表の通り
  - バス停駐車可能
- 最低何台で運行可能？

	発地	出発時間	着地	到着時間
ルート①	A	9:20	C	9:40
ルート②	B	10:00	A	10:30
ルート③	B	8:40	B	9:50
ルート④	D	8:00	B	8:30
ルート⑤	C	12:30	E	13:30
ルート⑥	E	11:10	C	12:20

計画バスルート

回送着地

回送発地	A	B	C	D	E
A	0	3	1	6	2
B	4	0	5	5	6
C	2	5	0	6	4
D	3	2	1	0	5
E	7	3	5	4	0

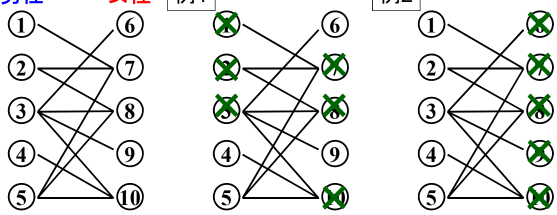
(単位:10分)

例題2　2部グラフの点被覆

誰に辞められると, 誰もダンスができなくなるか？

すべての枝に接続する点の集まり ⇔ × の人(点)の集まり: 点被覆

男性　女性　例1　例2

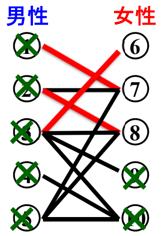


点被覆の大きさ＝6　点被覆の大きさ＝5

問題　大きさが一番小さな点被覆は？(最小点被覆問題)

マッチングと点被覆

点被覆の簡単な見つけ方



(手順1) 適当にマッチングを見つける

(手順2) マッチされていない点
＋
マッチングの一方の点
||
点被覆

示唆

（マッチングの大きさ）≦（点被覆の大きさ）

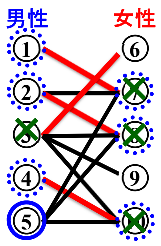
つまり （最大マッチングの大きさ）≦（最小点被覆の大きさ）

最大マッチングと最小点被覆

(準備) 最大マッチングを見つける

最大マッチング

(手順1) 左側でマッチされていない点 ○から
交互道で到達できる点 ⁝⁝を見つける



観察1 点⁝⁝, 点○だけに限定すると
右側の点は，点被覆

観察2 残った点だけに限定すると，
左側の点は，点被覆

⇒最大マッチングの大きさと同じ
点被覆を見つけた

（最大マッチングの大きさ）≦（最小点被覆の大きさ）より

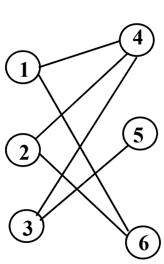
× は最小点被覆

2部グラフでは
（最大マッチングの大きさ）＝（最小点被覆の大きさ）

König-Egerváryの定理

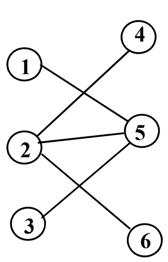
練習　最小点被覆を求めよう

(1)



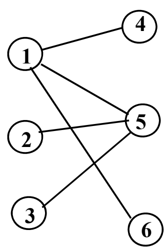
最小点被覆
の大きさ＝ □

(2)



最小点被覆
の大きさ＝ □

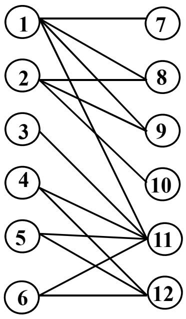
(3)



最小点被覆
の大きさ＝ □

ワーク4

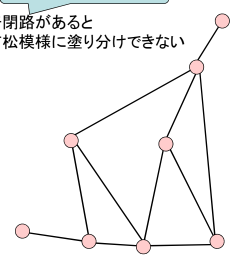
最小点被覆を求めよう



発展　2部グラフでない場合のマッチング

2部グラフではない

奇閉路があると
市松模様に塗り分けできない



困った，困った

1965年

奇閉路を見つけたら
一時的に一点にみなせば
何とかなるんじゃない?

Edmons博士

花アルゴリズム

最小重み最大マッチングを
見つけることも可能

詳しくは
もっと勉強するのじゃ

組合せ最適化問題に
大きな影響を与える

ここまでのまとめ

- 最大マッチングを求める
  - 市松模様で色分け可能(2部グラフ)の場合
  - 一般グラフの場合

奇閉路が無いグラフ

花アルゴリズム

増加道法

次は枝に重みのある場合の話題

- 割当問題　誰にどの仕事を割り当てる?
- 配属問題　ゼミの配属を決めよう
- 安定結婚問題　不満を抑えるマッチング

例題3　仕事の割当

5つの支社へ一人ずつの人員補強を計画.
希望任地と，その任地への赴任費用は下表のとおり.

	支社①	支社②	支社③	支社④	支社⑤
Aさん	25	30			
Bさん	20		70	35	
Cさん	80	75	90	65	
Dさん				55	40
Eさん				60	50

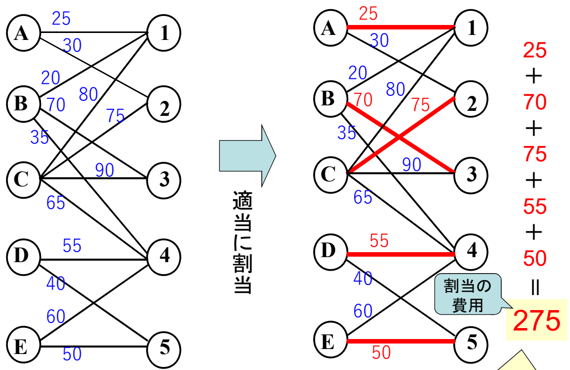
空白は希望しない支社

さて，誰をどの支社に配属すれば最も費用が安く済む?

関連問題：5人を各支社に割り当てることはできるか?

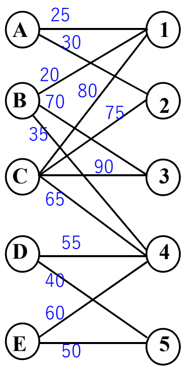
割当の総費用

問題の図示



割当問題　費用が最小になる割当は?

練習　最適割当を求めよう



最適割当を求める方法

解法はいくつも提案

紹介
- •オークション法
- •ハンガリアン法
- •最小費用流問題

必要なもの：表

	①	②	③	④	⑤
A	25	30			
B	20		70	35	
C	80	75	90	65	
D				55	40
E				60	50

ハンガリアン法の流れ

準備　割当候補の限定

手順1　割当案策定

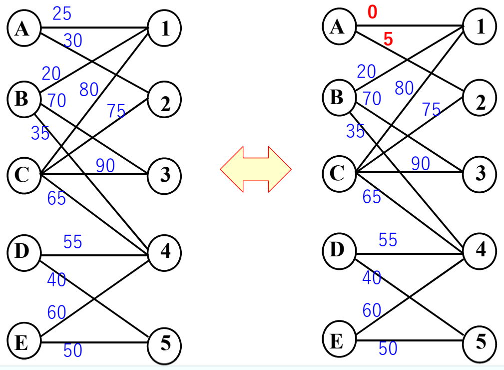
完全マッチング？　yes → 最適割当（終了）

no

手順2　候補変更準備

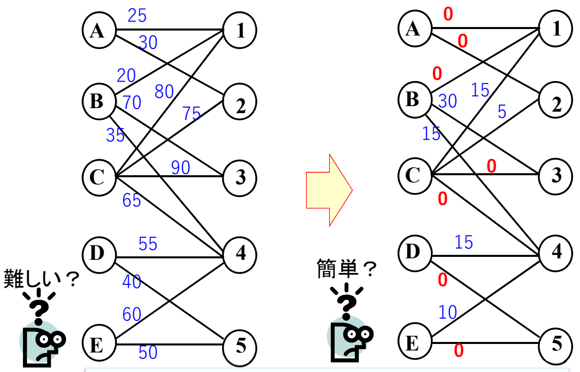
手順3　候補変更

観察　割当問題の特徴



行（列）全体でのコストの一定量の変化は解に影響しない

ハンガリアン法の背景



行(列)のコストを同時に変化させ簡単な問題に変形

準備　割当候補の限定

①行毎に最小数字を発見

	①	②	③	④	⑤
A	25	30			
B	20		70	35	
C	80	75	90	65	
D				55	40
E				60	50

②行毎に最小数字を引く

	①	②	③	④	⑤
A	0	5			
B	0		50	15	
C	15	10	25	0	
D				15	0
E				10	0

③列毎に最小数字を発見

	①	②	③	④	⑤
A	0	5			
B	0		50	15	
C	15	10	25	0	
D				15	0
E				10	0

④列毎に最小数字を引く

	①	②	③	④	⑤
A	0	0			
B	0		25	15	
C	15	5	0	0	
D				15	0
E				10	0

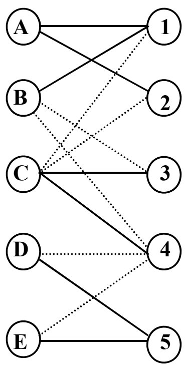
準備完了

手順1　割当案の作成

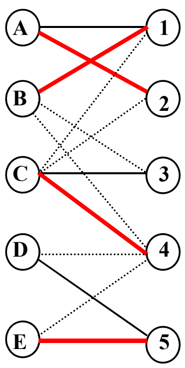
「0」部分だけで
最大マッチングを求める

	①	②	③	④	⑤
A	0	0			
B	0		25	15	
C	15	5	0	0	
D				15	0
E				10	0

	①	②	③	④	⑤
A	0	0			
B	0		25	15	
C	15	5	0	0	
D				15	0
E				10	0



「0」部分のみ抽出



最大マッチング

手順2　割当候補の変更準備

	①	②	③	④	⑤
A	0	0			
B	0		25	15	
C	15	5	0	0	
D				15	0
E				10	0

	①	②	③	④	⑤
A	0	0			
B	0		25	15	
C	15	5	0	0	
D				15	0
E				10	0

準備完了

0部分から縦か横に直線を引き,
すべての「0」を線で消す

※線の引き方は複数通り存在
どれでも良い

手順3　割当候補の変更

縦横両直線での消去部分

最小数字は10

無消去部分

	①	②	③	④	⑤
A	0	0			
B	0		25	15	
C	15	5	0	0	
D				15	0
E				10	0

無消去部分の最小数字を

足す

引く

	①	②	③	④	⑤
A	0	0			
B	0		25	15	
C	15	5	0	0	
D				15	0
E				10	0

	①	②	③	④	⑤
A	0	0			
B	0		25	15	
C	15	5	0	0	
D				5	0
E				0	0

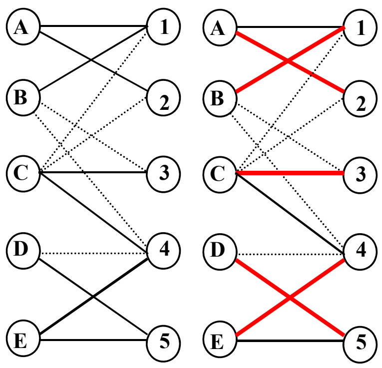
手順1へ戻る

手順1　割当案の作成

「0」部分だけで
最大マッチングを求める

	①	②	③	④	⑤
A	0	0			
B	0		25	15	
C	15	5	0	0	
D				5	0
E				0	0

	①	②	③	④	⑤
A	0	0			
B	0		25	15	
C	15	5	0	0	
D				5	0
E				0	0



「0」部分のみ抽出　完全マッチング

最適割当の導出

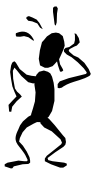
得られた割当

	①	②	③	④	⑤
A	0	0			
B	0		25	15	
C	15	5	0	0	
D				5	0
E				0	0

総コストが最小な割当
(最適割当)

	①	②	③	④	⑤
A	25	30			
B	20		70	35	
C	80	75	90	65	
D				55	40
E				60	50

20+30+90+60+40=240



どうして発見できたのだろう?

練習　ハンガリアン法で解いてみよう

(1)

	①	②	③
A	4	6	3
B	4	7	6
C	2	3	4

(2)

	①	②	③
A	3	4	3
B	3	6	8
C	4	7	5

練習　ハンガリアン法で解いてみよう

(3)

	①	②	③
A	3	4	3
B	9	2	9
C	6	4	8

(4)

	①	②	③	④
A	15	6	9	8
B	3	13	7	6
C	9	10	5	11
D	3	5	7	11

演習4

資格の必要な4つの仕事のために4人採用した．
保有資格のランクが異なり，仕事により給料が変わる．
人件費を最小にするには誰にどの仕事を割当てる?

	仕事①	仕事②	仕事③	仕事④
Aさん	45	無資格	無資格	30
Bさん	50	55	15	無資格
Cさん	無資格	60	25	75
Dさん	45	無資格	無資格	35

（単位：万円）

演習5

ある課の課長は，5人の部下A～Eと5つの異なる仕事を持っているが，これらの仕事は，その仕事を行なう部下との組合せで必要とする時間が異なってくる。今，5つの仕事をP～Tとしたとき，A～Eが各仕事に必要とする時間数は表のとおりである。部下1人に1つの仕事を割り当て，全体で要する時間を最小にする時，時間の合計はいくらか。（国家Ⅰ種，平成9年度改題）

仕事に必要とする時間

	P	Q	R	S	T
A	5	5	8	5	5
B	4	5	9	7	11
C	4	4	6	6	11
D	4	3	11	8	11
E	2	3	4	6	9

応用(1)　最大化

重み和最大の割当を求めよう

	P	Q	R	S	T
A	5	5	8	5	5
B	4	5	9	7	11
C	4	4	6	6	11
D	4	3	11	8	11
E	2	3	4	6	9

応用(2)　不均衡

(1) 重み和最小の割当は？

	①	②
A	4	6
B	4	7
C	2	3

(2) 重み和最大の割当は？

	①	②	③	④
A	15	6	9	8
B	3	13	7	6
C	9	10	5	11

ここまでのまとめ

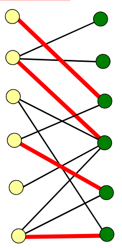
- 最大マッチングを求める
  - 市松模様で色分け可能(2部グラフ)の場合
  - 一般グラフの場合

ハンガリアン法

- 割当問題　誰にどの仕事を割り当てる?
- 配属問題　ゼミの配属を決めよう
- 安定結婚問題　不満を抑えるマッチング

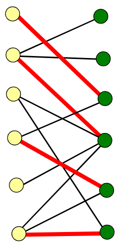
寄り道　増加道の見つけ方

奥を優先して探索



→ 奥優先探索法
Depth first search

幅を優先して探索

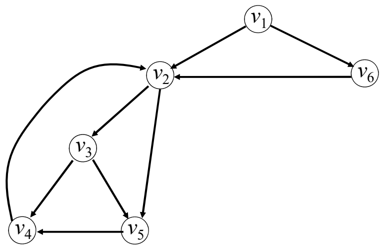


→ 幅優先探索法
Width first search

より一般的に捉えると…

グラフの探索

グラフ上のすべての点と枝を走査すること



効率の良いグラフの探索方法

奥優先探索（別名：深さ優先探索）
Depth-first search

幅優先探索
Width-first search

Step1: 出発点にラベル付ける

以下のStep2, 3を未探索枝がなくなるまで繰り返す.

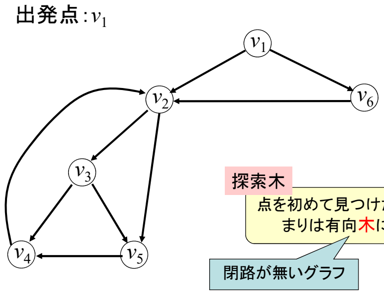
Step2: **最新ラベルを持つ点**から未探索枝を走査

Step2: **最古ラベルを持つ点**から未探索枝を走査

Step3: 枝の終点にラベルが無いならラベルを付け

例1 奥優先探索をしてみよう

出発点 : v_1



探索木

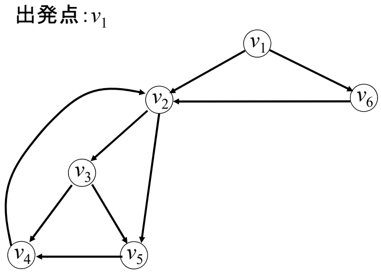
点を初めて見つけた枝の集まりは有向木になる

閉路が無いグラフ

探索木は有益な情報を
提供することが多い

例2 幅優先探索をしてみよう

出発点 : v_1



探索木は?

探索木利用 点への順序付け

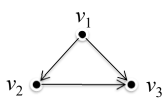
- 前順(先行順 : pre order)
  - ➤ラベルと同時に番号付け
- 後順(後行順 : post order)
  - ➤親の点に戻るときに番号付け

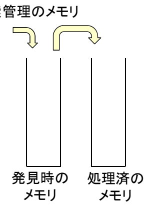
他にも
中間順(in order)
幅優先順(breadth-first order)
などがある

練習　v_1から

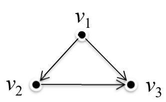
※(今回は)自由度があるとき番号順で選択しよう

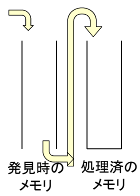
(1) 奥優先探索の探索木を描こう





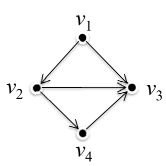
(2) 幅優先探索の探索木を描こう





ワーク5　(1) v_1から奥優先探索をした場合の探索木を描いてみよう
※選択できる場合は番号の小さい点を優先

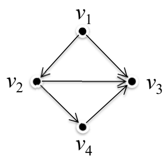
(2) 各点に前順, 後順を付してみよう



ワーク6 (1) v_1から幅優先探索をした場合の探索木を描いてみよう

※選択できる場合は番号の小さい点を優先

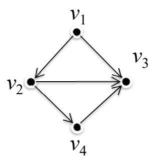
(2) 各点に前順，後順を付してみよう



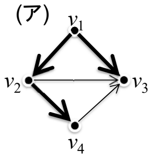
クイズ1 v_1から

Q1: 奥優先探索をした場合の探索木はどれ?(すべて求めよ)

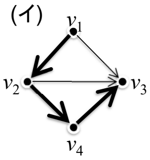
Q2: 幅優先探索をした場合の探索木はどれ?(すべて求めよ)



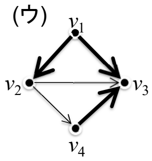
(ア)



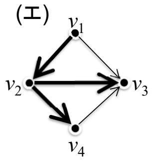
(イ)



(ウ)



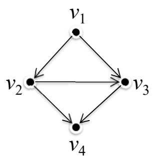
(エ)



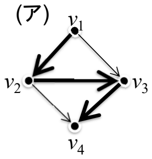
クイズ2 v_1から

Q1: 奥優先探索をした場合の探索木はどれ?(すべて求めよ)

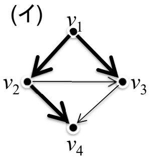
Q2: 幅優先探索をした場合の探索木はどれ?(すべて求めよ)



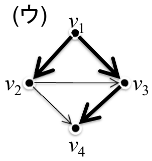
(ア)



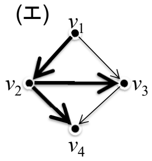
(イ)



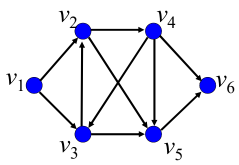
(ウ)



(エ)



演習6 グラフの探索



出発点：v_1として右のグラフを以下の方法で探索せよ.

（1）奥優先探索
（2）幅優先探索

また，各々の探索木を示せ.

（3）奥優先探索での探索木を利用し，各点に前順・後順を各々付けてみよう。

おまけ：マッチされる・されない

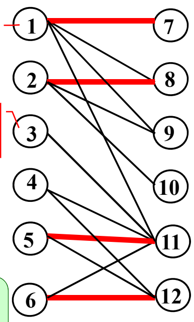
最大マッチングの時…

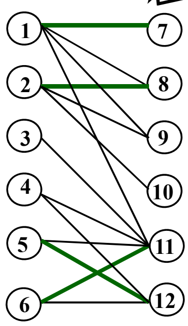
いつでもマッチされる

いつでもマッチされない

どうしていつでも？

他の要素は，マッチされる？されない？





詳しくは，「グラフの分解」にて