

# Network Programming II

Shortest path problem  
最短路を探せ!

---

---

---

---

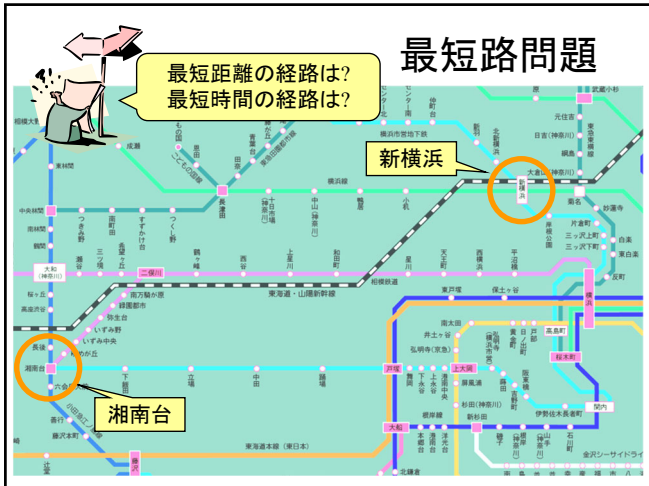
---

---

---

---

1



---

---

---

---

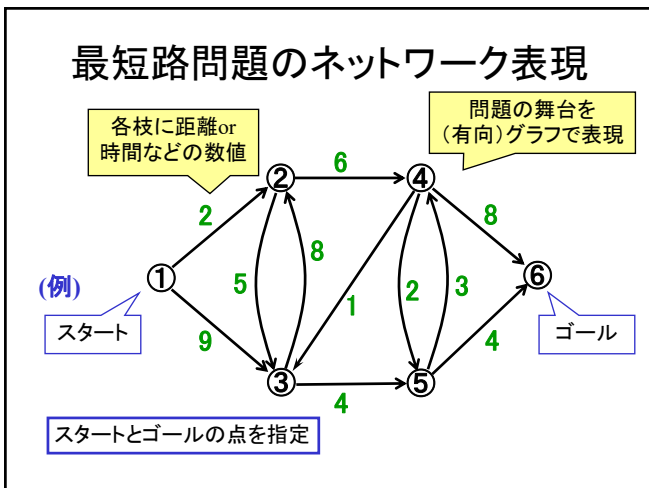
---

---

---

---

2



---

---

---

---

---

---

---

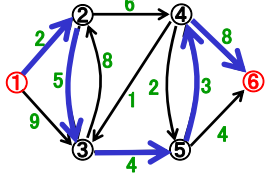
---

3

## パス(経路)とその長さ

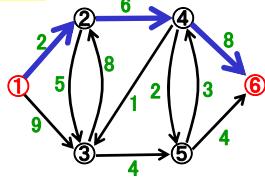
パス(経路): ある点とある点を結ぶ枝の列(向きに注意!)

パスA



パスの長さ:  $2+5+4+3+8=22$

パスB



$2+6+8=16$

- スタートとゴールを結ぶパスは多数
- その中で長さが最短のパス = 最短路
- 最短路を見つける問題: 最短路問題

4

---

---

---

---

---

---

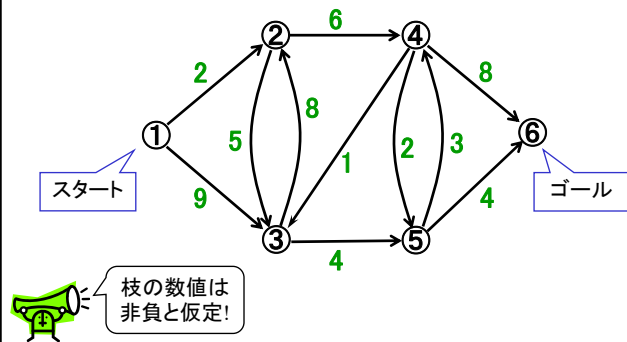
---

---

---

---

## 例題1 最短路を求めよ



5

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## 例題1(続) 最短路ではないパス

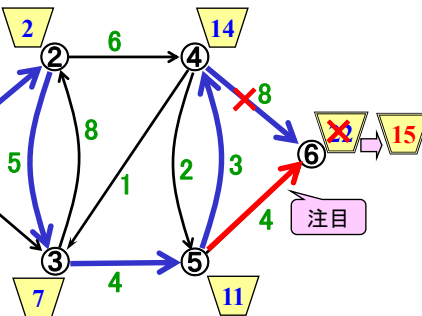
なぜ最短路ではない?

現在把握している  
スタート点からの  
到達距離

0

スタート点  
は0と仮定

ポテンシャル



最短路を見つけた ⇔ ポテンシャルはどういう状況を満足している?

6

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### 最短路とポテンシャル

最短路を見つけていない

一般的に書くと

ある枝で  $p+a < q$  が成立

最短路を見つけていない証拠

下の性質を満たすポテンシャルのを見つけたいんだ。どうやって？

すべての枝で  $p+a \leq q$  が成立

最短路でない証拠が存在しない

最短路を見つけた！

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

7

### 例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの例

すべての枝で  $p+a \leq q$  が成立

確認してみよう

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

8

### 例題1(続) 性質を満たすポテンシャルのを見つけ方(1)

準備:

- スタートのポテンシャルを0
- 残りの点のポテンシャルは $\infty$
- 全点が未確定.

性質を満たすようポテンシャルを順に更新

**ダイクストラ法**  
Dijkstra

---

---

---

---

---

---

---

---

---

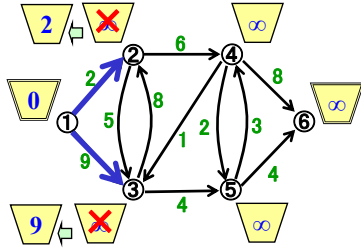
---

9

例題1(続) 性質を満たすポテンシャルのを見つけ方(1)

手順: 全点が確定するまで以下を繰り返す

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定



10

---

---

---

---

---

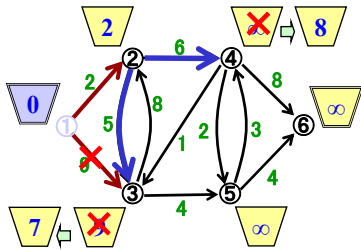
---

---

---

例題1(続) 性質を満たすポテンシャルのを見つけ方(2)

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定



11

---

---

---

---

---

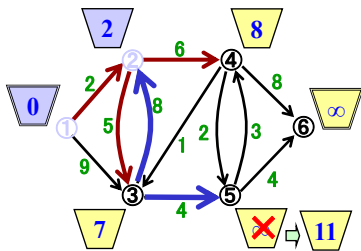
---

---

---

例題1(続) 性質を満たすポテンシャルのを見つけ方(3)

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定



12

---

---

---

---

---

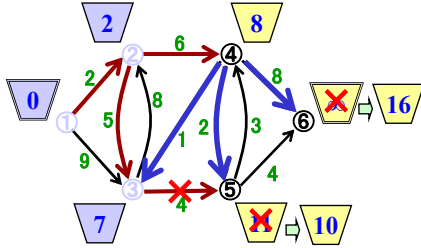
---

---

---

例題1(続) 性質を満たすポテンシャルのを見つけ方(4)

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定



13

---

---

---

---

---

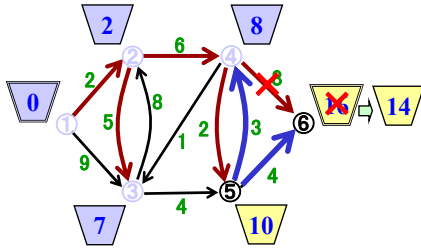
---

---

---

例題1(続) 性質を満たすポテンシャルのを見つけ方(5)

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定



14

---

---

---

---

---

---

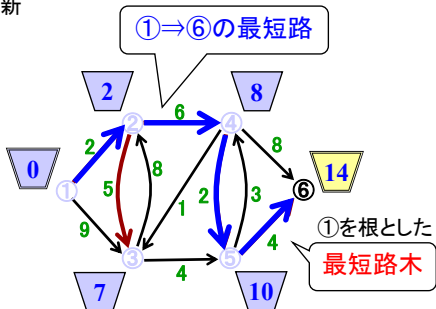
---

---

例題1(続) 性質を満たすポテンシャルのを見つけ方(6)

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定

⇓  
全点が確定し終了



最適なポテンシャルが見つかった ⇨ 最短路も見つかった

15

---

---

---

---

---

---

---

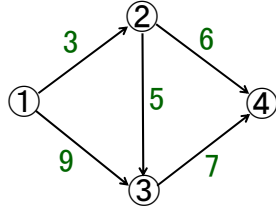
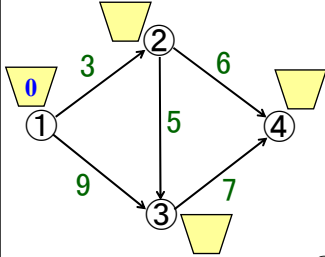
---

## 練習1 ダイクストラ法

①を根とした最短路木は?  
→ダイクストラ法で求める



①→④の最短路は?  
→最短路木をなぞる



①→④の最短路の長さは

16

---

---

---

---

---

---

---

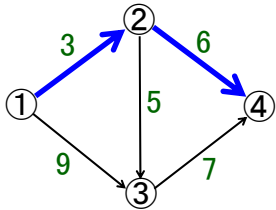
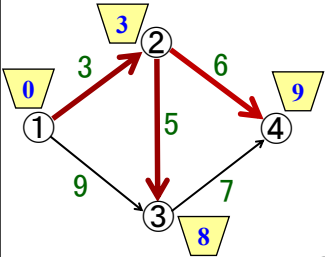
---

## 練習1 ダイクストラ法 (解答例)

①を根とした最短路木は?  
→ダイクストラ法で求める



①→④の最短路は?  
→最短路木をなぞる



①→④の最短路の長さは

17

---

---

---

---

---

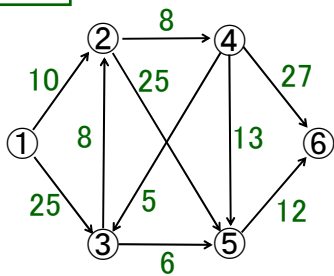
---

---

---

## 練習2 ダイクストラ法

①⇒⑥の最短路は?



①⇒⑥の最短路の長さは? ⇒

18

---

---

---

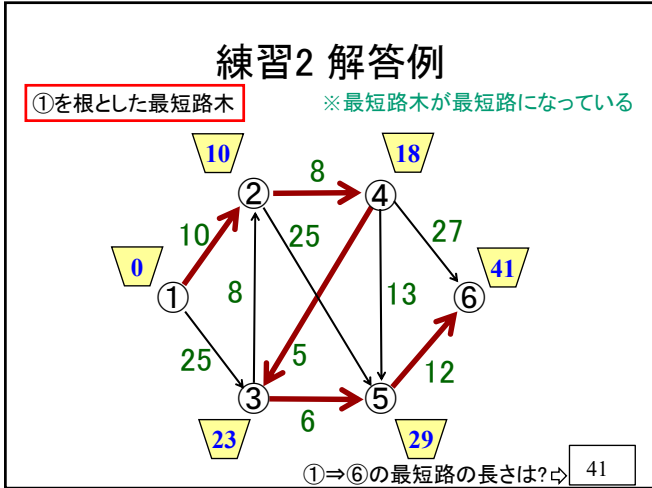
---

---

---

---

---



19

---

---

---

---

---

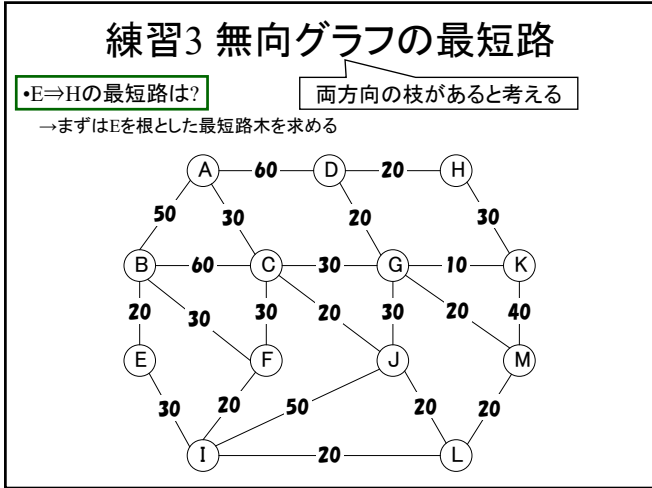
---

---

---

---

---



20

---

---

---

---

---

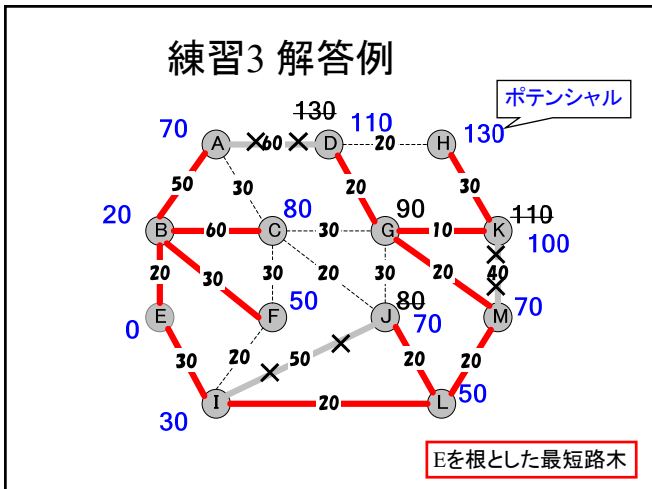
---

---

---

---

---



21

---

---

---

---

---

---

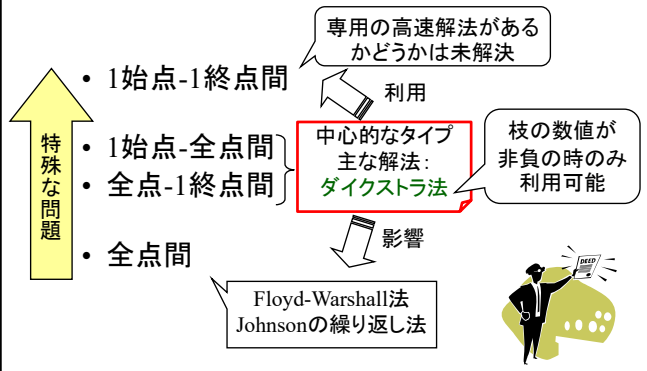
---

---

---

---

## 最短路問題のタイプ



22

---

---

---

---

---

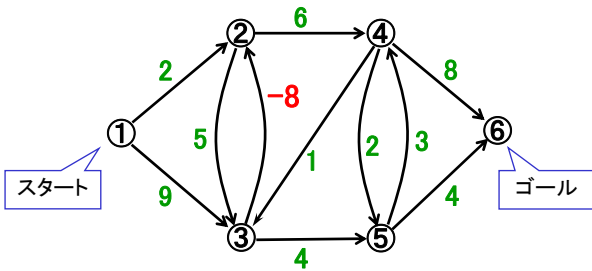
---

---

---

## 例題2 負の長さがある場合

最短路を求めよ



23

---

---

---

---

---

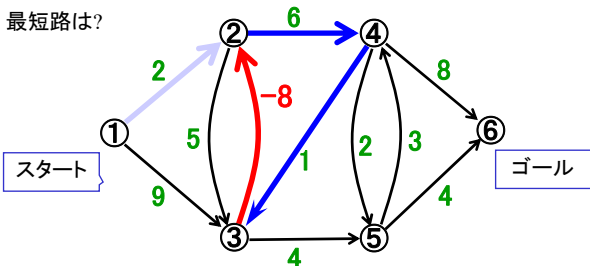
---

---

---

## 例題2(続) 負閉路の存在

最短路は?



ダイクストラ法で実施 ⇒ 確定したはずの点が確定できない  
⇒ 正しい最短路を導かない

負の値があるときは、別な解法を適用 (例: ベキ乗法)

24

---

---

---

---

---

---

---

---



## 応用例1 端末取替

5年契約で端末リースを受けたい  
費用は、5年分のリース料と維持費の合計

		端末リース料					端末維持費	
から	まで	12年	13年	14年	15年	16年	1年間	2年間
2011年		5	9	13	15	19	1	3
2012年			6	10	17	17	3	6
2013年				7	15	15	6	11
2014年					9	12	11	16
2015年						11	16	
		(百万円)					(百万円)	

5年間の最も安価な契約内容を提案せよ

---

---

---

---

---

---

---

---

---

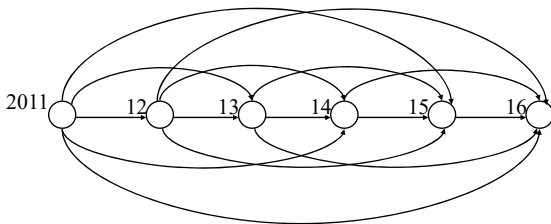
---

---

---

25

## 応用例1 (続き) ネットワークで表現しよう



- 費用最小な取替計画を見つけてみよう
- 最短路問題との関連は?

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

26

## 応用例2

文教警備では9時から17時までの正門警備を請け負った。  
正門警備は常時1人の警備員が居ればよい(複数人でも可)。

警備員採用候補者は5名。勤務時間・給与は固定。給料支払総額を最小になるよう採用者を決定せよ。

採用候補者	A	B	C	D	E
勤務時間(固定)	09-11	09-15	11-15	11-17	13-17
給料(固定)	¥6000	¥18000	¥10000	¥1900	¥8000

ヒント:



9, 11, 13, 15, 17時を点に対応させた  
「あるネットワーク」で問題を表現してみよう。  
→最短路問題で解けるよ。

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

27

## ダイクストラ法の高速実現法

ポテンシャル最小の点を高速に発見する

- 未確定点を配列でなくリスト構造で保持  
(走査する点数を減らす)
- 未確定点をポテンシャルの値順に整列  
→ 整列アルゴリズムの知識が必要

効率的実装に

基本的なアルゴリズム+  
データ構造の知識は  
不可欠



28

---

---

---

---

---

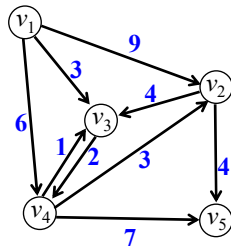
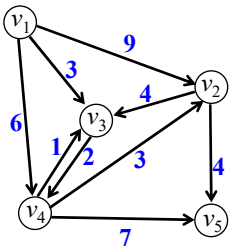
---

---

---

## 演習6-1

- (1) 点 $v_1$ を根とした最短路木を求めよ。 (2) 点 $v_1$ から点 $v_5$ への最短路を求めよ。



- (3) 点 $v_1$ から点 $v_5$ への最短路の長さは?

29

---

---

---

---

---

---

---

---

## 演習6-2



文教警備では9時~17時までの警備を契約社員でまかなう。  
警備は常時1人いればよい(複数人いても問題はない)。  
候補者8人をリストアップした。契約上労働時間帯も給料も変更不可。

候補者	A	B	C	D	E	F	G	H
労働時間帯	9-12	9-11	10-13	12-15	12-17	13-16	14-17	16-17
給料	31	14	16	22	38	26	15	9

支払う給料の合計を最小にしたい。

- (1) 採用者と警備計画(誰がどの時間帯に警備するか)を提案せよ。  
(2) 依頼者から9時~15時の警備に変更したいとの連絡があった。  
採用者と警備計画(誰がどの時間帯に警備するか)を提案せよ。

31

---

---

---

---

---

---

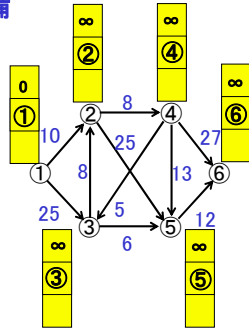
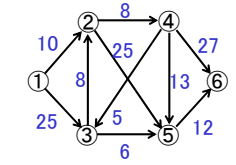
---

---

## 練習1 解答例詳細

①⇒⑥の最短路は?

準備



- ポテンシャル
- ポテンシャルを更新した点
- 確定済? F=確定

32

---

---

---

---

---

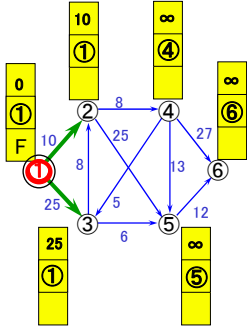
---

---

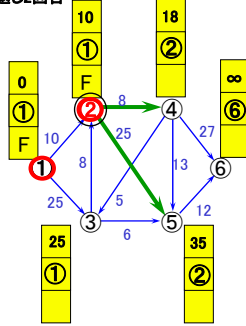
---

## 練習1 ポテンシャルの更新

繰り返し1回目



繰り返し2回目



33

---

---

---

---

---

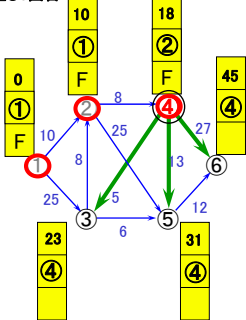
---

---

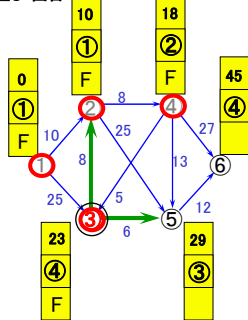
---

## 練習1 ポテンシャルの更新(2)

繰り返し3回目



繰り返し4回目



34

---

---

---

---

---

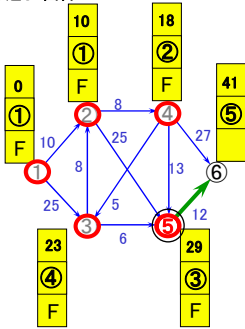
---

---

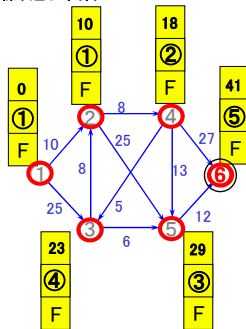
---

### 練習1 ポテンシャルの更新(3)

繰り返し5回目



繰り返し6回目



35

---

---

---

---

---

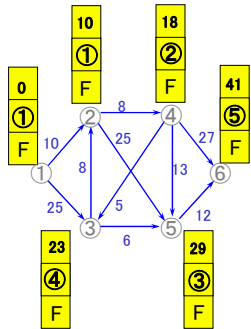
---

---

---

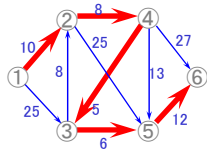
### 練習1 解答例 まとめ

繰り返し6回目



終了

①を根とした最短路木



最短路の長さは41

36

---

---

---

---

---

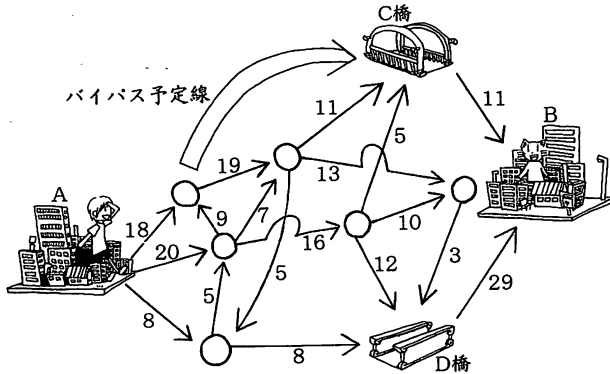
---

---

---

## 演習問題

- 14.1 図の道路ネットワークは、A町B町とその周辺の道路を表しています。枝のわきの数字は、各道路を通過する所要時間（分）です。A町からB町までの最短ルートをダイクストラ法で求めなさい。



- 14.2 図のA町からB町への最短ルートは、C橋を通るのですが、この橋は毎日渋滞します。他にもD橋があるので、こちらを通ると大回りになり、時間がかかります。渋滞が発生して、C橋を通るのにかかる時間が増えていくと、そのうち、迂回するのと渋滞を我慢して通り抜けるのと、両方の時間が同じになります。C橋の通過にかかる時間がどこまで増えると同じになるか、計算しなさい。
- 14.3 A町とB町の間、図のようにバイパスを作る計画があります。最短ルートの中央付近の交通量が多いので、迂回させたいのです。迂回路のほうが遅いと渋滞は減らないので、速い迂回路を作りたいのですが、どれくらい短い時間で通過できるバイパスを造れば、迂回路のほうが速くなるでしょうか。これ以下なら、迂回路の方が速い、という、バイパスの所要時間を答えなさい。

(松井 根本 宇野著: 入門オペレーションズ・リサーチ, 東海堂出版会 (2008), 第4章より)