


Network Programming IV

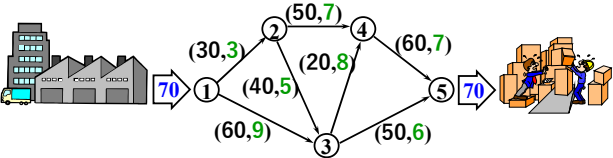


ものを効率よく流す
最小費用フロー問題

1

例題1 輸送作戦

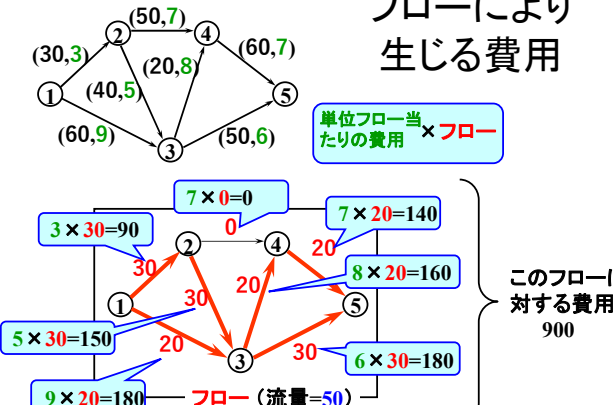
文教工業では工場から倉庫へ70トン製品を輸送したい。最も費用の安い輸送計画を提案してほしい。



(枝の容量(トン),1トン当たりの費用(万円))

2

フローにより生じる費用



単位フロー当たりの費用 × フロー

このフローに対する費用 900

3

最小費用フロー問題

目的 フローにより生じる費用→最小

条件 指定された流量の実行可能フローであること



最小費用フロー: 指定された流量を持つ
費用最小の実行可能フロー

4

最小費用流問題に対する主な解法

• 負サイクル法

- コストがより下がる閉路を見つけて更新する.
- 簡単. 工夫次第でより高速にできる.

• 最短路繰返し法(→主双対法)

- コスト最短路にフローを流す手続きを繰返す.
- 簡単. 工夫次第でより高速にできる.

• ネットワーク単体法

- 実用的解法.

他多数の解法が提案されている.

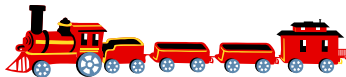
5

最短路繰返し法

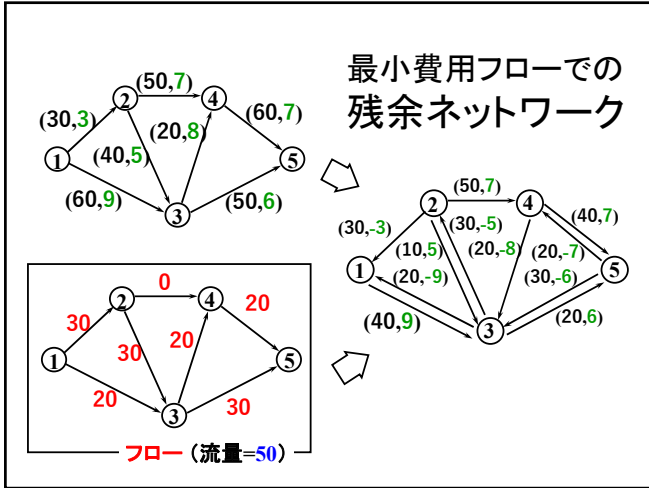
手順1:全枝のフローを0と置く.

手順2:以下を指定流量が得られるまで繰返す.

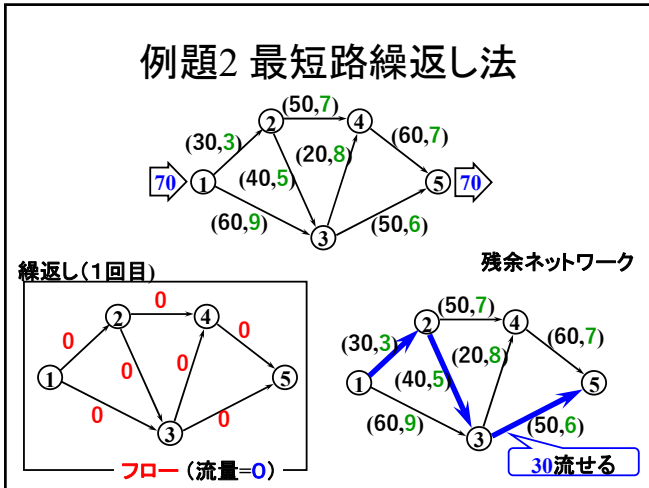
- (1) **残余ネットワーク**を作る.
- (2) 残余ネットワーク上で供給点から需要点への**コスト最小の路**(最短路)を求める.
- (3) 最短路に沿って流せるだけ**フローを流す**.



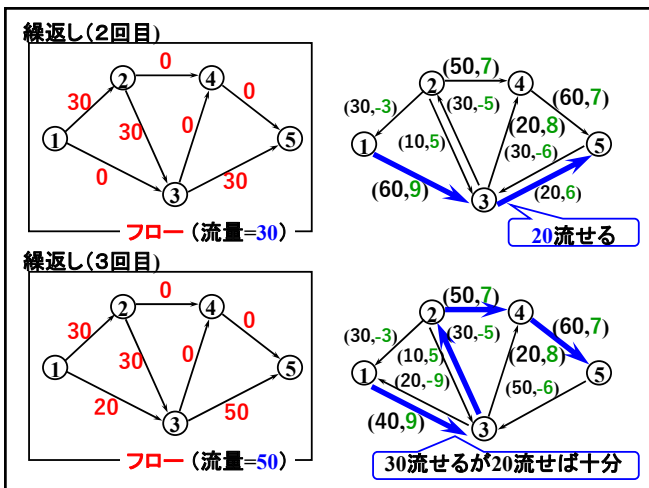
6



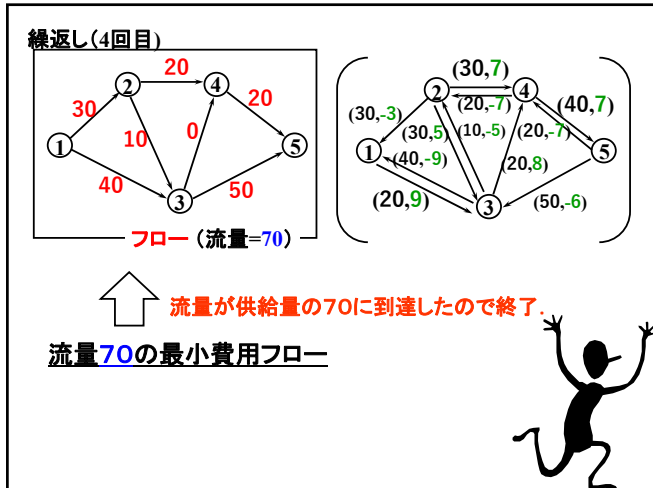
7



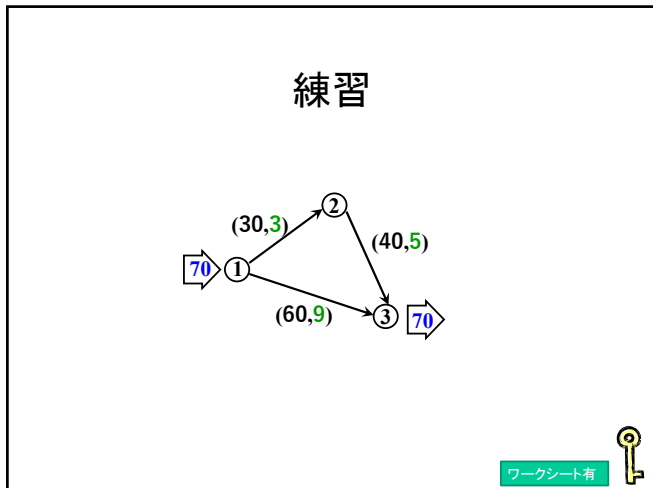
8



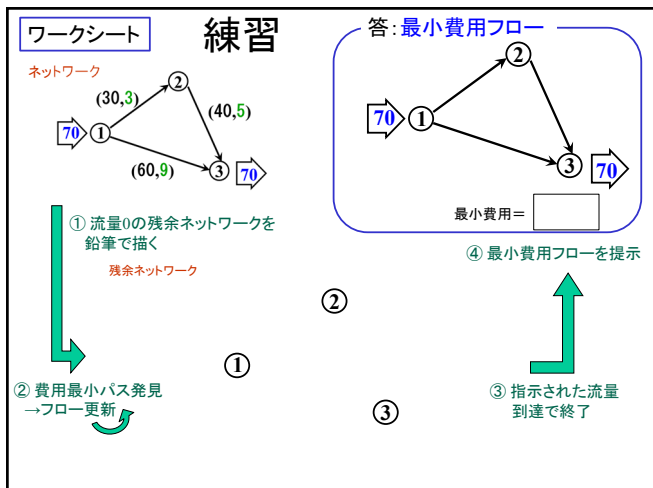
9



10



11



12

解答例

ワークシート

ネットワーク

① 流量0の残余ネットワークを鉛筆で描く
残余ネットワーク

② 費用最小パス発見
→フロー更新

答: 最小費用フロー

④ 最小費用フローを提示

最小費用 = **600**

③ 指示された流量到達で終了

① $8 \times 30 = 240$
② $9 \times 40 = 360$
③ 合計

13

演習1

流量40の最小費用フローを求めよ。また、その時の費用を求めよ。

(容量, 1単位当たりの費用)

ワークシート有

14

ワークシート

演習1

ネットワーク

① 流量0の残余ネットワークを鉛筆で描く
残余ネットワーク

②

①

④

③

④ 最小費用フローを提示

③ 指示された流量到達で終了

答: 最小費用フロー

最小費用 =

15

解答例

ワークシート 演習1

ネットワーク

① 流量0の残余ネットワークを鉛筆で描く
残余ネットワーク

② 費用最小パス発見 → フロー更新

③ 指示された流量到達で終了

④ 最小費用フローを提示

答: 最小費用フロー

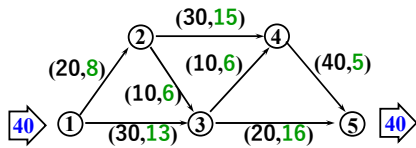
最小費用 = 380

① $3 \times 10 = 30$
② $9 \times 10 = 90$
③ $10 \times 10 = 100$
④ $11 \times 10 = 110$ 合計

16

演習1-2

流量40の最小費用フローを求めよ。また、その時の総費用も示せ。



(容量, フロー1単位当たりの費用)

17

最短路繰返し法の弱い点

残余ネットワークに負の長さの枝が現れる。

最短路を求めるのにダイクストラ法が使えない。

対策1

対策2

ダイクストラ法より計算時間はかかるが、負の長さも扱える解法を利用する。

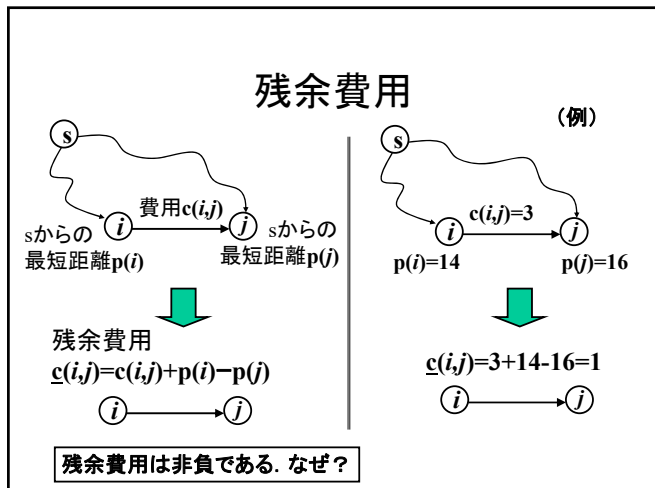
残余ネットワークを工夫し、高速なダイクストラ法を利用する。

あまり良い対策ではない

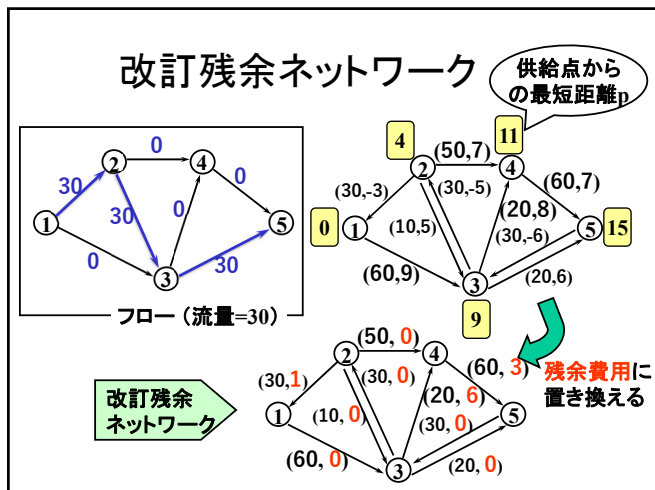


残余費用の導入

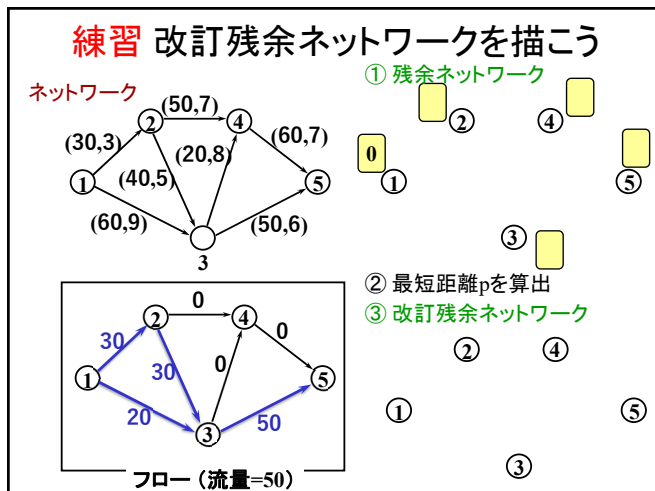
18



19



20



21

練習 解答例

ネットワーク

① 残余ネットワーク

② 最短距離pを算出

③ 改訂残余ネットワーク

フロー (流量=50)

22

改訂最短路繰り返し法

手順1:全枝のフローを0, 各点での $p(v)$ を0とおく.

手順2:以下を指定流量が得られるまで繰り返す.

- (1) **改訂残余ネットワーク**を作る.
 - ① 現在のフローに対するネットワークの構造を作る
 - ② 現在の p に対する残余費用を定める
 - ③ 供給点から各点への最短距離 $d(v)$ を求める.
- (2) 供給点から需要点への**最短路**に沿って流せるだけ**フローを流す**.
- (3) 各点において $p(v) \leftarrow p(v) + d(v)$ とおく.

23

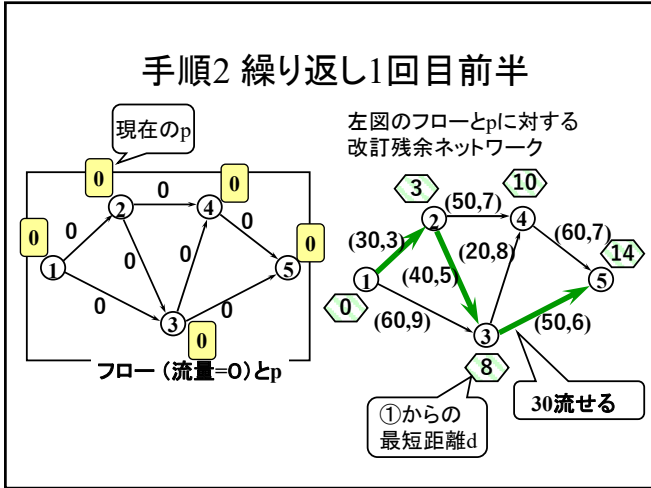
例題3 改訂最短路繰り返し法

問題

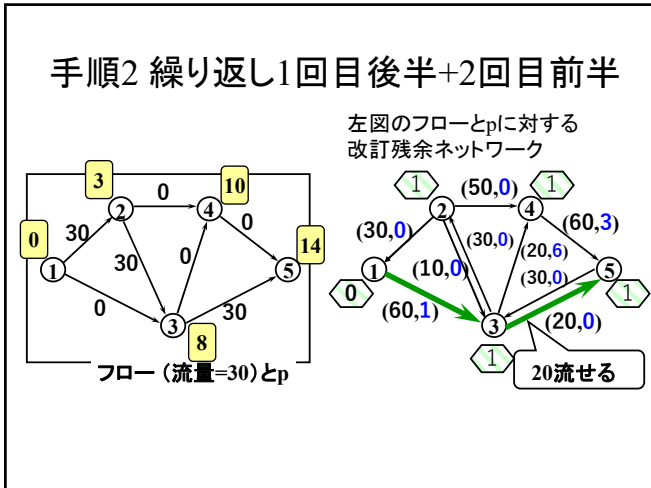
手順1 初期設定

フロー (流量=0)と p

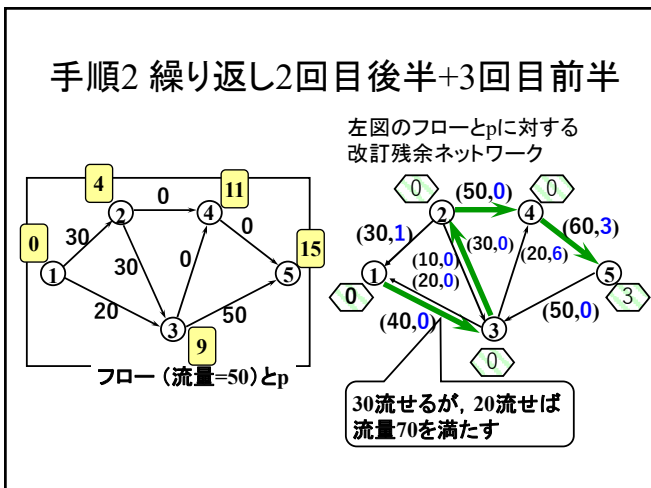
24



25

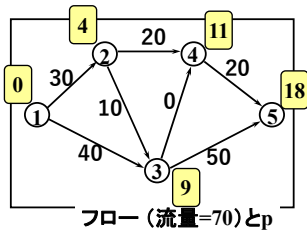


26



27

手順2 繰り返し3回目後半+4回目前半

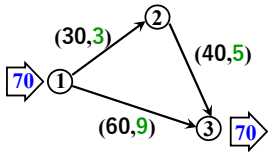


演習8-2
演習8-1において、改訂最短路繰り返し法を用いて最小費用フローを求めてみよう。

フロー（流量=70）とp
↑ 流量が70に到達したので終了
流量70の最小費用フロー

28

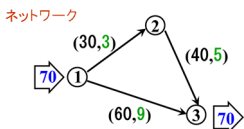
練習 2



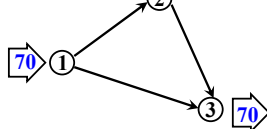
ワークシート有

29

ワークシート 練習2



答: 最小費用フロー



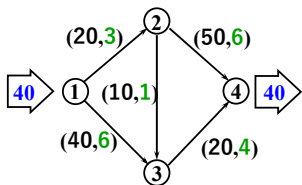
- ① 流量0の改訂残余ネットワークを鉛筆で描く
改訂残余ネットワーク
- ② 費用最小パス発見
→ フロー更新
→ 残余費用更新

- ③ 指示された流量到達で終了
- ④ 最小費用フローを提示
最小費用 =

30

演習2

流量40の最小費用フローを「改訂最短路繰り返し法」にて求めよ。



(容量, 1単位当たりの費用)

ワークシート有

31

ワークシート

演習2

答: 最小費用フロー

① 流量0の改訂残余ネットワークを鉛筆で描く
改訂残余ネットワーク

② 費用最小パス発見
→フロー更新
→残余費用更新

③ 指示された流量到達で終了

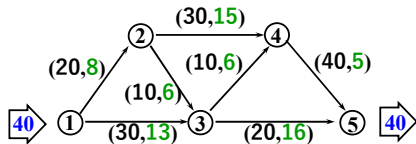
④ 最小費用フローを提示

最小費用 =

32

演習3

流量40の最小費用フローを求めよ。また、その時の総費用も示せ。



(容量, フロー1単位当たりの費用)

33

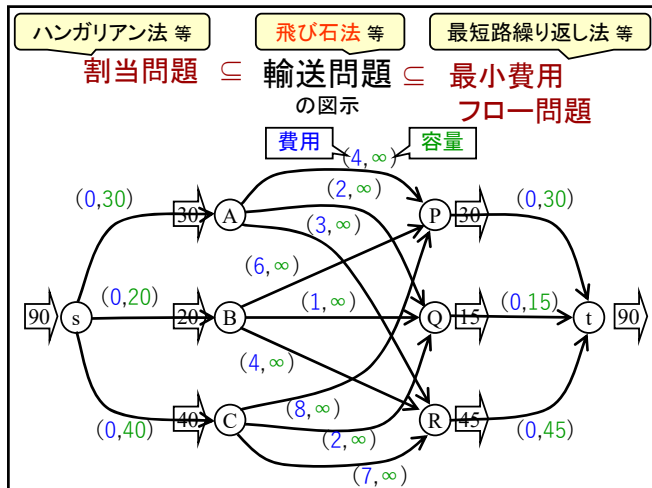
例題5 輸送問題

ある会社では、倉庫A,B, Cにそれぞれ30(千個), 20(千個), 40(千個)の製品を保管しているが、これをP町, Q町, R町にそれぞれ30(千個), 15(千個), 45(千個)ずつ発送したい。

輸送費	(万円/千個)		
	P町	Q町	R町
倉庫A	4	2	3
倉庫B	6	1	4
倉庫C	8	2	7

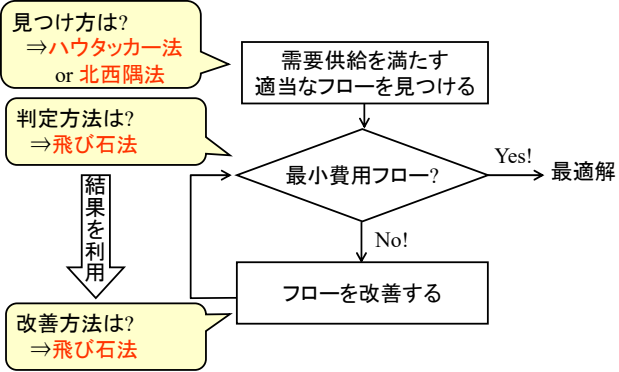
輸送費総額が最小になる輸送プランを提示せよ。

37



38

輸送問題に特化した解法



39

**需要・供給を満たすフローを見つける方法
ハウタッカー法**

費用の安い順に流していく

	P	Q	R	供給量
A	4	2	3	30
	0	0	30	
B	6	1	4	20
	0	15	5	
C	8	2	7	40
	30	0	10	
需要量	30	15	45	

初期フローが得られた！

40

最小費用かを判定する 飛び石法

現在「0」の部分にフローを流したら費用が改善するかをチェック

例: CQを増やしてみよう

変更可能な最大量は?
⇒10

	P	Q	R
A	4	2	3
	0	0	30
B	6	1	4
	0	15	5
C	8	2	7
	30	0	10

$+2 - 7 + 4 - 1 = -2$

⇒ サイクルに沿ってフロー変更すると、費用は下がる
 ⇐ 現在のフローは最小費用フローではない

41

フロー更新⇒飛び石法の繰り返し

更新後のフロー

例: APを増やしてみよう

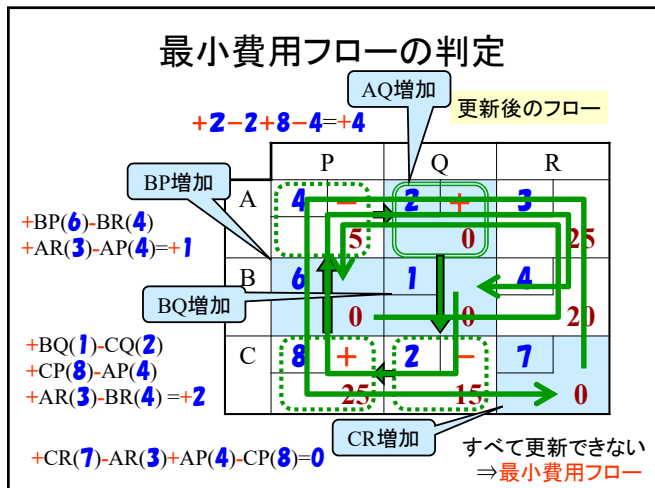
サイクル

	P	Q	R
A	4	2	3
	0	0	30
B	6	1	4
	0	5	15
C	8	2	7
	30	10	0

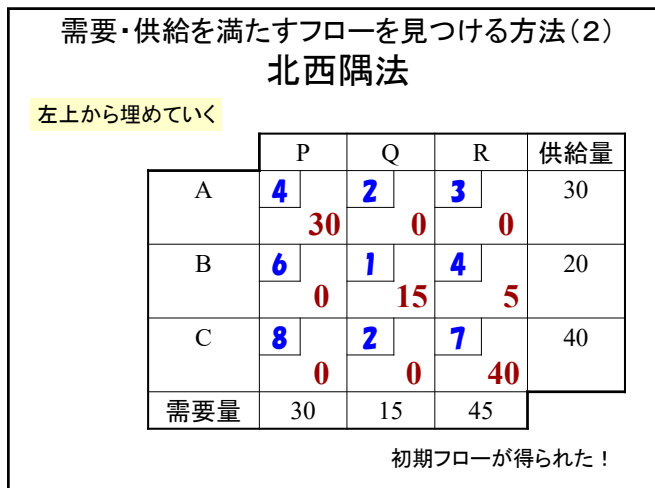
$+4 - 8 + 2 - 1 + 4 - 3 = -2$

⇐ 最小費用でない
 ⇐ サイクルに沿って
 5変更可能 ⇐ フロー更新

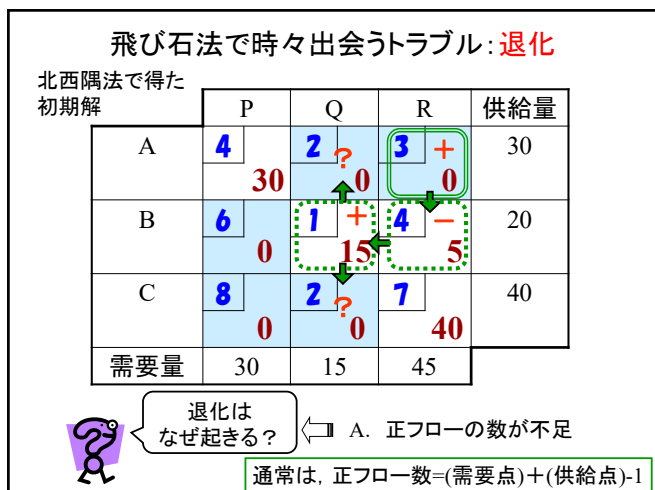
42



43



44



45

退化時の対処法

	P	Q	R	供給量
A	4	2 -	3 +	30
	30	ε +	0	$+\varepsilon$
B	6	1 +	4 -	20
	0	15	5	
C	8	2	7	40
	0	0	40	
需要量	30	15 + ε	45	

判定可能

0をほんのちよつと(= ε)増やす
イプシロン

46

最小費用輸送案の導出(1)

	P	Q	R	供給量
A	4	2 -	3 +	30
	30	ε +	0	$+\varepsilon$
B	6	1 +	4 -	20
	0	15	5	
C	8	2	7	40
	0	0	40	
需要量	30	15 + ε	45	

AR増加 $+AR(3)-AQ(2)$
 $+BQ(1)-BR(4)=-2$

47

最小費用輸送案の導出(2)

	P	Q	R	供給量
A	4	2	3	30
	30	0	ε	$+\varepsilon$
B	6	1 -	4 +	20
	0	15 + ε	5 - ε	
C	8	2 +	7 -	40
	0	0	40	
需要量	30	15 + ε	45	

CQ増加 $+CQ(2)-CR(7)$
 $+BR(4)-BQ(1)=-2$
(15+ ε)の変更

48

最小費用輸送案
の導出(3)

更新できる箇所が無い
⇒最小費用輸送案の発見

	P	Q	R	供給量
A	4 30	2 0	3 0-ε	30 1ε
B	6 0	1 0	4 20	20
C	8 0	2 15+ε	7 25-ε	40
需要量	30	15 1ε	45	

εを0にリセットする

49

演習5 輸送問題

	P	Q	R	供給量
A	2	3	1	30
B	4	1	2	20
需要量	25	10	15	

倉庫A,Bから、町P,Q,Rへの最小費用輸送プランを提示せよ

50

演習6 輸送問題

文教サイクルは、3つの工場と4つの販売店を有している。各工場の週間製造台数、工場から販売店への輸送費、各販売店の週間需要は以下の通りである。

	販売店①	販売店②	販売店③	販売店④	週間製造台数
工場A	6千円/台	7千円/台	3千円/台	7千円/台	100台
工場B	8千円/台	3千円/台	6千円/台	5千円/台	250台
工場C	5千円/台	4千円/台	5千円/台	6千円/台	150台
週間需要台数	80台	160台	60台	200台	

総輸送費を最小にするには、各工場から各販売店へどのように製品を輸送すれば良いか。

51

演習7

文教堂は音楽配信ビジネスを軌道に乗せた。そこで更なる業務の拡大をインターネット通信会社の文教ネットに相談してみた。その結果、ネットワーク利用に関する制限と費用に関して情報を得た。以下がそのやり取りの要約である。



文教堂の要求:

文教堂では都市Sにある本社から3つの都市1, 都市2, 都市3にある各支社に様々なデータを常時送り出している。業務の拡大に併せ、単位時間あたり1ギガ(G)バイトのデータを配信する体制を整えたい。つまり、本社からは単位時間あたり合計3ギガバイトのデータを常時送り出し、各支社は1ギガバイトのデータを常時受け取りたい。業務拡大なのでコスト増は仕方が無いが、できるだけ安くネットワーク配信体制の拡大を行いたい。



文教ネットの回答:

わが社が持っている回線網と各都市間の通信線を利用した場合の費用は下の図のとおりです。都市Sから各都市にはネットワークが張られていますので要望にはお答えできます。ただし、各都市間の通信線(枝)には、通信量の限界があり各通信線は最大で単位時間あたり1ギガ(G)バイト分しか提供できません。どの通信線を使うかは文教堂さんで決めて申し込んでください。

※ギガ(G)バイト:データ量の単位。

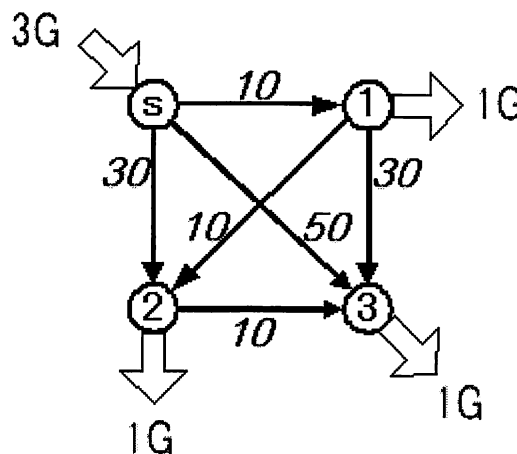


図:文教ネットが持つ通信網。枝の向き方向にしか通信はできない。各枝の側にある数字はその都市間の通信線の1ギガあたりの利用料金(単位:10万円)である。

以下の問に答えよ。

- (1) 文教ネットの持つ通信網のグラフを隣接行列, 接続行列, リスト表現の3通りで表現せよ。
- (2) 仮に文教ネットの通信網の各都市間の通信線(枝)に通信量の制限が無かったとすると, 文教堂はどのようにネットワークの利用を申し込めば利用料金が安く済むか提案せよ。
- (3) 実際は, 各都市間の通信線(枝)には, 単位時間あたり1ギガバイトしか送信できないという制限がある。この場合, 文教堂はどのようにネットワークの利用を申し込めば利用料金が安く済むか提案せよ。
- (4) 文教ネットのネットワーク施設改善により, 通信量の限界が各通信線とも2ギガに増強された。文教堂はネットワーク利用をどのように変更したらよいのか。あらためて, 利用料金が最も安くなるネットワーク利用を提案せよ。

演習8

文教石油では3つの産油地(産油地1, 産油地2, 産油地3)を持ち, 4つの消費国(国A, 国B, 国C, 国D)に産油地で採掘された原油を運んでいる。輸送は主にタンカーで行う。しかし, 輸送量が膨大でタンカーを頻繁に運行するので, 個々のタンカーの運行状況から輸送費を割り出さなくとも, 産油地と消費国間の輸送によって生じるの年間輸送費は, そのルートの年間輸送量と単位量(1億トン)当たりの輸送費との積で算出できることが経験的にわかっている。文教石油の原油販売に関する基礎データは以下の表1から表3のように示される。

表1: 産油地と消費国間の単位量(1億トン)当たりの輸送費

	国A	国B	国C	国D
産油地①	4億円	8億円	9億円	-
産油地②	3億円	4億円	-	6億円
産油地③	-	-	1億円	9億円

※表1において, 「-」部分は, 政治的な理由で輸送が不可能なことをあらわす。

※各産油地と消費国間の輸送ルートは安定しており, 十分な量の輸送が可能である。

表2: 産油地の原油の年間生産量

産油地①	50億トン
産油地②	70億トン
産油地③	20億トン

表3: 消費国の年間原油購入量

国A	10億トン
国B	50億トン
国C	20億トン
国D	40億トン

以下の問いに答えよ。

- (1) 現在の状況は, 原油が生産過剰なのか。それとも, 生産量が不足しており需要を満たすことができない状況なのか。データを示して判断しなさい。
- (2) 現在, 文教石油では各産油地から各消費国への輸送を以下の表4に示されているように行っている。現在の輸送状況における年間輸送費はいくらか?

表4: 現在の産油地と消費国間の輸送状況

	国Aへ	国Bへ	国Cへ	国Dへ
産油地①から	0	50億トン	0	-
産油地②から	10億トン	0	-	40億トン
産油地③から	-	-	20億トン	0

- (3) 文教石油としては, 各消費国の年間購入量の増加は見込めないで, 利潤をより多く生み出すために年間の輸送コストを最小にしたい。そこで, 現在の輸送状況を見直したい。年間輸送費が最小な原油の輸送計画を文教石油に提案しなさい。ただし, 各消費国に購入量の原油は必ず運ばなくてはならないとする。
- (4) 小問(3)で提案した輸送計画を採用した場合, 現在の輸送状況に比べてどのくらい年間輸送費が節約できますか?