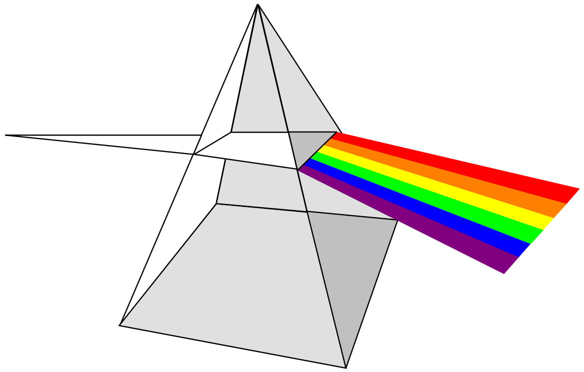


Linear Programming I

線形計画の解を導く素朴な方法達

線形計画とは
(Linear Programming)

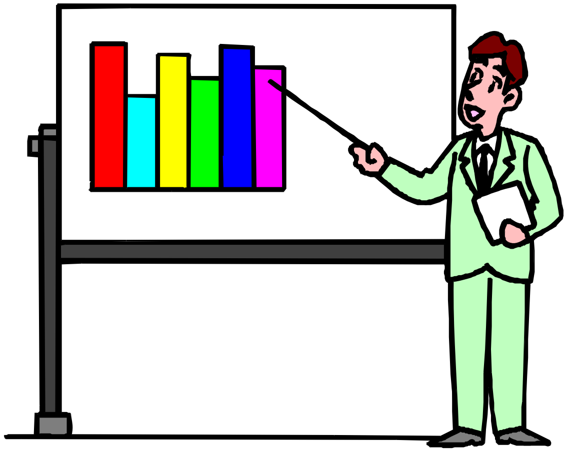
えるぴー
省略して「LP」と呼ぶ

- 数理計画の中で基礎的な問題

目的関数：線形
制約式：すべて線形

制約式の
数は有限

数理計画全般に影響する
興味深い性質が得られる



線形計画に対する主な解法

ここで学ぶこと

- 図を利用した解法
  - 2（～3）変数の問題の最適解を図で導く
- 総当たり法
  - 図は用いない．シンプレックス法の基礎
- シンプレックス法（Simplex method）
- 内点法（Interior point method)
  - 大規模な問題でも高速に最適解を求める

学習用

実用

例題1 生産計画

- 2つの液体製品P,Qは機械A,Bを用いて加工される
- 利益が最大になる1週間の製品P,Qの加工量は？

	液体P 1ml	液体Q 1ml	使用可能時間
機械A	3(h)	1(h)	45(h/週)
機械B	1(h)	2(h)	40(h/週)
利益	6(万円)	5(万円)	

⇨ 定式化してみよう

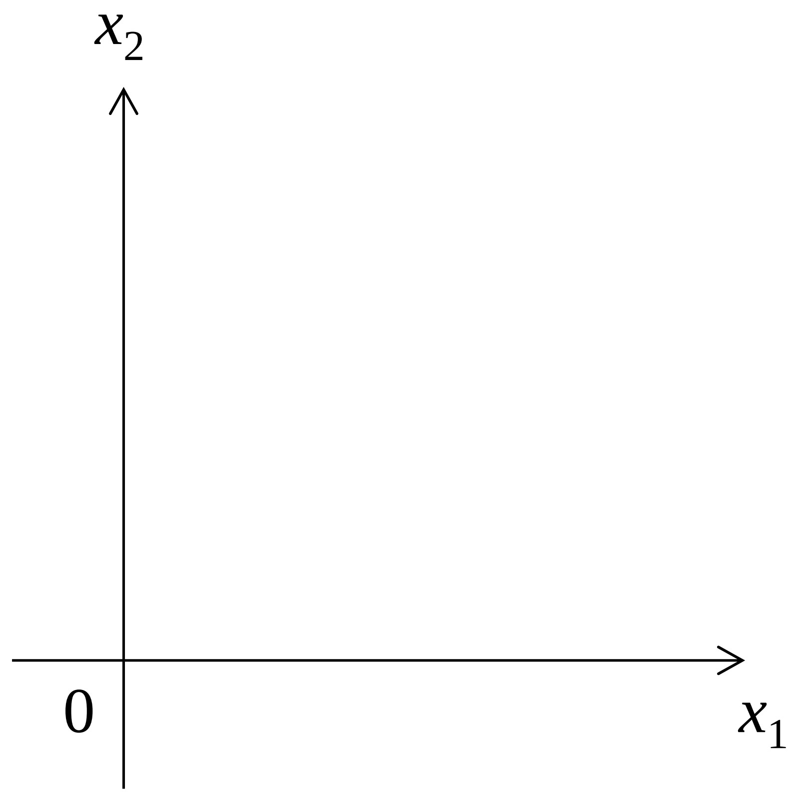
例題1(続) グラフを用いた解法

例題1を解いてみよう.

例題1を定式化

x_1：製品Pの生産量(ml)
x_2：製品Qの生産量(ml)

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\ & z=6x_1+5x_2 \\
\text{s.t.}\ & 3x_1+x_2 \leqq 45 \\
& x_1+2x_2 \leqq 40 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$



作業1：制約式をx_1-x_2平面に図示せよ.

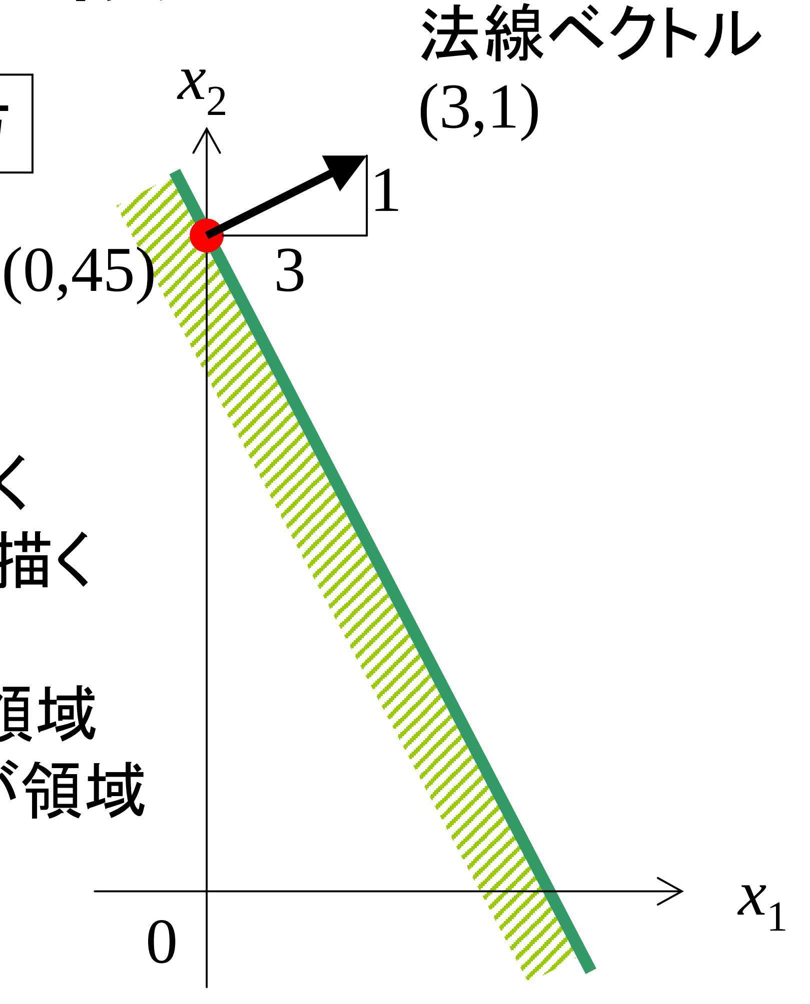
不等式と領域

$3x_1 + x_2 \leqq 45$ の示す領域の描き方

① $3x_1 + x_2 = 45$ の直線を描く

- 直線が通る一点を見つける
- その点から法線ベクトルを描く
- 法線ベクトルに直交し直線を描く

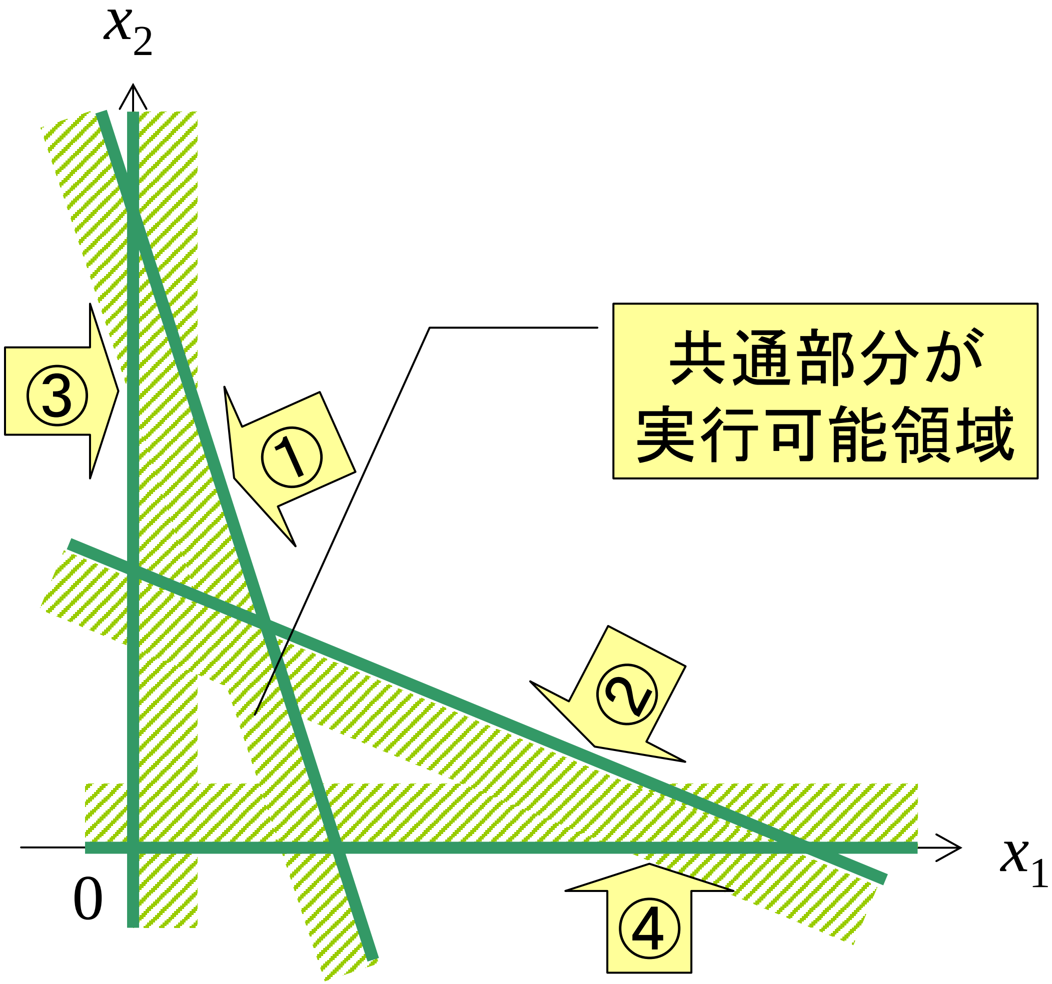
② ≧の時:法線ベクトルの向きが領域
　≦の時:法線ベクトルと逆向きが領域



実行可能領域の図示

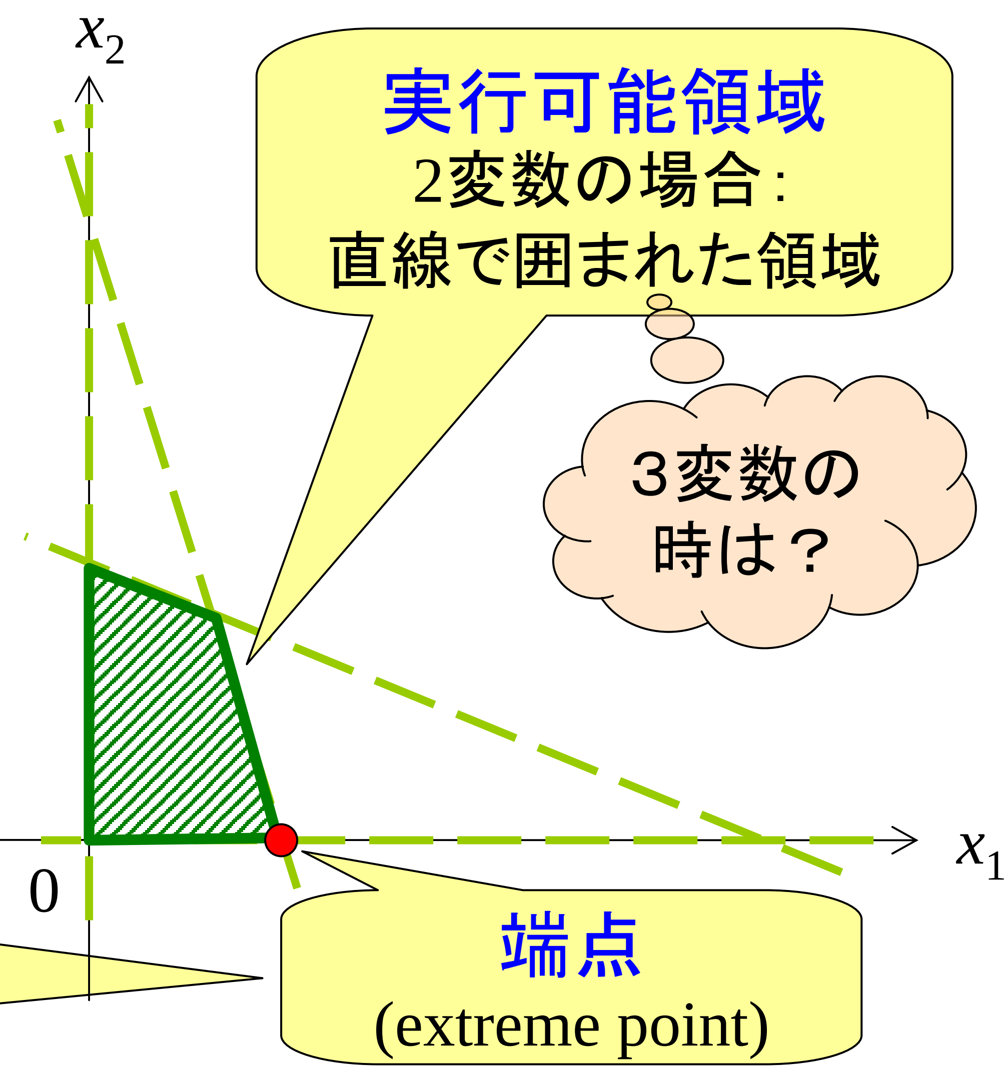
$$
\begin{cases}
3x_1 + x_2 \leqq 45 & ① \\
x_1 + 2x_2 \leqq 40 & ② \\
x_1 \geqq 0 & ③ \\
x_2 \geqq 0 & ④
\end{cases}
$$

実行可能領域はこれらの不等式を全て満たす点の集合



実行可能領域の特徴

$$
\begin{cases}
3x_1 + \ x_2 \leqq 45 & \text{①} \\
x_1 + 2x_2 \leqq 40 & \text{②} \\
x_1 \geqq 0 & \text{③} \\
x_2 \geqq 0 & \text{④}
\end{cases}
$$

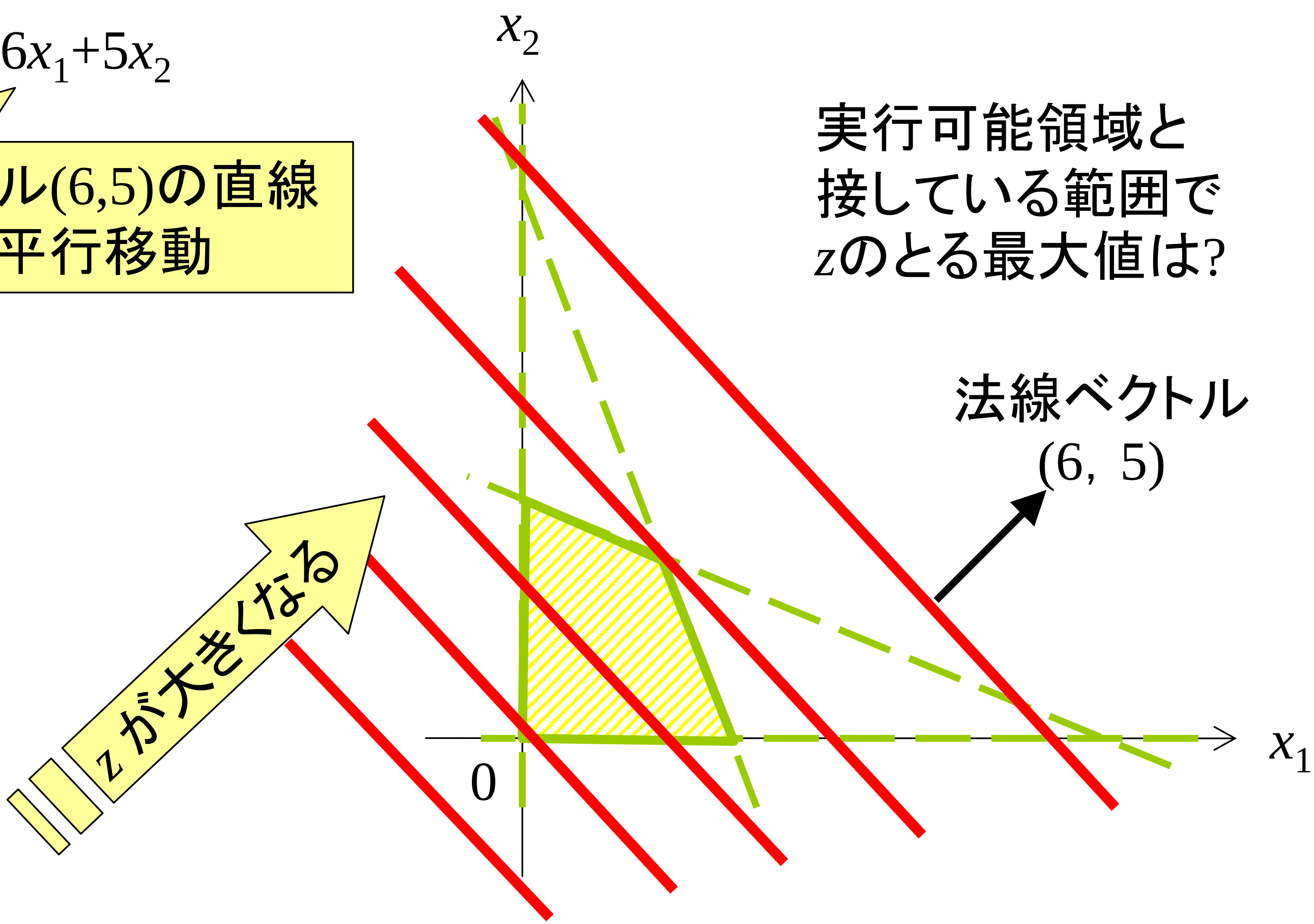


実行可能領域に
端点はたくさん存在

目的関数を動かす

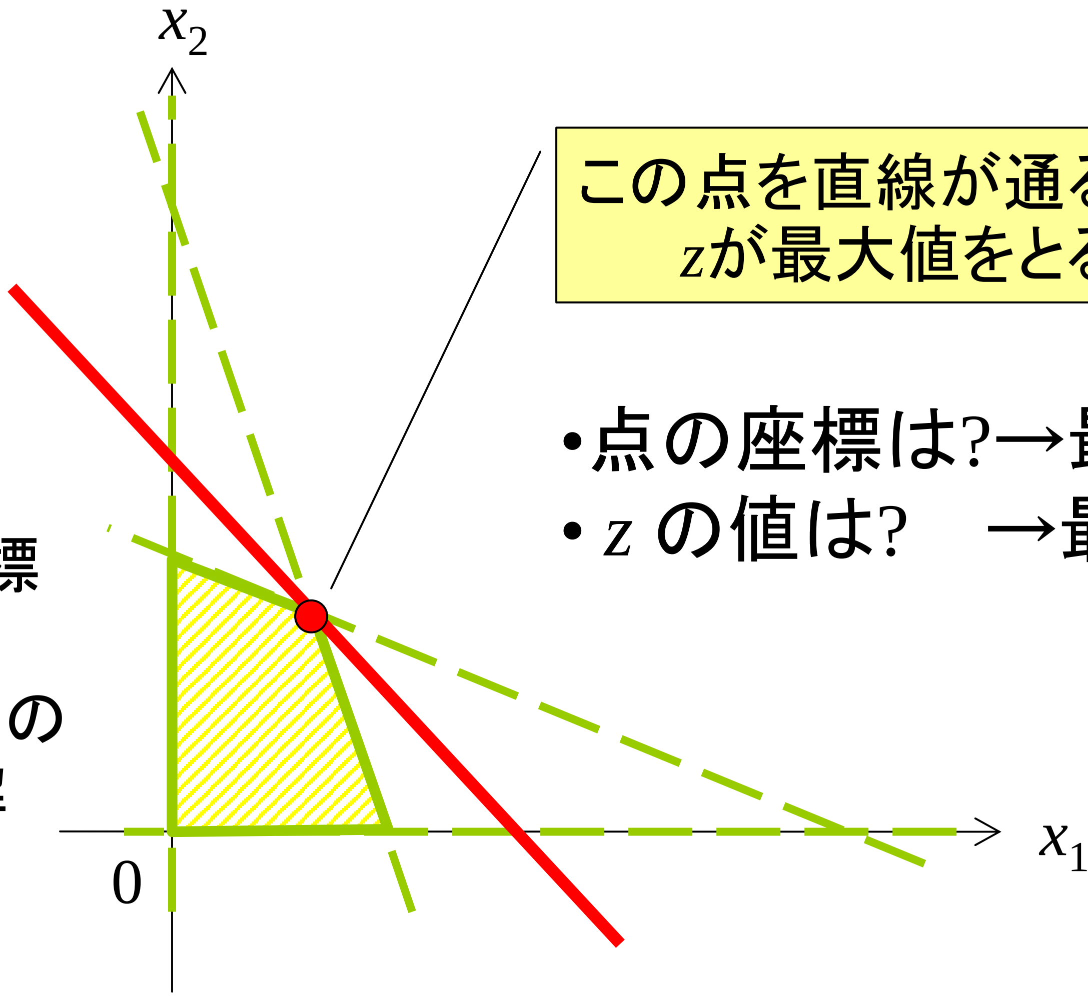
目的関数 $z=6x_1+5x_2$

- 法線ベクトル(6,5)の直線
- zが変化→平行移動



実行可能領域と接している範囲でzのとる最大値は?

最適値・最適解を見つける



- 点の座標は?→最適解
- z の値は?　→最適値

直線の交点の座標

⇕

関係する直線の式の
連立方程式の解

演習1　数式での表現

3種類の原液A,B,Cから,
2つの粉末製品P,Qを製造

	製品P 1(kg)	製品Q 1(kg)	使用可能量
原液A	15(kl)	11(kl)	1650(kl/日)
原液B	10(kl)	14(kl)	1400(kl/日)
原液C	9(kl)	20(kl)	1800(kl/日)
利益	5(万円)	4(万円)	

利益が最大になる製品P,Qの1日の生産量は？
問題を数理モデル化しなさい.

復習:連立方程式を解く

実行可能領域の端点を求める

||

連立方程式を解く

計算機向きの
うまい解き方があるんだよな.
高校までは習わないけど…

⇒(復習) ガウスの消去法

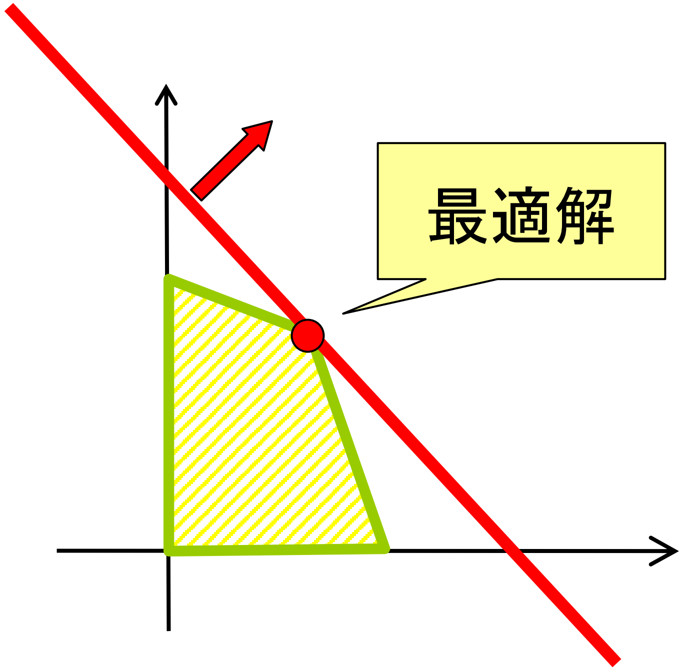
図を用いる解法の欠点

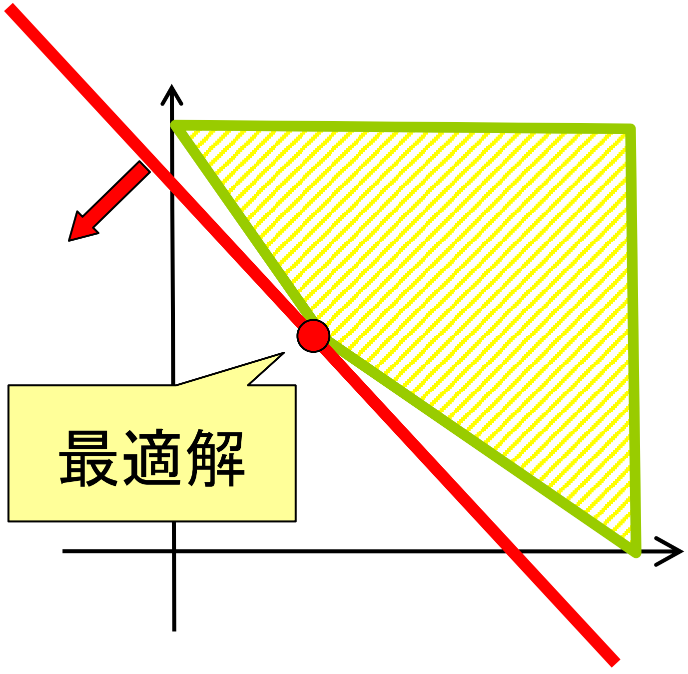
- 2～3変数までの問題にのみ適応可能
  - 現実的に解きたい問題：数十～数百万変数
- 計算機で実行しにくい

図を用いない解法を考えよう!!

最適解を発見するヒント

最適解は実行可能領域のどんな場所にある?





最適解の持つ性質

重要な性質：
最適解（の少なくとも一つ）は<u>**実行可能領域の端点**</u>に存在

↓

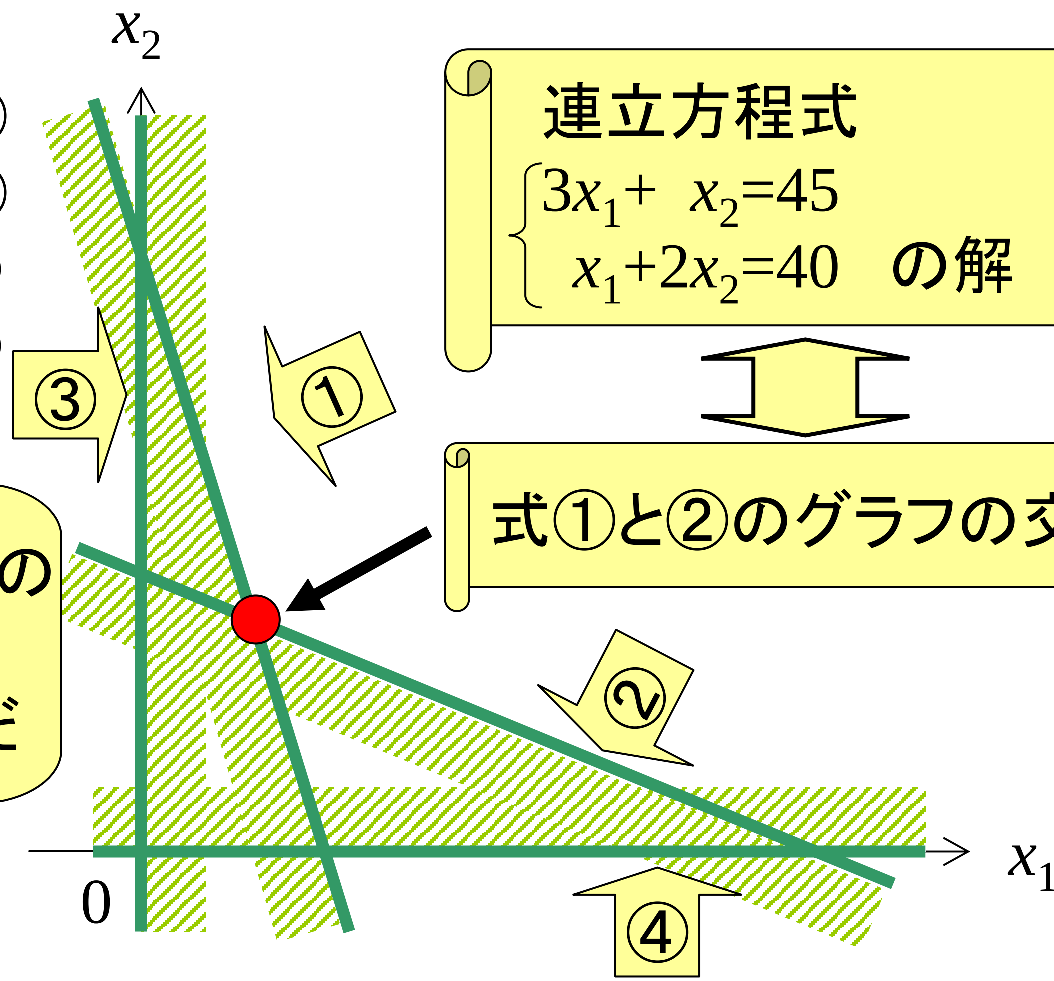
実行可能解の端点をすべて探索
↓
その中から最適解を見つける

総当たり法

実行可能領域の端点と式の関係

例題1より

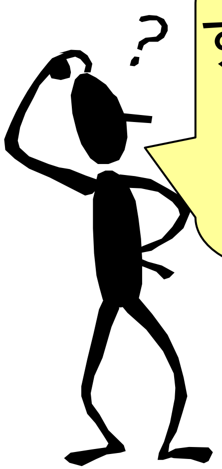
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leqq 45 & ① \\ x_1 + 2x_2 \leqq 40 & ② \\ x_1 \geqq 0 & ③ \\ x_2 \geqq 0 & ④ \end{cases}$$



連立方程式

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 45 \\ x_1 + 2x_2 = 40 \end{cases}$$ の解

式①と②のグラフの交点



すべての組合せの
連立方程式を
解けばいいんだ

解いてみよう!!

演習2　例題1の全交点を探そう

すべての組合せの連立方程式とその解

式の組合せ	x_1の値	x_2の値	実行可能?	目的関数値
①と②				
①と③				
①と④				
②と③				
②と④				
③と④				

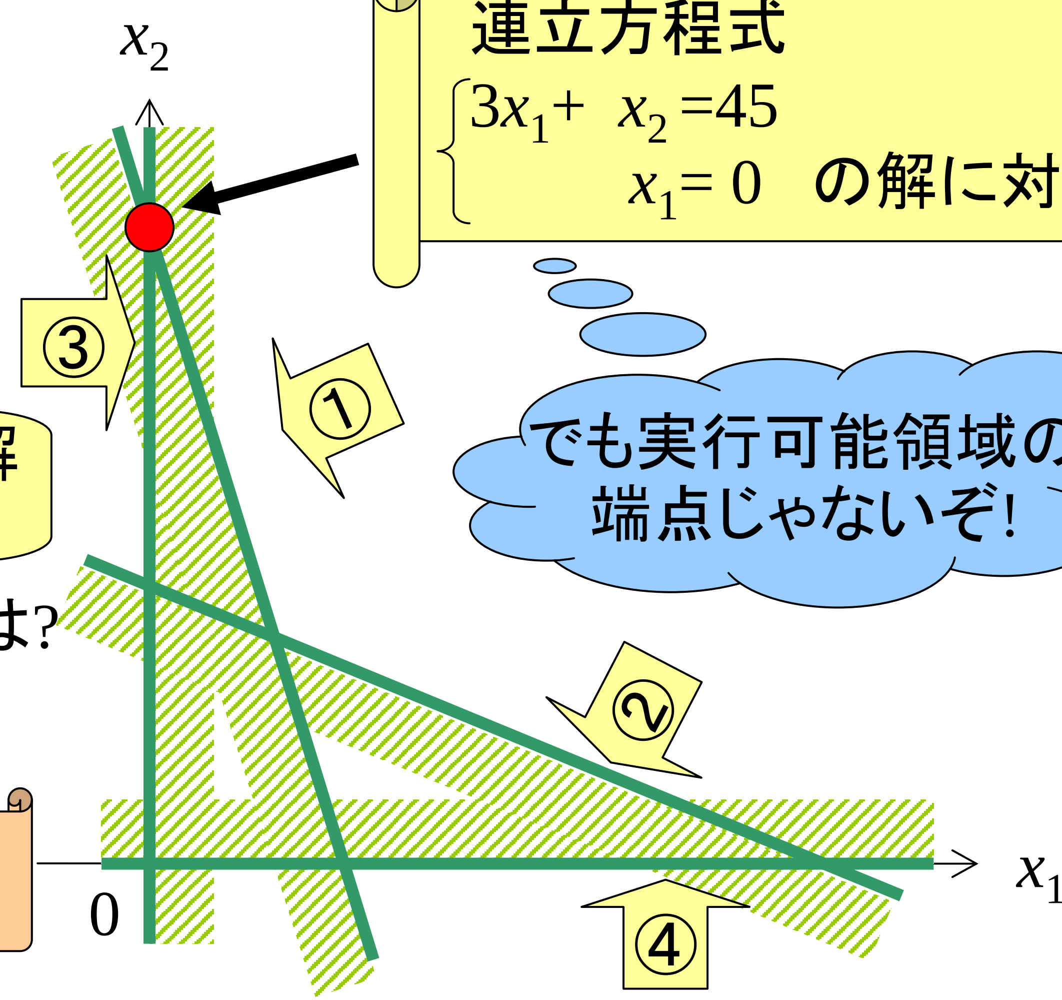
目的関数 : max. $z=6x_1+5x_2$

実行可能領域の端点？

$$\begin{cases} 3x_1 + \ x_2 \leqq 45 & ① \\ x_1 + 2x_2 \leqq 40 & ② \\ x_1 \geqq 0 & ③ \\ x_2 \geqq 0 & ④ \end{cases}$$

連立方程式

$\begin{cases} 3x_1 + \ x_2 = 45 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ の解に対応



でも実行可能領域の端点じゃないぞ!

連立方程式の解
≠端点

簡単な判定方法は?

標準形の利用

線形計画問題の標準形

$$\text{maximize}\quad z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$
$$\text{subject to}\quad a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m$$
$$x_1, \cdots, x_n \geq 0$$

標準形（standard form）

- 目的関数は最大化
- 条件式は（非負条件以外）等式で表現
- 条件式の右辺(b_i)は 非負
- すべての変数が非負

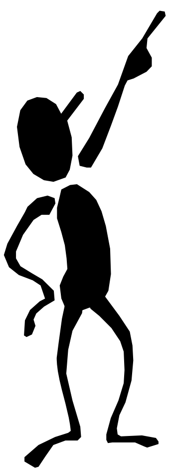
標準形の例

標準形で表現
された制約式

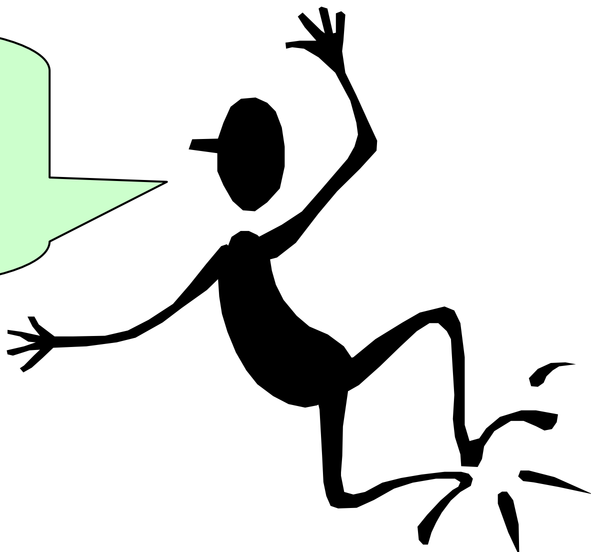
$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 + s_1 \qquad &= 45 \\
x_1 + 2x_2 \qquad + s_2 &= 40 \\
x_1, x_2, s_1, s_2 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

標準形ではない
表現の制約式

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 &\leqq 45 \\
x_1 + 2x_2 &\leqq 40 \\
x_1, x_2 &\geqq 0
\end{aligned}
$$



表現している内容は同じ!!
異なるのは，見た目だけ



すべてのLPは標準形で表現できる

対処法

① 目的関数が最小化の時
- 両辺に負を掛け，最大化問題に変形

② 条件式に不等式が含まれている時
- ≦の時：スラック変数の導入⇒等式化
- ≧の時：サープラス変数を導入⇒等式化

③ 右辺の定数bが負の数の時
- 両辺に(－1)を掛ける

④ 非負条件の無い変数（自由変数）が含まれる時
- 正と負の部分に分けて2変数に置き換える

個別に詳しく

① 目的関数の標準形への変換

最小化問題の時
⇒式を(－1)倍し，最大化問題に変形する

(例) minimize $z=4x_1-7x_2$

$$\Updownarrow$$

maximize $(-z)=-4x_1+7x_2$

参考

$z=\min\{3,-2\}$

$$\Updownarrow$$

$(-z)=\max\{-3,2\}$

$$\Updownarrow$$

$z=-2$

② 制約式の等号化

(左辺) ≦b の時

(左辺) ≧b の時

新たな非負変数を導入

(左辺)＋s＝b

s≧0

(左辺)－t＝b

t≧0

スラック変数
（slack:緩い）

サープラス変数
（surplus:過剰）

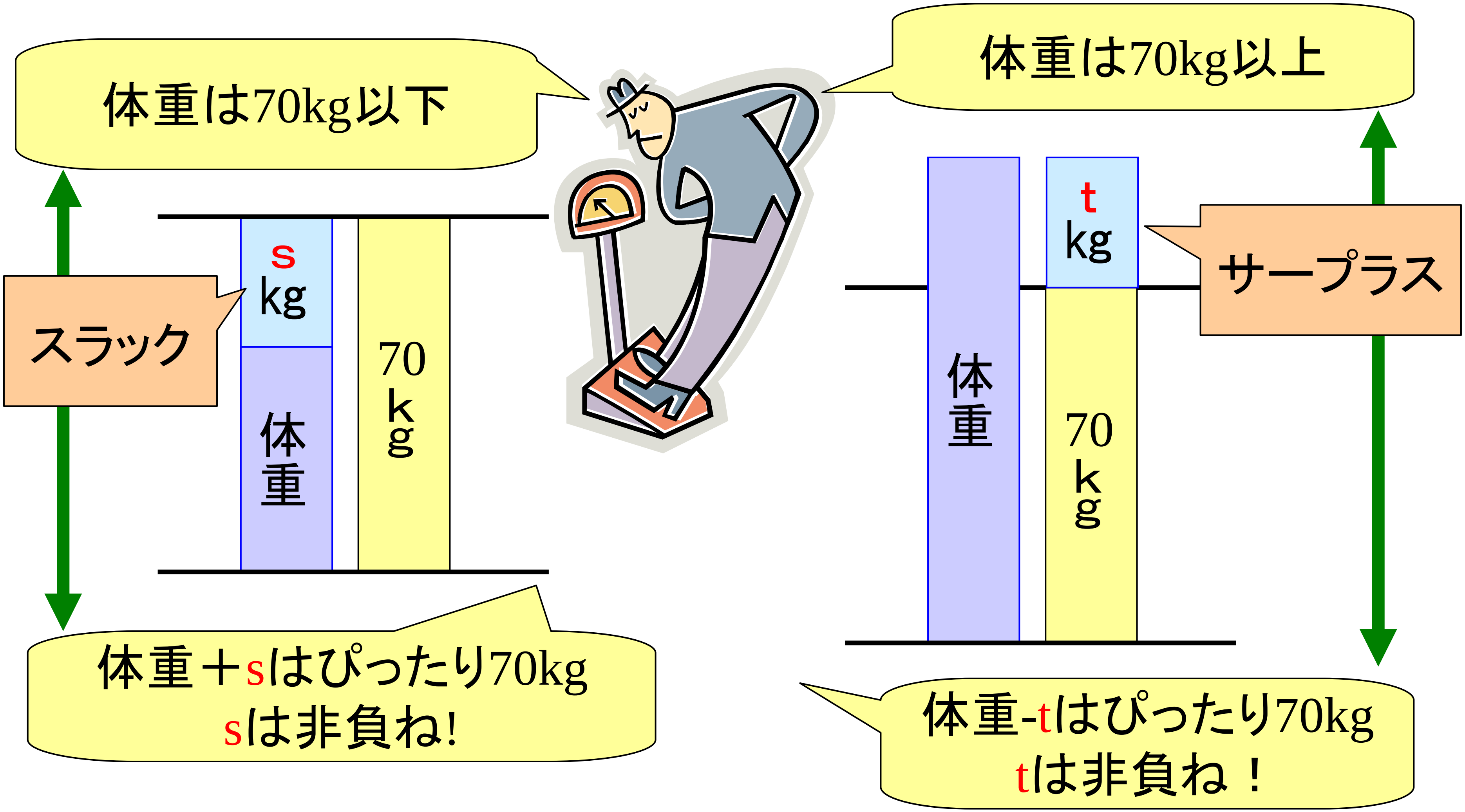
(例) $4x_1 - 7x_2 \leqq 12$

$4x_1 - 7x_2 + s = 12$

(例) $4x_1 - 7x_2 \geqq 12$

$4x_1 - 7x_2 - t = 12$

スラック変数・サープラス変数

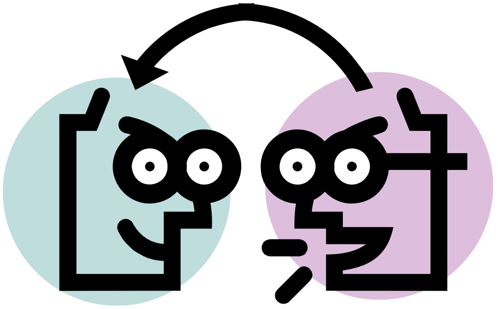


③ 右辺(定数)bを正の数にする

制約式右辺の定数部分(b)が負の数のとき
⇒両辺に(－1)を掛ける

(例) $4x_1 - 7x_2 \leqq -9$

$-4x_1 + 7x_2 \geqq 9$



※ 両辺にマイナスの数を掛けると不等号は逆転する

④ 自由変数の非負制約化

非負制約の無い変数（自由変数）x
⇒ふたつの非負変数 x^+, x^- の差に置き換える

自由変数 x ⇒ $x = x^+ - x^-$，$x^+ \geqq 0$， $x^- \geqq 0$

自由変数

(例) $4x_1 - 7\boldsymbol{x_2} \leqq 6$ ，$x_1 \geqq 0$

$4x_1 - 7(\boldsymbol{x_2^+} - \boldsymbol{x_2^-}) \leqq 6$，$x1 \geqq 0$，$\boldsymbol{x_2^+} \geqq 0$， $\boldsymbol{x_2^-} \geqq 0$

自由変数の変換での注意

(例) $4x_1 - 7\boldsymbol{x_2} \leqq 6$, $x_1 \geqq 0$

$\Updownarrow$

$4x_1 - 7(\boldsymbol{x_2^+} - \boldsymbol{x_2^-}) \leqq 6$, $x1 \geqq 0$, $\boldsymbol{x_2^+} \geqq 0$, $\boldsymbol{x_2^-} \geqq 0$

$\boldsymbol{x_2} = -4 \Leftrightarrow \boldsymbol{x_2^+} - \boldsymbol{x_2^-} = -4 \Leftrightarrow \boldsymbol{x_2^+} = 0,\ \boldsymbol{x_2^-} = 4$

$\boldsymbol{x_2^+} = 1,\ \boldsymbol{x_2^-} = 5$

$\boldsymbol{x_2^+} = 2,\ \boldsymbol{x_2^-} = 6$

$\vdots$

変換後の標準形には
同値の解が多数存在

元の問題の解と
しては影響ない

標準形への変形例(1)

一般形

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 20x_1 + 30x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \le 800 \\ & -3x_1 - 4x_2 \ge -1800 \\ & 3x_1 + x_2 \le 1500 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

正準形

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 20x_1 + 30x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \le 800 \\ & 3x_1 + 4x_2 \le 1800 \\ & 3x_1 + x_2 \le 1500 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 20x_1 + 30x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + s_1 = 800 \\ & 3x_1 + 4x_2 + s_2 = 1800 \\ & 3x_1 + x_2 + s_3 = 1500 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \ge 0 \end{aligned}$$

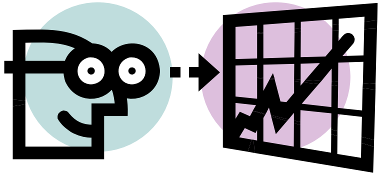
スラック変数の導入

標準形への変形例(2)

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = 3x_1 - 5x_2 \\
\text{subject to} \quad & 9x_1 - 4x_2 \geq -5 \\
& -7x_1 + 5x_2 = 8 \\
& 6x_1 - 2x_2 \geq 1 \\
& x_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

標準形

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & (-z) = -3x_1 + 5(x_2^+ - x_2^-) \\
\text{subject to} \quad & -9x_1 + 4(x_2^+ - x_2^-) + s_1 = 5 \\
& -7x_1 + 5(x_2^+ - x_2^-) = 8 \\
& 6x_1 - 2(x_2^+ - x_2^-) - s_3 = 1 \\
& x_1, x_2^+, x_2^-, s_1, s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$



演習3　標準形に変形せよ

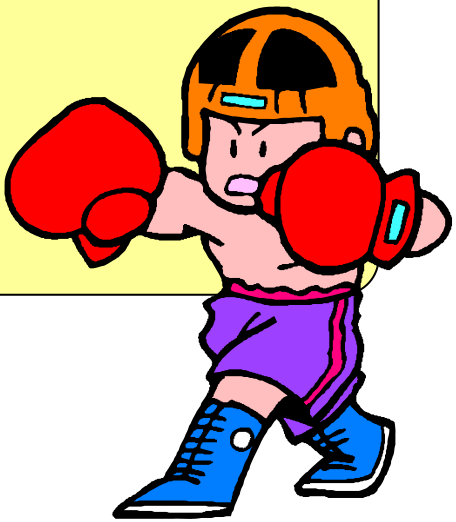
$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = 2x_1 - x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \leq 120 \\
& x_1 + x_2 \geq 60 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

※ x_1は自由変数

標準形の利用
実行可能領域の端点を見つける

その前にもう少し知識をためよう

- 連立方程式の<u>変数の数</u>と<u>式の数</u>と<u>解</u>の関係
- 独立変数
- 基本解
- 基底変数と非基底変数



準備体操

変数の数:5個
方程式の数:3個

以下の連立方程式の解は？

$$
\left\{
\begin{array}{l}
15x_1 + 11x_2 + s_1 = 1650 \\
10x_1 + 14x_2 + s_2 = 1400 \\
9x_1 + 20x_2 + s_3 = 1800
\end{array}
\right.
$$

いくつの変数を無視すれば
解が得られる?

連立方程式と解の関係

連立方程式（m変数, n本の方程式）

- m=nの時：
  - 解が一意に定まる or 不定 or 不能（解なし）
- m<nの時：
  - 基本的にm=nの時と同じ.
- m>nの時：
  - m-n個の変数の解は一意に定まらない（**独立変数**）
    ⇔ m-n個の独立変数の値を定めればm=nの時と同じ

例えば...

以下の連立方程式の解は？

$$
\begin{cases}
15x_1 + 11x_2 + s_1 = 1650 \\
10x_1 + 14x_2 + s_2 = 1400 \\
9x_1 + 20x_2 + s_3 = 1800
\end{cases}
$$

変数の数:5個
方程式の数:3個

(5-3=)2個の独立変数に値を与えれば解を持つ

例　x_1, x_2を独立変数に選択，値に0を与えてみる

→連立方程式の解は?

例題3

$$\begin{cases} 15x_1 + 11x_2 + s_1 & = 1650 \\ 10x_1 + 14x_2 \qquad + s_2 & = 1400 \\ 9x_1 + 20x_2 \qquad\qquad + s_3 & = 1800 \end{cases}$$

(1) すべての独立変数を選ぶパターンを書き出せ。

(2) （独立変数に0を与えた場合の）基本解を求めよ。

例題3 解答例

$$
\begin{cases}
15x_1 + 11x_2 + s_1 = 1650 \\
10x_1 + 14x_2 + s_2 = 1400 \\
9x_1 + 20x_2 + s_3 = 1800
\end{cases}
$$

x1	x2	s1	s2	s3
0	0	1650	1400	1800
0	150	0	−700	−1200
0	100	550	0	−200
0	90	660	140	0
110	0	0	300	810
140	0	−450	0	540
200	0	−1350	−600	0
77	45	0	0	207
4400/67	4050/67	0	−6900/67	0
1400/37	2700/37	10350/37	0	0

非負制約があるとき

実行可能解

実行可能解でない

標準形では
全変数に非負制約

実行可能かどうかの
判定に利用可能

黄色のセル(値=0)が選ばれた独立変数.

実行可能解かどうかの判定方法

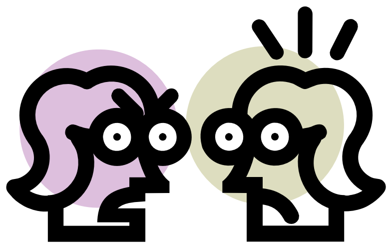
① 標準形に変形する

② 連立方程式の解が定まるように独立変数を適当に決めて，それらの値を0にする.
→連立方程式の解が得られる.（**基本解**)

※実際に解を求める変数＝**基底変数**

⇔値が0に定められた変数＝**非基底変数**

③ 基本解が非負なら，実行可能領域の端点



例題3（続）総当り法

$\max.\ z=5x_1+4x_2$

$\text{s.t.}\quad 15x_1+11x_2 \leqq 1650$

$10x_1+14x_2 \leqq 1400$

$9x_1+20x_2 \leqq 1800$

$x_1,\ x_2 \geqq 0$

制約条件式は例題3と同じ

独立変数の選び方
全パターンの基本解を求め，
最適解を見つけよう.

例題3（続）総当り法

端点の所だけ計算

x1	x2	s1	s2	s3	端点？	目的関数値
0	0	1650	1400	1800	○	0
0	150	0	−700	−1200	×	
0	100	550	0	−200	×	
0	90	660	140	0	○	360
110	0	0	300	810	○	550
140	0	−450	0	540	×	
200	0	−1350	−600	0	×	
77	45	0	0	207	○	565
4400/67	4050/67	0	−6900/67	0	×	
1400/37	2700/37	10350/37	0	0	○	17800/37

最大値

黄色のセル(値=0)が選ばれた独立変数.

図を用いない素朴な解法
総当たり法

手順1 標準形に変形する

手順2 すべての基本解を導く

手順3 端点かを判定

手順4 端点なら目的関数値を計算

手順5 目的関数値最大の基本解が最適解

練習 生産計画

- 2つの液体製品P,Qは機械A,Bを用いて加工される
- 利益が最大になる1週間の製品P,Qの加工量は？

	液体P 1ml	液体Q 1ml	使用可能量
機械A	3(h)	1(h)	45(h/週)
機械B	1(h)	2(h)	40(h/週)
利益	6(万円)	5(万円)	

⇨ 総当り法で最適解と最適値を求めてみよう.

練習 解答例

定式化

x_1 : 液体Pの生産量
x_2 : 液体Qの生産量

$$\begin{aligned} \text{max.}\ & z=6x_1+5x_2 \\ \text{s.t.}\ & 3x_1+x_2 \leqq 45 \\ & x_1+2x_2 \leqq 40 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

標準形に変形

$$\begin{aligned} \text{max.}\ & z=6x_1+5x_2 \\ \text{s.t.}\ & 3x_1+x_2+s_1 = 45 \\ & x_1+2x_2+s_2 = 40 \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

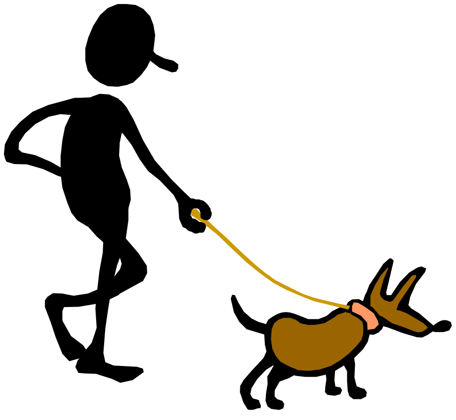
x_1	x_2	s_1	s_2	端点?	目的関数値
10	15	0	0	◎	135
0	45	0	-50	×	
15	0	0	25	◎	90
0	20	25	0	◎	100
40	0	-75	0	×	
0	0	45	40	◎	0

最適解 $(x_1,x_2)=(10,15)$, 最適値 135

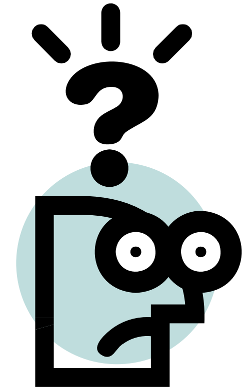
演習4 総当り法

総当り法で最適解と最適値を求めてみよう.

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\ & z=20x_1+30x_2 \\
\text{s.t.}\ & \quad x_1+2x_2 \leqq 800 \\
& 3x_1+4x_2 \leqq 1800 \\
& 3x_1+\ \ x_2 \leqq 1500 \\
& \quad x_1,\ x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$



総当たり法の欠点



- 標準形がn個の変数とm本の等式条件
  ⇒基本解はどのくらい存在する? 組合せの数

  膨大な数の連立方程式を解くことになる

  ⇒サイズによっては事実上**実行不可能**
- 端点で無い基本解も計算(←無駄)

より無駄の無い解法 <u>シンプレックス法</u>

演習5 総当たり法で解いてみよう

(1)

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & z = -3x_1 - 4x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 \le 6 \\
& x_1 + x_2 \le 4 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & z = x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + 4x_2 - 2x_3 \ge 120 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 60 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$