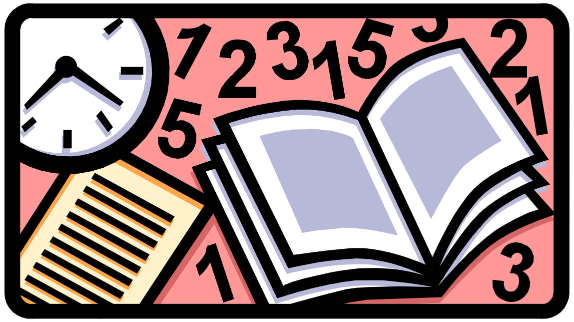
初期の基底解の組合せを簡単に決められない時の対処法



2 段階シンプレックス法

一般の線形計画問題をシンプレックス法が適用できるように標準形に変形しても,そのままでは初期基底解を簡単に求められない時がある.

次の例題を考えてみよう.

例題

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & z = -6x_1 + 6x_2 \\
\text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\
& -5x_1 + 9x_2 = 15 \\
& -6x_1 + 3x_2 \ge 3 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

標準形に変形

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & z \\
\text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 + s_1 = 6 \\
& -5x_1 + 9x_2 = 15 \\
& -6x_1 + 3x_2 - s_3 = 3 \\
& z + 6x_1 - 6x_2 = 0 \\
& x_1, x_2, s_1, s_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

シンプレックス表を作ってみる.

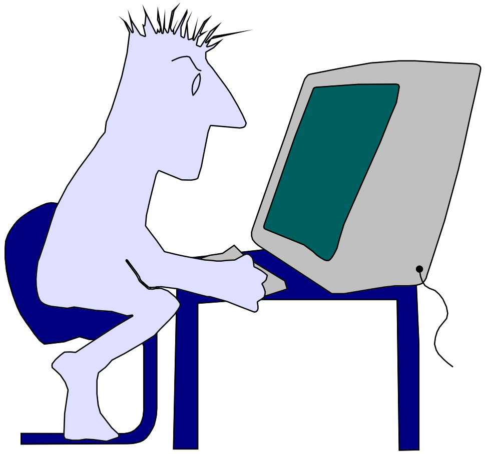
初期の基底変数を決めてみよう.

基底変数	z	x1	x2	s1	s3	定数項	増加限界
	0	2	3	1	0	6	
	0	−5	9	0	0	15	
	0	−6	3	0	−1	3	
z	1	6	−6	0	0	0	

初期の基底変数を簡単に見つけられない時は 2 **段階シンプレックス法**を利用する.

- 1 段階:初期の基底解を見つけるためにある線形計画問題を解く.
- 2 段階:1 段階で見つけた初期の基底解を利用して, 通常のシンプレックス法を適用する.

2 段階シンプレックス法の概要



第 1 段階

ステップ 1：以下の要領で線形計画問題を作る.

- 与えられた線形計画問題をシンプレックス法が適用できるように標準形に変形する.
- 制約条件においてプラス係数のスラック変数を持たない式に，非負の人工変数(artificial variable)を導入する.
- 目的関数は人工変数のみからなり，その係数は－1とする.
- 目的関数を最大化する.

（初期の基底変数は簡単に求まる）

ステップ 2：制約式を目的関数に足す（引く）ことにより，目的関数から初期基底変数をなくす.

ステップ 3：ステップ 2 で作成した線形計画問題をシンプレックス法で解く.

最適値が0ならば第 2 段階に進む. それ以外の時は，元々の問題に実行可能解は存在しない.つまり，解なし.

第 2 段階

ステップ 1：以下の要領で線形計画問題をつくる.

- 第 1 段階で最終的に得られた表から人工変数を取り除いた制約式を作る.
- 目的関数は元の問題（最大化問題）の目的関数.

（初期の基底変数は簡単に求まる）

ステップ 2：制約式を目的関数に足す（引く）ことにより，目的関数から初期基底変数をなくす.

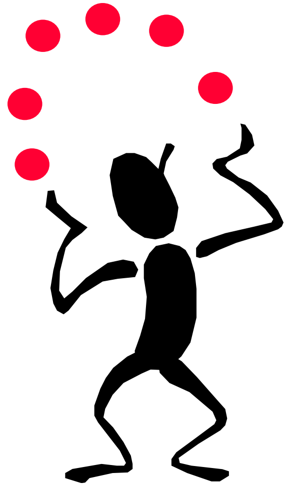
ステップ 3：ステップ 2 で作成した線形計画問題をシンプレックス法で解く.求まった解は元の問題の解.

（終了）

例題を使って，その動きを見てみよう.

例題

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & z = -6x_1 + 6x_2 \\
\text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\
 & -5x_1 + 9x_2 = 15 \\
 & -6x_1 + 3x_2 \ge 3 \\
 & x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$



第 1 段階　ステップ 1　初期基底解を見つけるための線形計画問題を作る

（制約条件式のみ考える）

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{maximize} & & & \\
\text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 + s_1 & & = 6 \\
 & -5x_1 + 9x_2 & & = 15 \\
 & -6x_1 + 3x_2 & -s_3 & = 3 \\
 & & & x_1, x_2, s_1, s_3 \ge 0
\end{array}
$$

制約条件式の第 2･3 行目にはプラス係数のスラック変数が存在しない.

↓

人工変数 t_2, t_3 を導入する.

$$
\begin{array}{lrccl}
\text{maximize} & & & & \\
\text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 + s_1 & & & = 6 \\
 & -5x_1 + 9x_2 & & +t_2 & = 15 \\
 & -6x_1 + 3x_2 & -s_3 & +t_3 & = 3 \\
 & & & & x_1, x_2, s_1, s_3, t_2, t_3 \ge 0
\end{array}
$$

目的関数を定める.

初期基底変数は s_1, t_2, t_3 となる.

$$
\begin{array}{lrccl}
\text{maximize} & z = & & -t_2 - t_3 & \\
\text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 + s_1 & & & = 6 \\
 & -5x_1 + 9x_2 & & +t_2 & = 15 \\
 & -6x_1 + 3x_2 & -s_3 & +t_3 & = 3 \\
 & & & & x_1, x_2, s_1, s_3, t_2, t_3 \ge 0
\end{array}
$$

シンプレックス法で利用できる形に変形する．

$$
\begin{array}{llr}
\text{maximize} & z & \\
\text{subject to} & 2x_1+3x_2+s_1 & =6 \\
 & -5x_1+9x_2+t_2 & =15 \\
 & -6x_1+3x_2-s_3+t_3 & =3 \\
 & z+t_2+t_3 & =0 \\
 & x_1,x_2,s_1,s_3,t_2,t_3\geq 0 &
\end{array}
$$

ステップ２ 目的関数から初期基底変数になる変数をなくす．

（z行）ー（制約条件式２行目）ー（制約条件式３行目）より→

（どうしてこの操作が必要なのだろう？？）

$$
\begin{array}{llr}
\text{maximize} & z & \\
\text{subject to} & 2x_1+3x_2+s_1 & =6 \\
 & -5x_1+9x_2+t_2 & =15 \\
 & -6x_1+3x_2-s_3+t_3 & =3 \\
 & z+11x_1-12x_2+s_3 & =-18 \\
 & x_1,x_2,s_1,s_3,t_2,t_3\geq 0 &
\end{array}
$$

ステップ３ シンプレックス法を用いて上記の線形計画問題を解く．

初期のシンプレックス表

基底変数	z	x1	x2	s1	s3	t2	t3	定数項	増加限界
s1	0	2	3	1	0	0	0	6	
t2	0	−5	9	0	0	1	0	15	
t3	0	−6	3	0	−1	0	1	3	
z	1	11	−12	0	1	0	0	−18	

（途中省略）最終的なシンプレックス表

基底変数	z	x1	x2	s1	s3	t2	t3	定数項	増加限界
x1	0	1	0	3/11	0	−1/11	0	3/11	
s3	0	0	0	−13/11	1	8/11	−1	9/11	
x2	0	0	1	5/33	0	2/33	0	20/11	
z	1	0	0	0	0	1	1	0	

最適値が0なので，元の問題には実行可能解が存在する

（どうしてだろう?）第２段階へ

第 2 段階

ステップ 1　元の問題と本質的に同等の線形計画問題を作る

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & z = -6x_1 + 6x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + \frac{3}{11}s_1 = \frac{3}{11} \\
& -\frac{13}{11}s_1 + s_3 = \frac{9}{11} \\
& + x_2 + \frac{5}{33}s_1 = \frac{20}{11} \\
& x_1, x_2, s_1, s_3 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & z \\
\text{subject to} & x_1 + \frac{3}{11}s_1 = \frac{3}{11} \\
& -\frac{13}{11}s_1 + s_3 = \frac{9}{11} \\
& + x_2 + \frac{5}{33}s_1 = \frac{20}{11} \\
& z + 6x_1 - 6x_2 = 0 \\
& x_1, x_2, s_1, s_3 \geq 0
\end{array}
$$

初期の基底変数は x_1, x_2, s_3, z になる.

ステップ 2　目的関数から初期基底変数を除く

(z行)－6×(制約条件式 1 行目)＋6×(制約条件式 3 行目)→

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & z \\
\text{subject to} & x_1 + \frac{3}{11}s_1 = \frac{3}{11} \\
& -\frac{13}{11}s_1 + s_3 = \frac{9}{11} \\
& + x_2 + \frac{5}{33}s_1 = \frac{20}{11} \\
& z - \frac{8}{11}s_1 = \frac{102}{11} \\
& x_1, x_2, s_1, s_3 \geq 0
\end{array}
$$

(どうしてこの操作が必要なのだろう??)

ステップ 3 シンプレックス法を適用する

初期のシンプレックス表

基底変数	z	x1	x2	s1	s3	定数項	増加限界
x1	0	1	0	3/11	0	3/11	
s3	0	0	0	−13/11	1	9/11	
x2	0	0	1	5/33	0	20/11	
z	1	0	0	−8/11	0	102/11	

（途中省略）

最終的に得られるシンプレックス表

基底変数	z	x1	x2	s1	s3	定数項	増加限界
s1	0	11/3	0	1	0	1	
s3	0	13/3	0	0	1	2	
x2	0	−5/9	1	0	0	5/3	
z	1	8/3	0	0	0	10	

よって，例題の最適解は x_1=0, x_2=5/3 で，最適値は 10 となる.

演習問題

（１） maximize $z = x_1 + 3x_2 + 5x_3$

subject to
$$-x_1 + x_2 + x_3 \le 2$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 8$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

（２） minimize $z = 12x_1 + 6x_2 + 10x_3$

subject to
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 10$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 \ge 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

答え (1) x_1=8, x_2=1, x_3=9

(2) x_1=5, x_2=5, x_3=0

作成： 根本 俊男 文教大学情報学部経営情報学科 e-mail: nemoto@shonan.bunkyo.ac.jp, URL: http://www.bunkyo.ac.jp/~nemoto/
初版：1997/11/13 改訂：1998/11/11 第 3 版：1999/11/7 第 4 版：2001/6/1 第 4.1 版 2002/6/7 4.2 版 2008/7/22