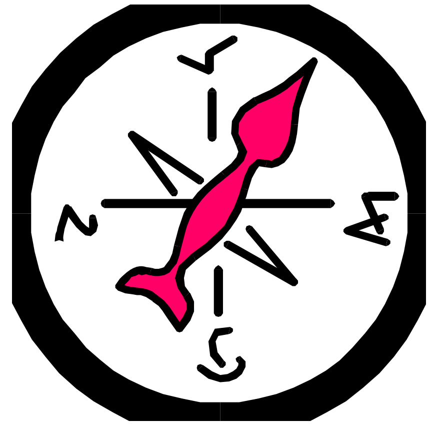
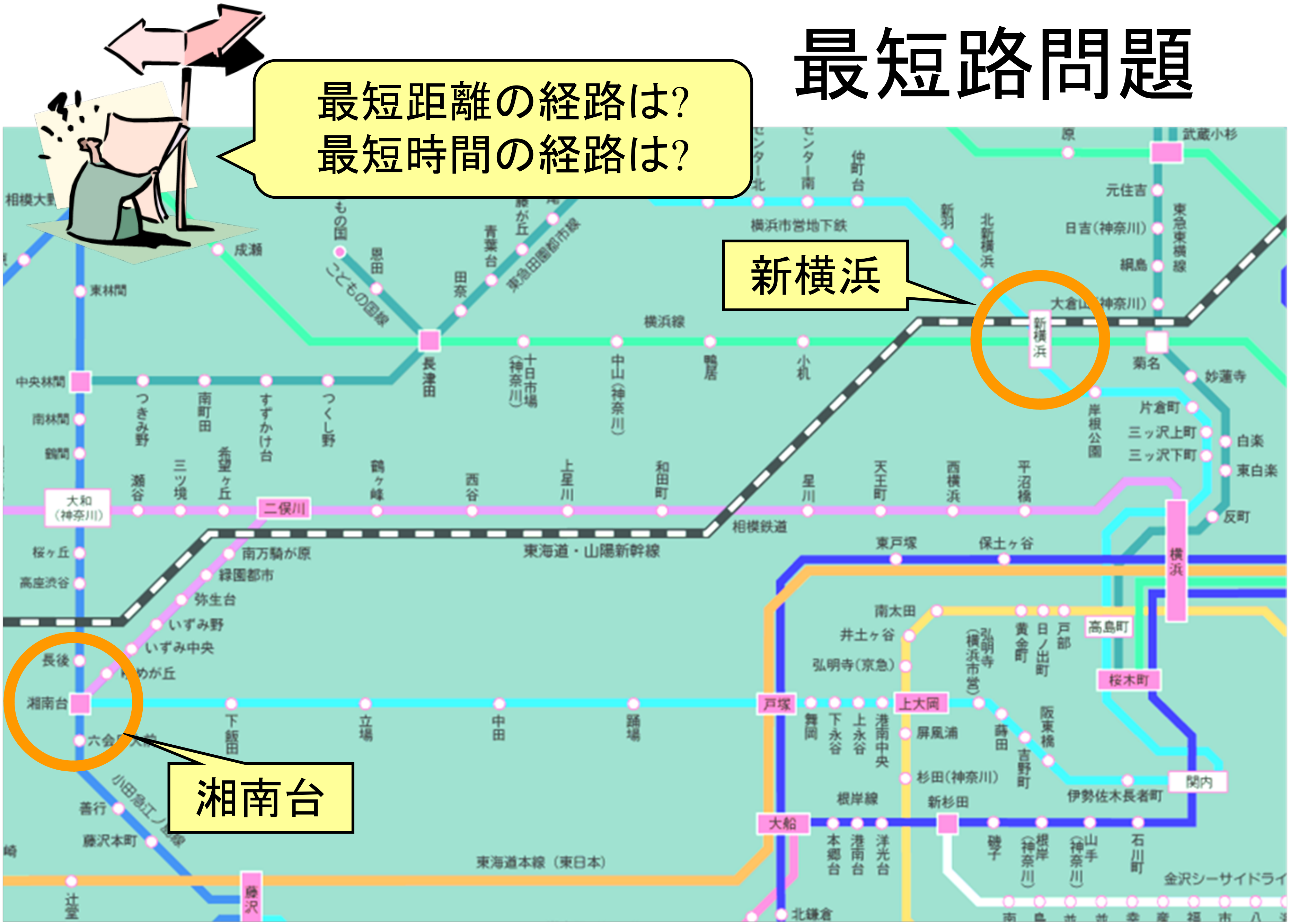


双対定理の解法への利用

最短路問題を例として

最短路問題

最短距離の経路は?
最短時間の経路は?

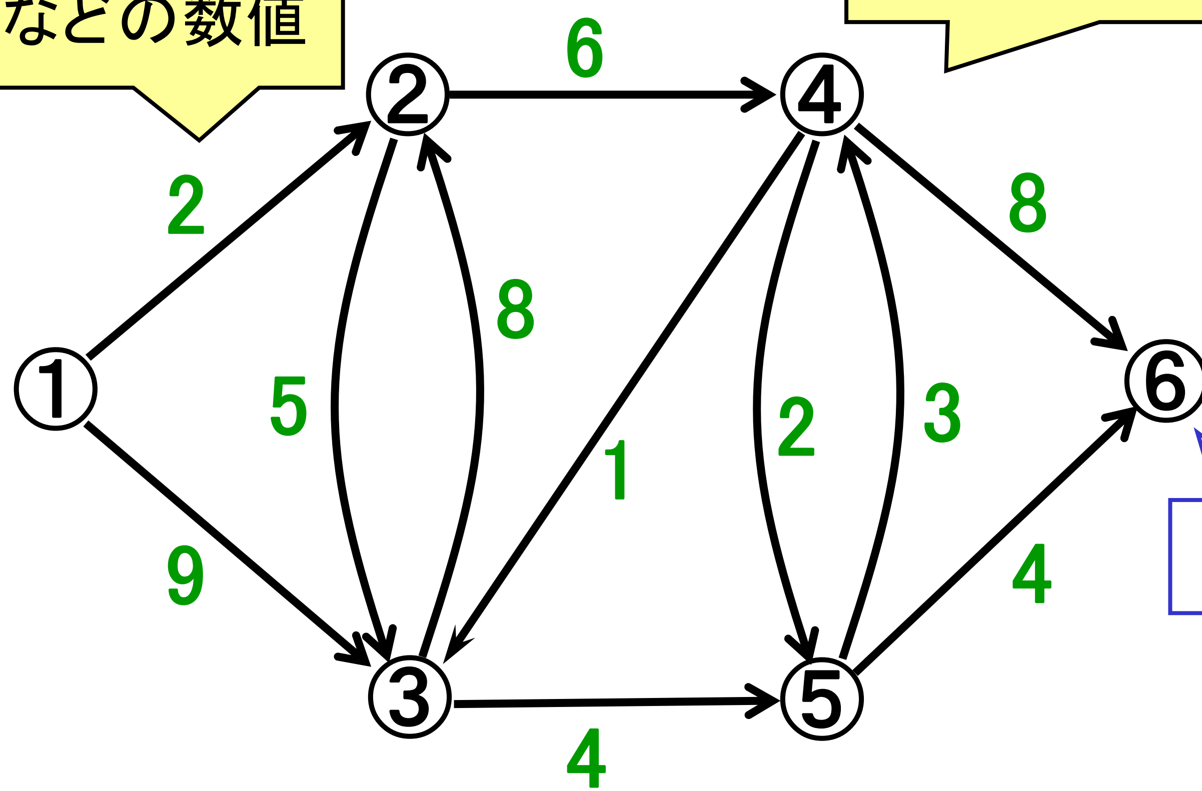


最短路問題のネットワーク表現

各枝に距離or
時間などの数値

問題の舞台を
（有向）グラフで表現

(例)



スタート

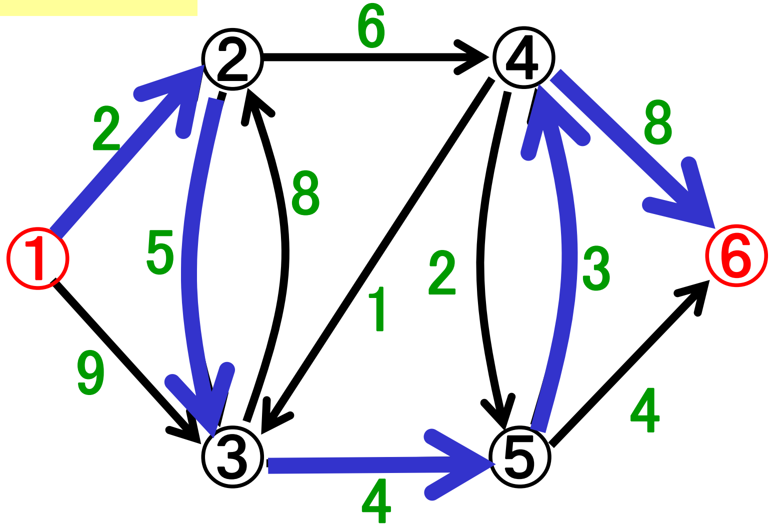
ゴール

スタートとゴールの点を指定

パス(経路)とその長さ

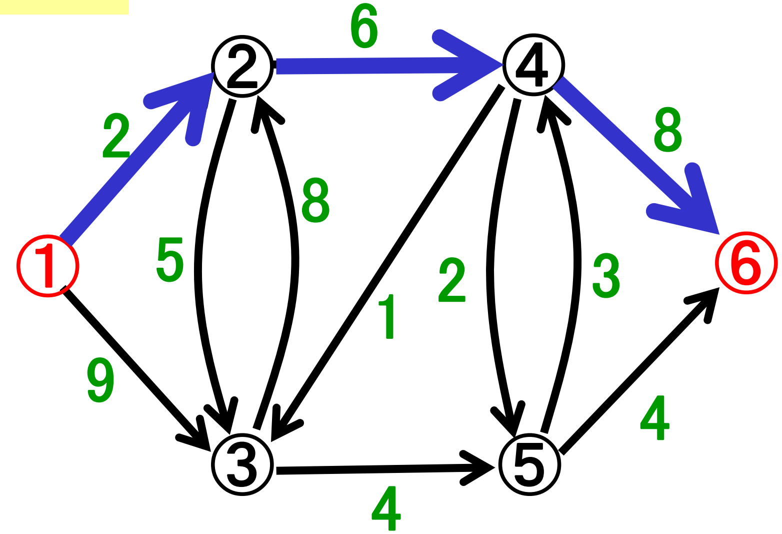
パス(経路):ある点とある点を結ぶ枝の列(向きに注意!)

パスA



パスの長さ:2+5+4+3+8=**22**

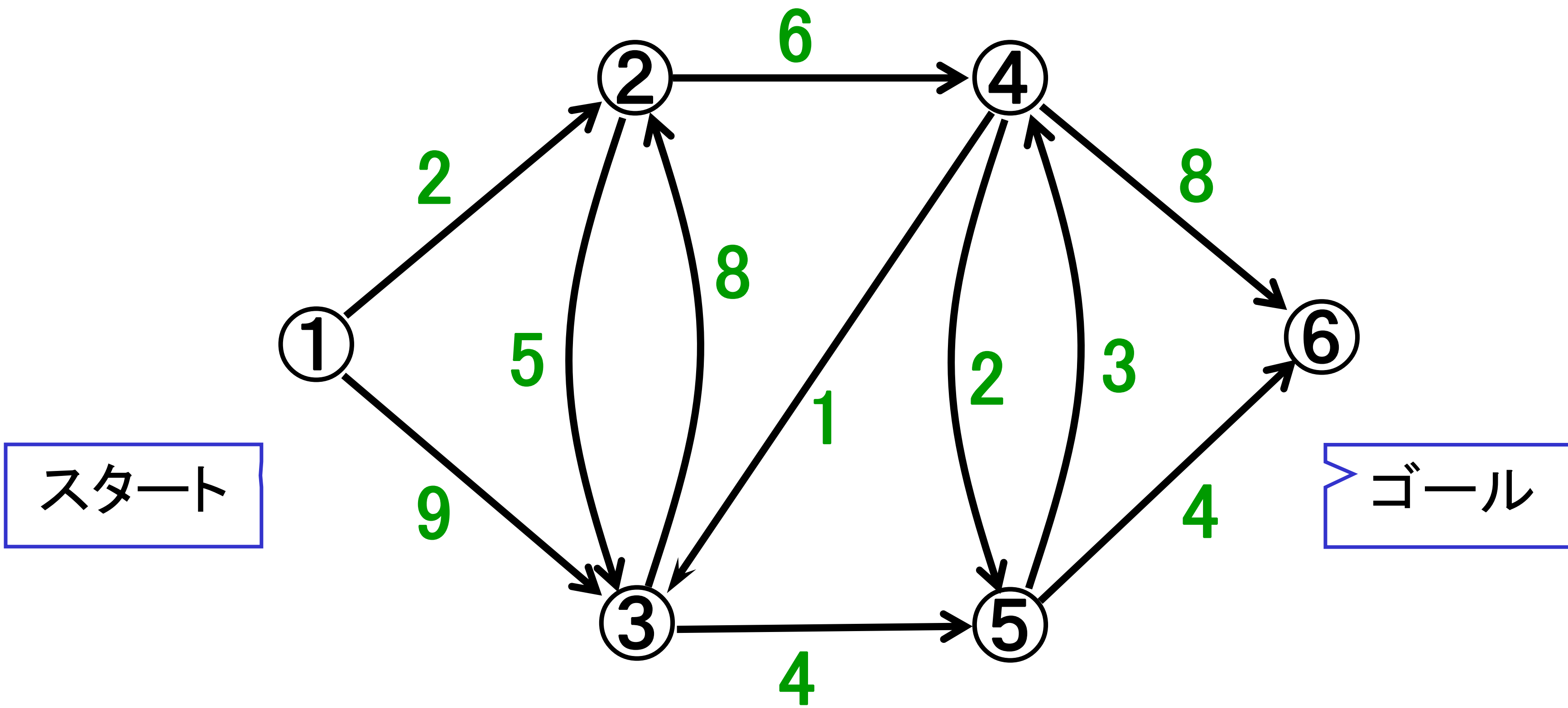
パスB



2+6+8=**16**

- スタートとゴールを結ぶパスは多数
- その中で長さが最短のパス＝最短路
- 最短路を見つける問題:最短路問題

例題1 最短路を求めよ



最短路問題を定式化してみよう

例題1(続) 定式化の準備

決めたいこと　どの枝を通るか

↓

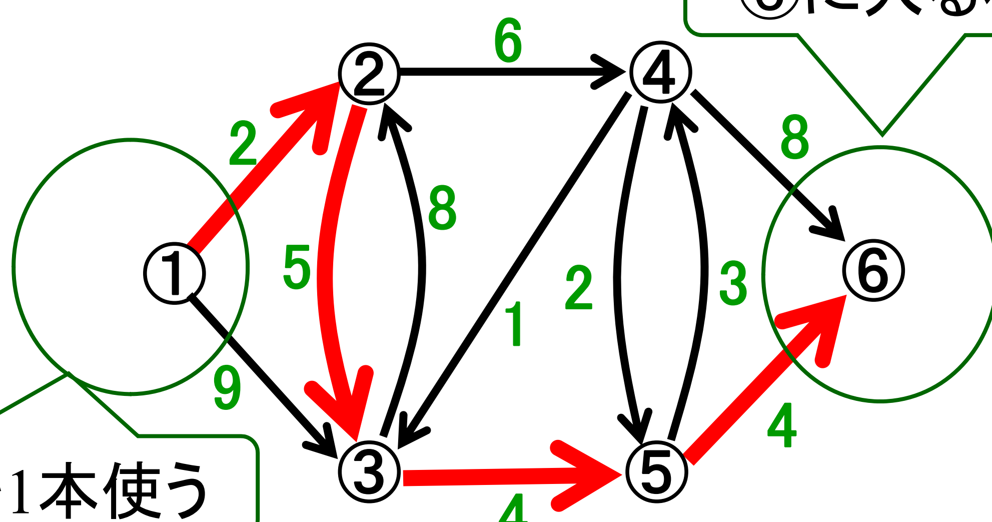
変数　$x_{ij} \in \{0,1\}$:枝(i,j)を通る$x_{ij}=1$; 通らない$x_{ij}=0$

経路の特徴　①→⑥を結ぶ枝の列

↓

制約

⑥に入る枝を1本使う



①から出る枝を1本使う

中間点 : 入枝が1本使用⇒出枝を1本使用

例題1(続) 最短路問題の定式化

$$\min.\ 2x_{12}+9x_{13}+5x_{23}+6x_{24}+8x_{32}+4x_{35}+x_{43}+2x_{45}+8x_{46}+3x_{54}+4x_{56}$$

s.t.

$$x_{12}+x_{13}=1$$

①から出る枝を1本使う

$$x_{12}+x_{32}=x_{23}+x_{24}$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{43}=x_{32}+x_{35}$$

$$x_{24}+x_{54}=x_{43}+x_{45}+x_{46}$$

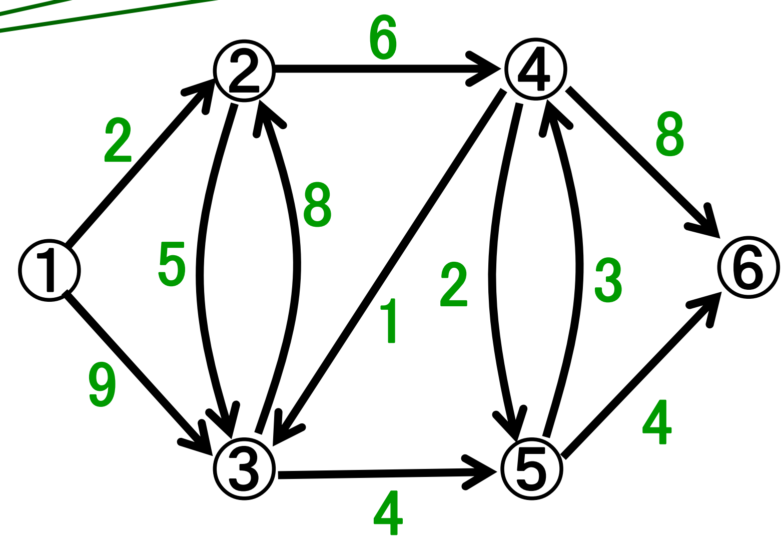
$$x_{35}+x_{45}=x_{54}+x_{56}$$

中間点:入枝が1本使用
⇒出枝を1本使用

$$x_{46}+x_{56}=1$$

⑥に入る枝を1本使う

全枝(i,j)に対して$x_{ij}\in\{0,1\}$



例題1(続) 数式表現の整理

最短路問題（IP）

$$
\begin{aligned}
\min.\ & 2x_{12} + 9x_{13} + 5x_{23} + 6x_{24} + 8x_{32} + 4x_{35} + x_{43} + 2x_{45} + 8x_{46} + 3x_{54} + 4x_{56} \\
\text{s.t.}\ & -x_{12} - x_{13} = -1 \\
& +x_{12} - x_{23} - x_{24} + x_{32} = 0 \\
& +x_{13} + x_{23} - x_{32} - x_{35} + x_{43} = 0 \\
& +x_{24} - x_{43} - x_{45} - x_{46} + x_{54} = 0 \\
& +x_{35} + x_{45} - x_{54} - x_{56} = 0 \\
& +x_{46} + x_{56} = 1
\end{aligned}
$$

全枝(i,j)に対して $\cancel{x_{ij} \in \{0,1\}}$　$x_{ij} \geqq 0$

LP緩和

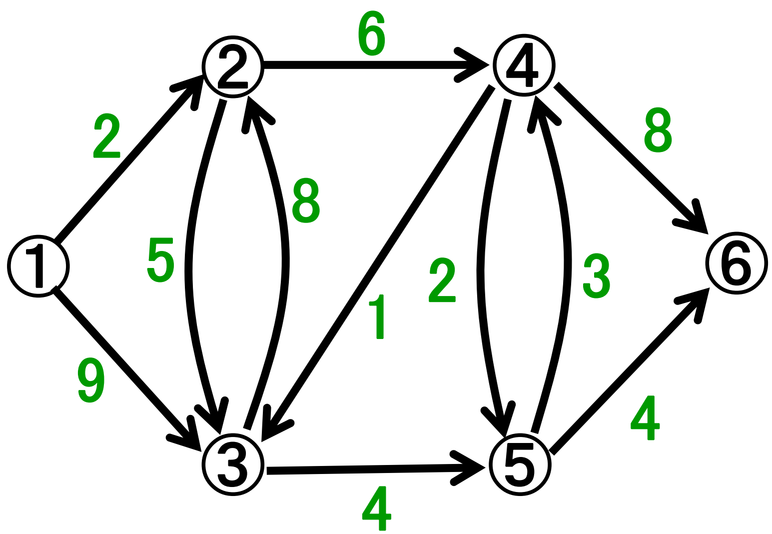
線形計画問題(P)

演習：(P)の双対問題を作ってみよう
相補性条件を導いてみよう

寄り道 ネットワークのデータ表現

$$
\begin{array}{c}
\\
① \\
② \\
③ \\
④ \\
⑤ \\
⑥
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{12} & a_{13} & a_{23} & a_{24} & a_{32} & a_{35} & a_{43} & a_{45} & a_{46} & a_{54} & a_{56}
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

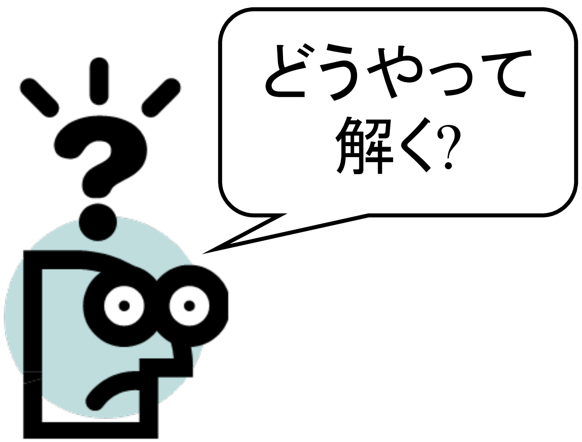
接続行列
(incidence matrix)



双対問題(D)

双対変数:

$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$



$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & -p_1 + p_6 \\
\text{s.t.}\quad & p_2 - p_1 \le 2 \\
& p_3 - p_1 \le 9 \\
& p_3 - p_2 \le 5 \\
& p_4 - p_2 \le 6 \\
& p_2 - p_3 \le 8 \\
& p_5 - p_3 \le 4 \\
& p_3 - p_4 \le 1 \\
& p_5 - p_4 \le 2 \\
& p_6 - p_4 \le 8 \\
& p_4 - p_5 \le 3 \\
& p_6 - p_5 \le 4
\end{aligned}
$$

仮定

$p_1 = 0$

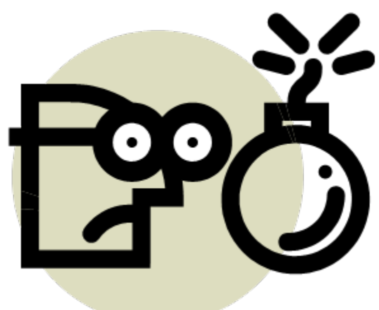
$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & p_6 \\
\text{s.t.}\quad & p_2 \le p_1 + 2 \\
& p_3 \le p_1 + 9 \\
& p_3 \le p_2 + 5 \\
& p_4 \le p_2 + 6 \\
& p_2 \le p_3 + 8 \\
& p_5 \le p_3 + 4 \\
& p_3 \le p_4 + 1 \\
& p_5 \le p_4 + 2 \\
& p_6 \le p_4 + 8 \\
& p_4 \le p_5 + 3 \\
& p_6 \le p_5 + 4 \\
& p_1 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & p_6 \\
\text{s.t.}\quad & p_2 \le p_1 + 2 \\
& p_3 \le p_1 + 9 \\
& p_3 \le p_2 + 5 \\
& p_4 \le p_2 + 6 \\
& p_2 \le p_3 + 8 \\
& p_5 \le p_3 + 4 \\
& p_3 \le p_4 + 1 \\
& p_5 \le p_4 + 2 \\
& p_6 \le p_4 + 8 \\
& p_4 \le p_5 + 3 \\
& p_6 \le p_5 + 4 \\
& p_1 = 0
\end{aligned}
$$

(D)の解き方:アイディア

ベルマン方程式(Bellman's equation)

$$
\begin{aligned}
& p_1 = 0 \\
& p_2 = \min\{p_1 + 2,\ p_3 + 8\} \\
& p_3 = \min\{p_1 + 9,\ p_2 + 5,\ p_4 + 1\} \\
& p_4 = \min\{p_2 + 6,\ p_5 + 3\} \\
& p_5 = \min\{p_3 + 4,\ p_4 + 2\} \\
& p_6 = \min\{p_4 + 8,\ p_5 + 4\}
\end{aligned}
$$



この方程式って解けるの?

ベルマン方程式の解き方

無変化で終了

$p_1=0$

$p_2 = \min\{p_1+2,\ p_3+8\}$

$p_3 = \min\{p_1+9,\ p_2+5,\ p_4+1\}$

$p_4 = \min\{p_2+6,\ p_5+3\}$

$p_5 = \min\{p_3+4,\ p_4+2\}$

$p_6 = \min\{p_4+8,\ p_5+4\}$

	初期解	改定1	改定2	改定3	改定4	改定5	改定6
p_1	0	0	0	0	0	0	0
p_2	∞	2	2	2	2	2	2
p_3	∞	9	7	7	7	7	7
p_4	∞	∞	8	8	8	8	8
p_5	∞	∞	13	11	10	10	10
p_6	∞	∞	∞	16	15	14	14

(D)の最適解

動的計画法の利用

ベルマン-フォード法

計算量: O(mn)

n:点数
m:枝数

(D)の解⇒(P)の解

相補性条件

$$(2-p_2+p_1)x_{12}=0$$
$$(9-p_3+p_1)x_{13}=0$$
$$(5-p_3+p_2)x_{23}=0$$
$$(6-p_4+p_2)x_{24}=0$$
$$(8-p_2+p_3)x_{32}=0$$
$$(4-p_5+p_3)x_{35}=0$$
$$(1-p_3+p_4)x_{43}=0$$
$$(2-p_5+p_4)x_{45}=0$$
$$(8-p_6+p_4)x_{46}=0$$
$$(3-p_4+p_5)x_{54}=0$$
$$(4-p_6+p_5)x_{56}=0$$

	解
p_1	0
p_2	2
p_3	7
p_4	8
p_5	10
p_6	14

$$(0)x_{12}=0$$
$$(2)x_{13}=0$$
$$(0)x_{23}=0$$
$$(0)x_{24}=0$$
$$(13)x_{32}=0$$
$$(1)x_{35}=0$$
$$(2)x_{43}=0$$
$$(0)x_{45}=0$$
$$(2)x_{46}=0$$
$$(5)x_{54}=0$$
$$(0)x_{56}=0$$

$$x_{12}=1$$
$$x_{23}=1$$
$$x_{24}=1$$
$$x_{45}=1$$
$$x_{56}=1$$

例題1(続) (P)の最適解

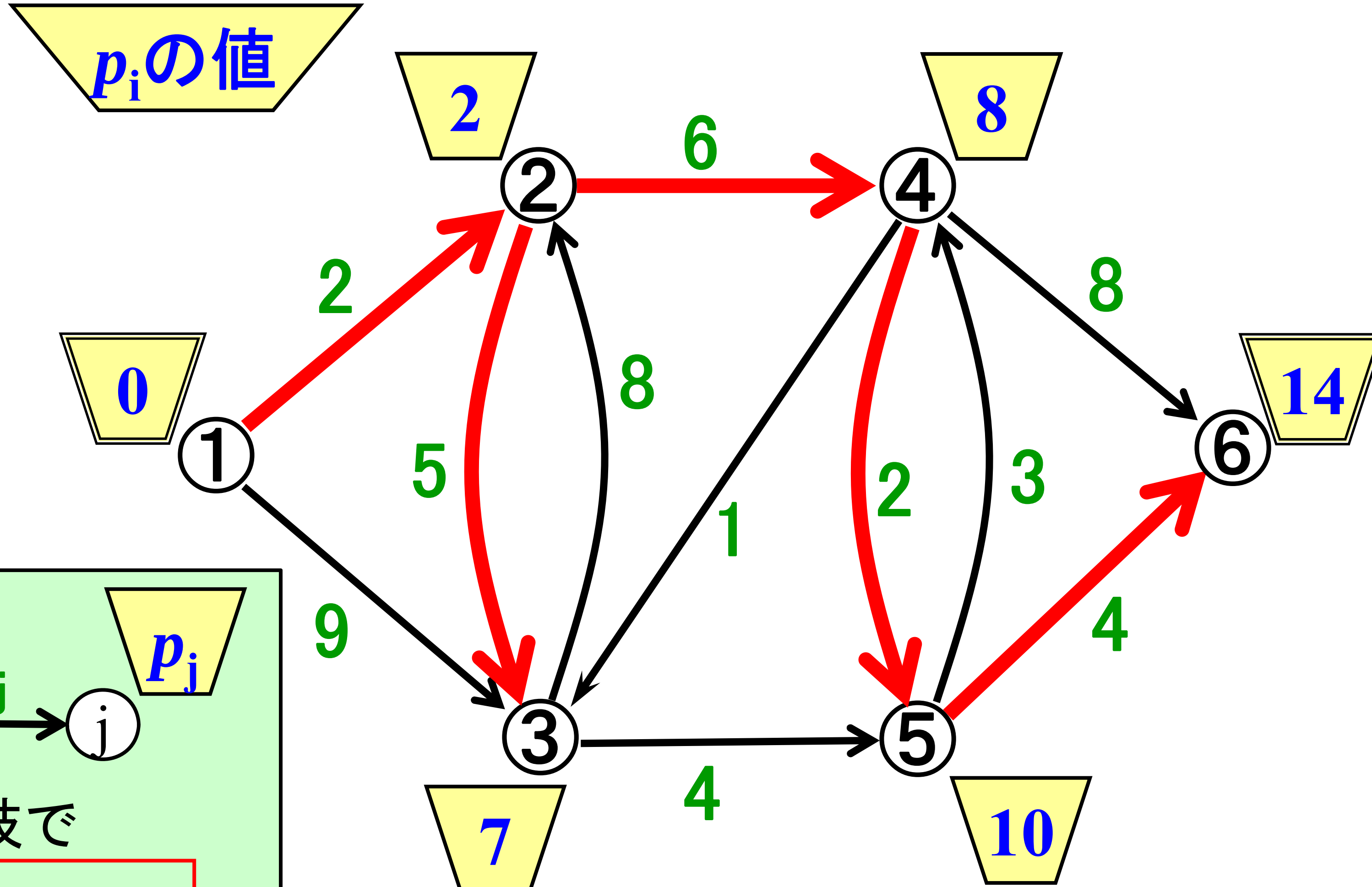
$x_{12}=1$

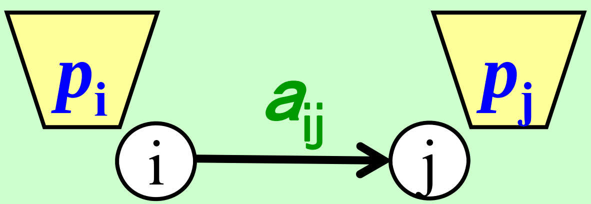
$x_{23}=1$

$x_{24}=1$

$x_{45}=1$

$x_{56}=1$





すべての枝で

$$\boxed{p_i + a_{ij} \geqq p_j}$$

が成立

確認してみよう

最短路木

(IP)と(P)とその双対問題(D)

最短路問題(IP)の最適値

完全単模性(Totally Unimodularity)

一致

ネットワーク型の制約は
整数最適解を持つ

LP緩和問題(P)の最適値

一致 双対定理

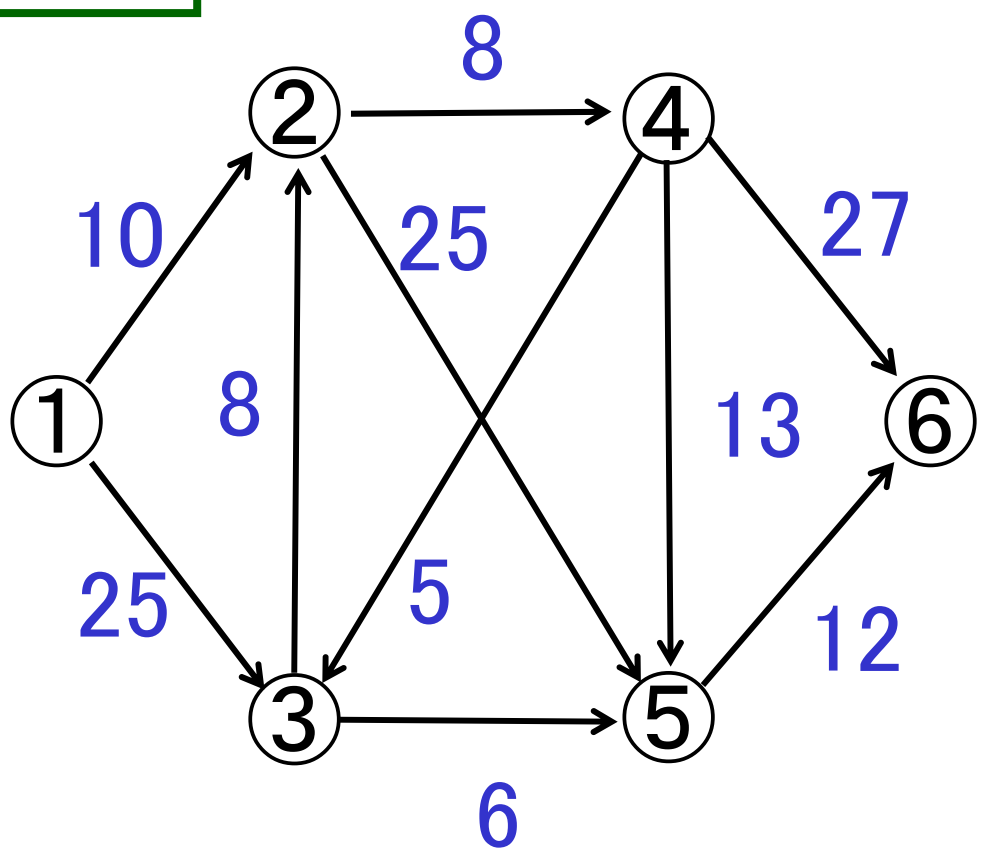
(P)の双対問題(D)の最適値

- 整数計画
- 多面体論

この部分を高速に解くのが重要

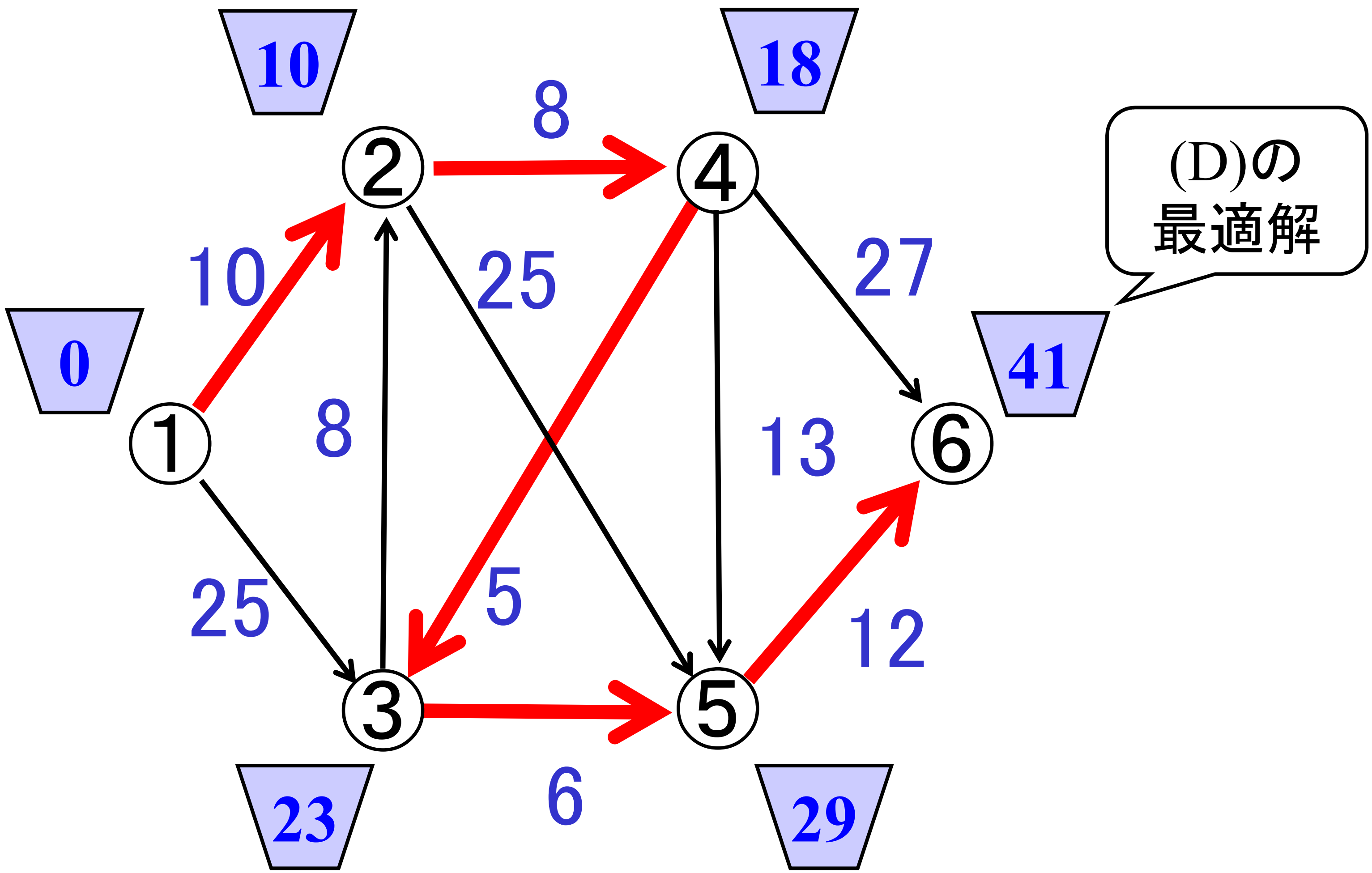
練習1 ベルマン-フォード法

①⇒⑥の最短路は?



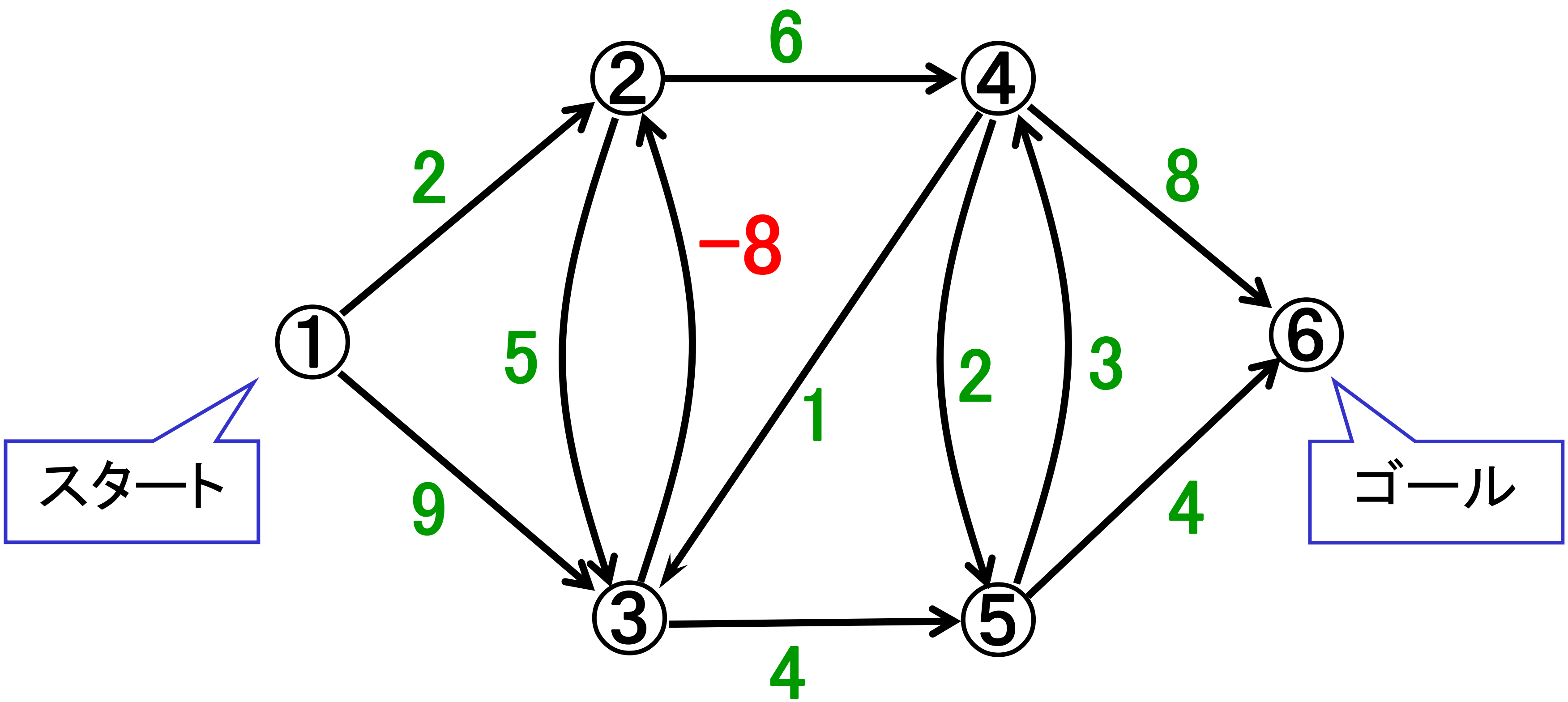
練習1 解答例

①を根とした最短路木



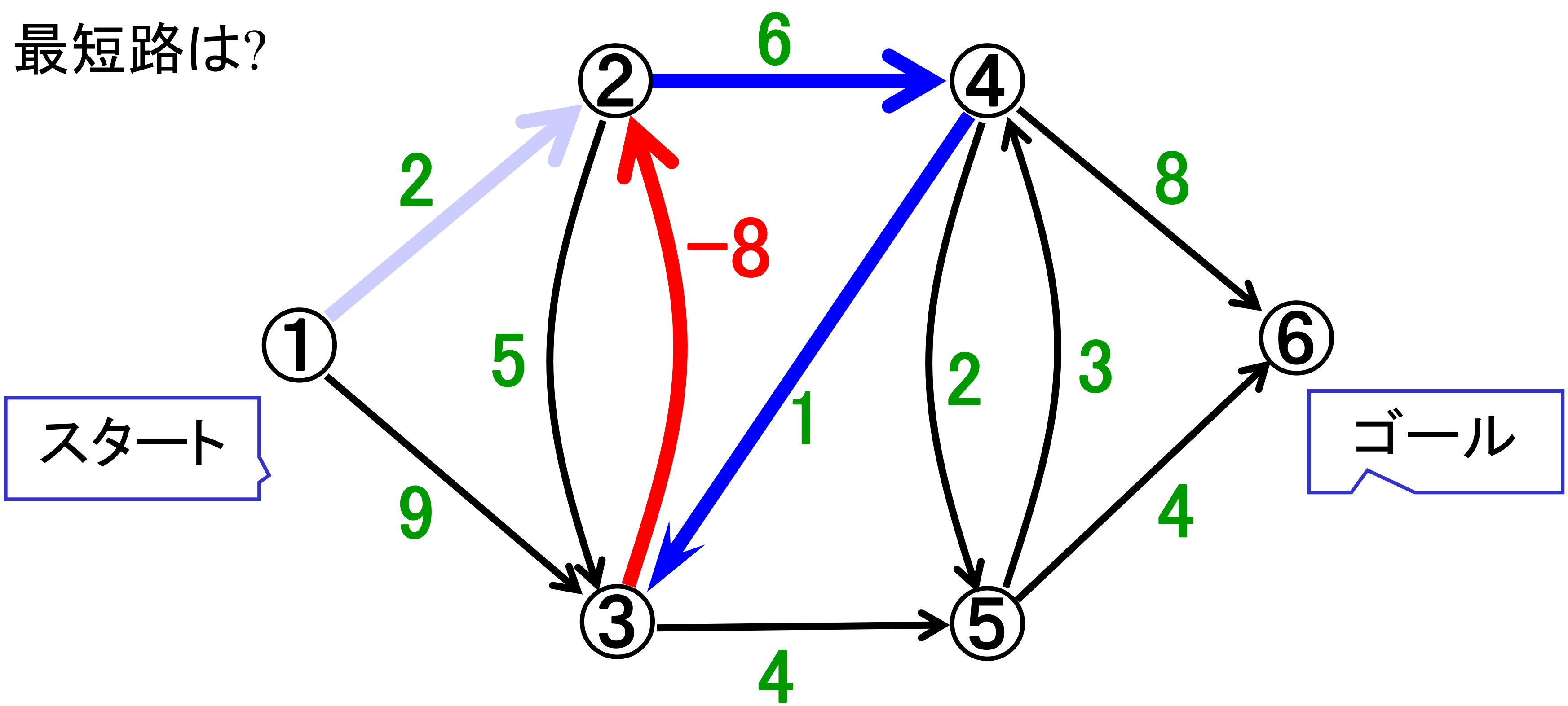
例題2 負の長さがある場合

最短路を求めよ



例題2(続) 負閉路の存在

最短路は?



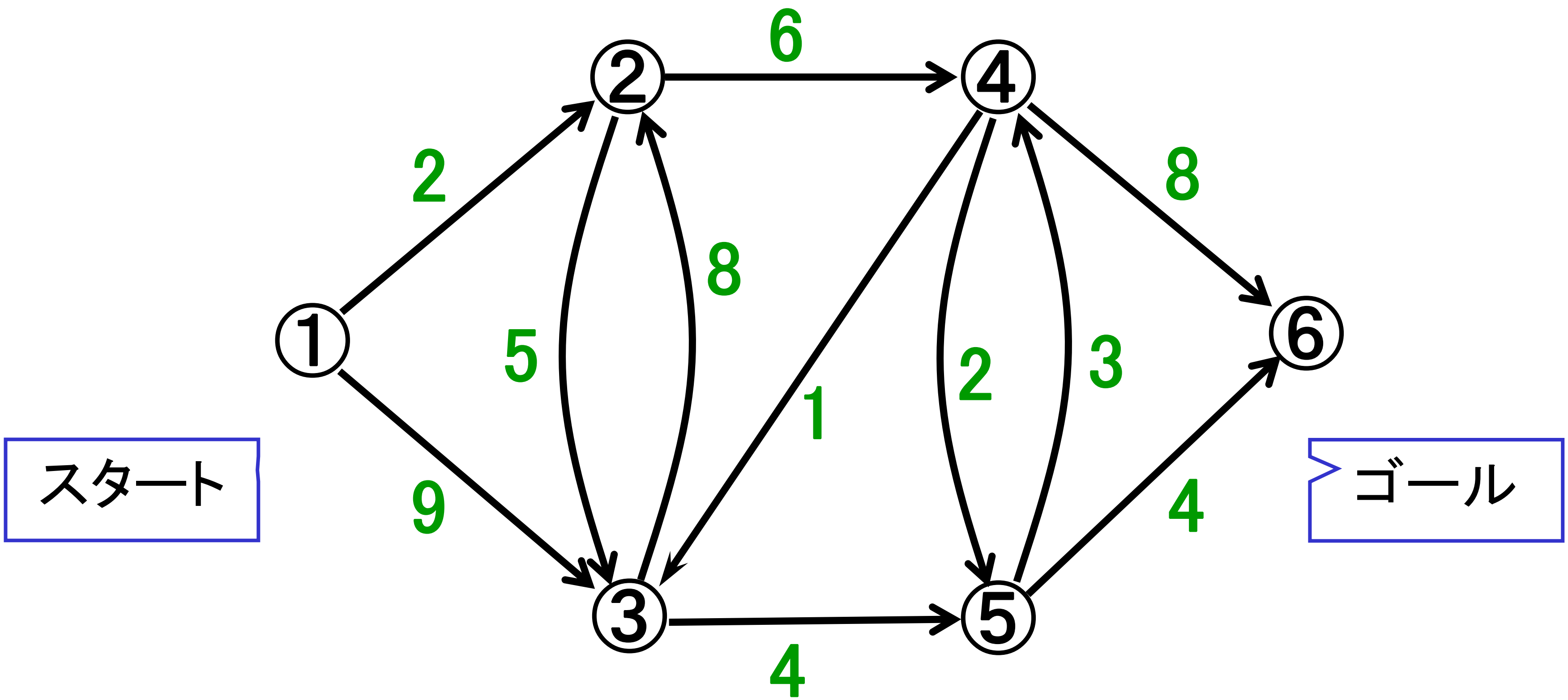
ベルマン-フォード法を適用⇒停止しない

（最短路が存在しない）

⇩

枝数回の繰り返しで停止させる（負閉路or最短路の発見）

例題3 負の長さの枝が無いとき



枝の数値は
非負と仮定!

例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(1)

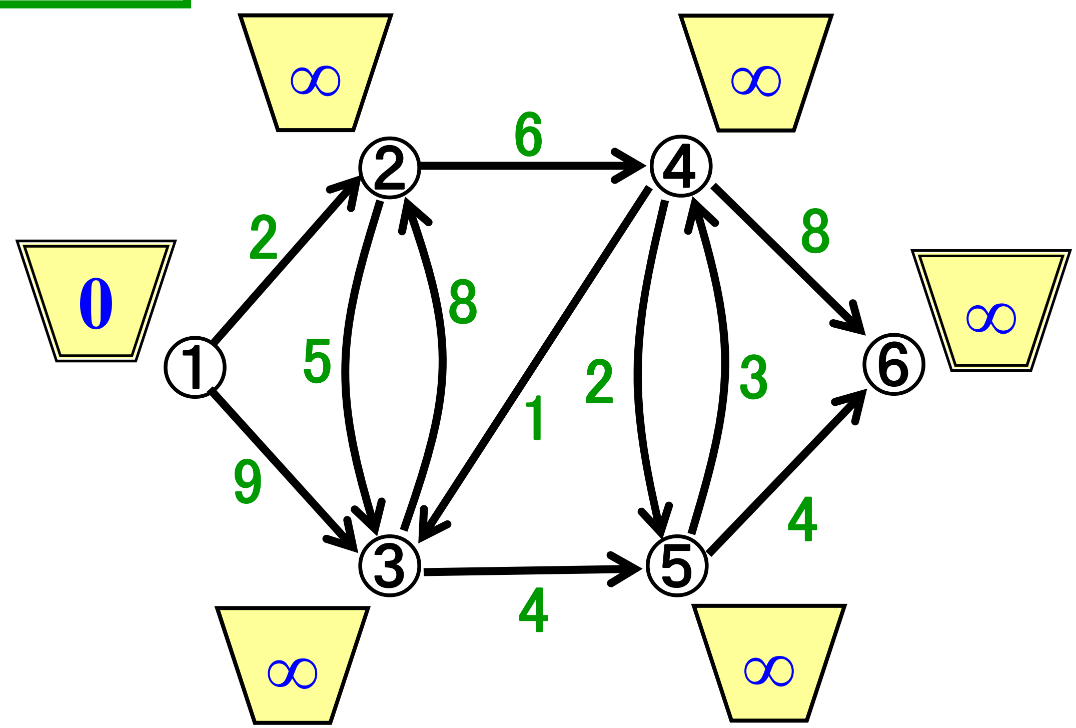
準備:

- スタートのポテンシャルを**0**
- 残りの点のポテンシャルは∞
- 全点が未確定.

性質を満たすよう
ポテンシャルを順に更新

ダイクストラ法

Dijkstra



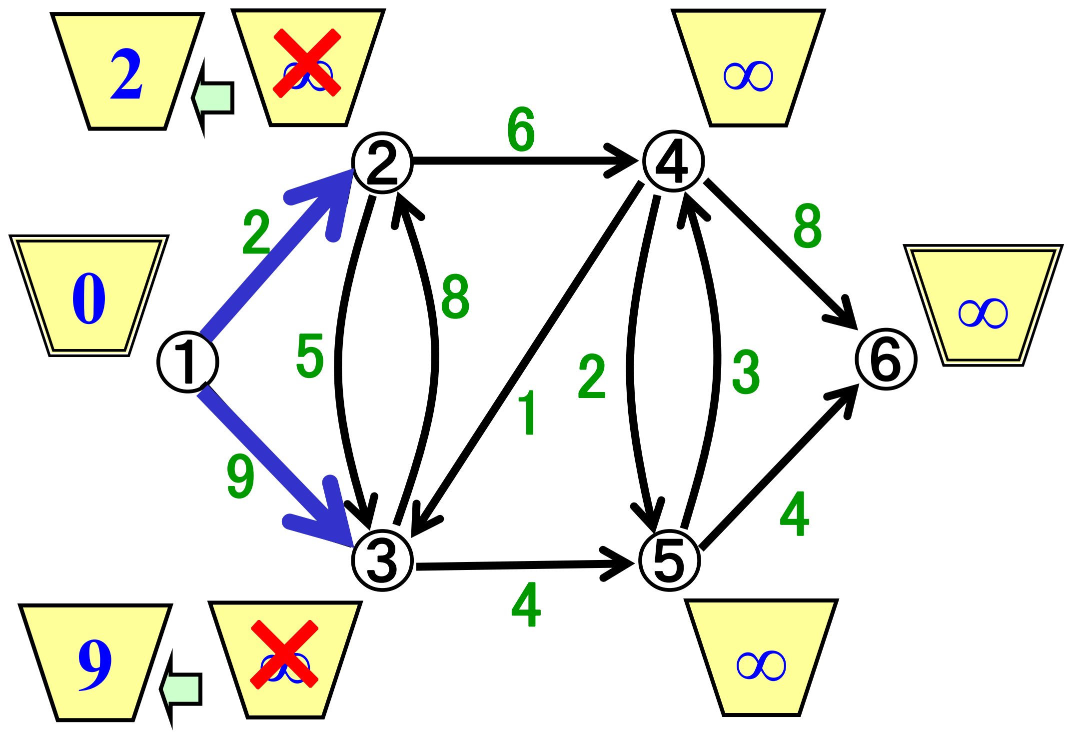
例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方（1）

手順：全点が確定するまで以下を繰り返す

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

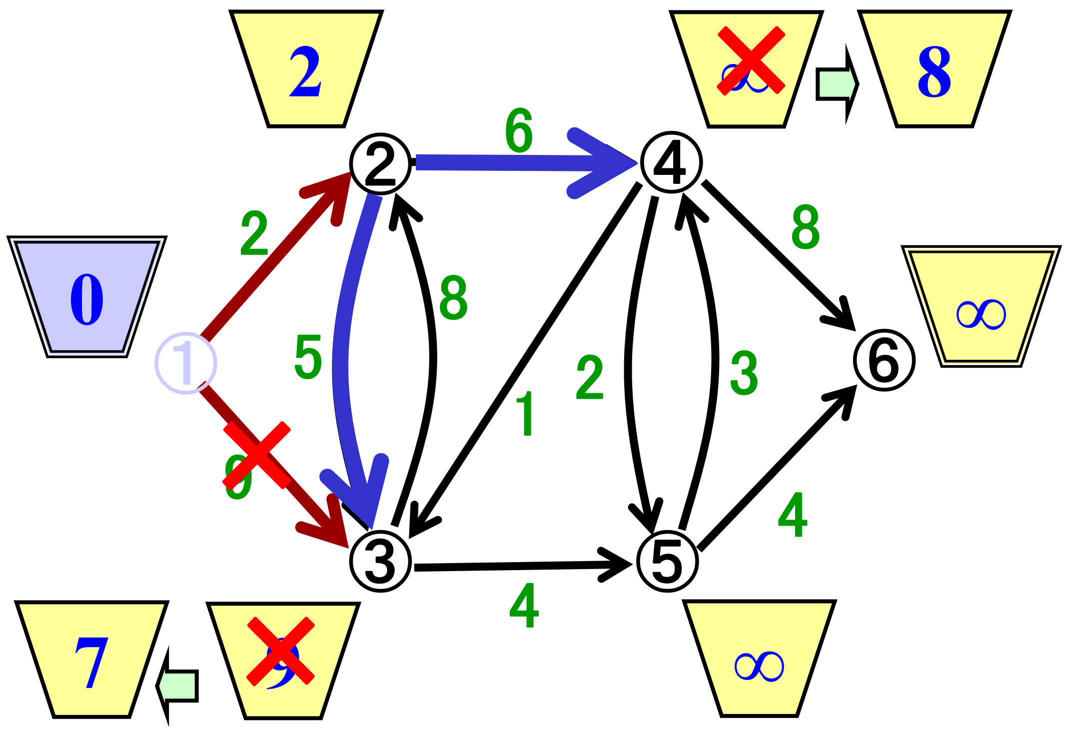


例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(2)

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

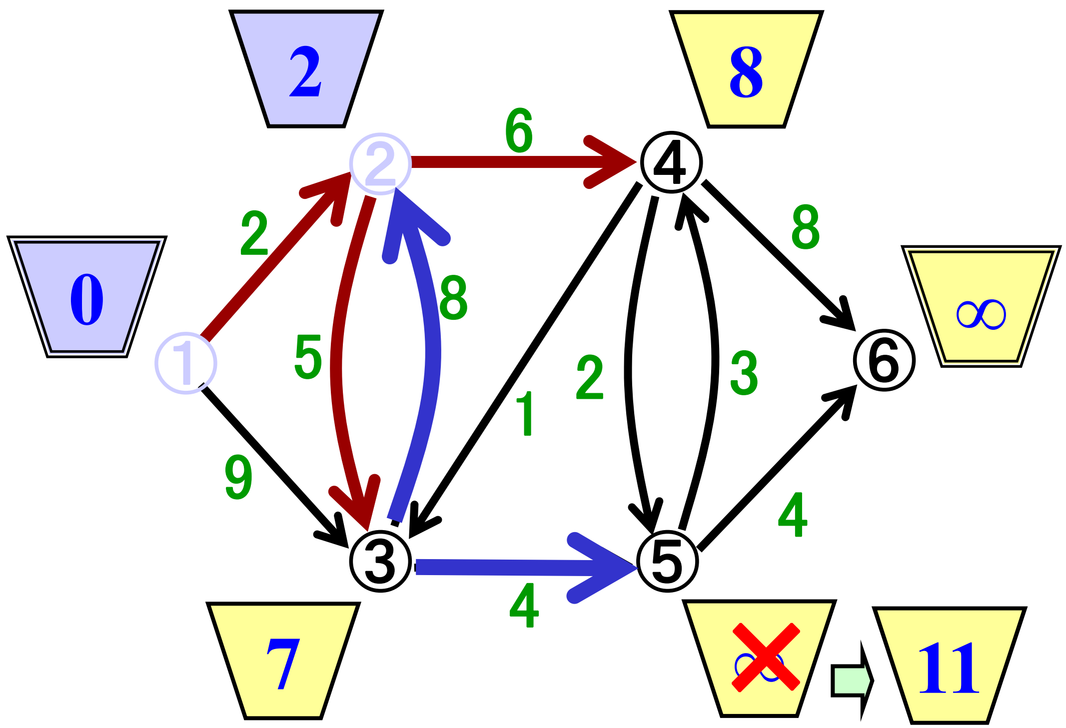


例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(3)

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

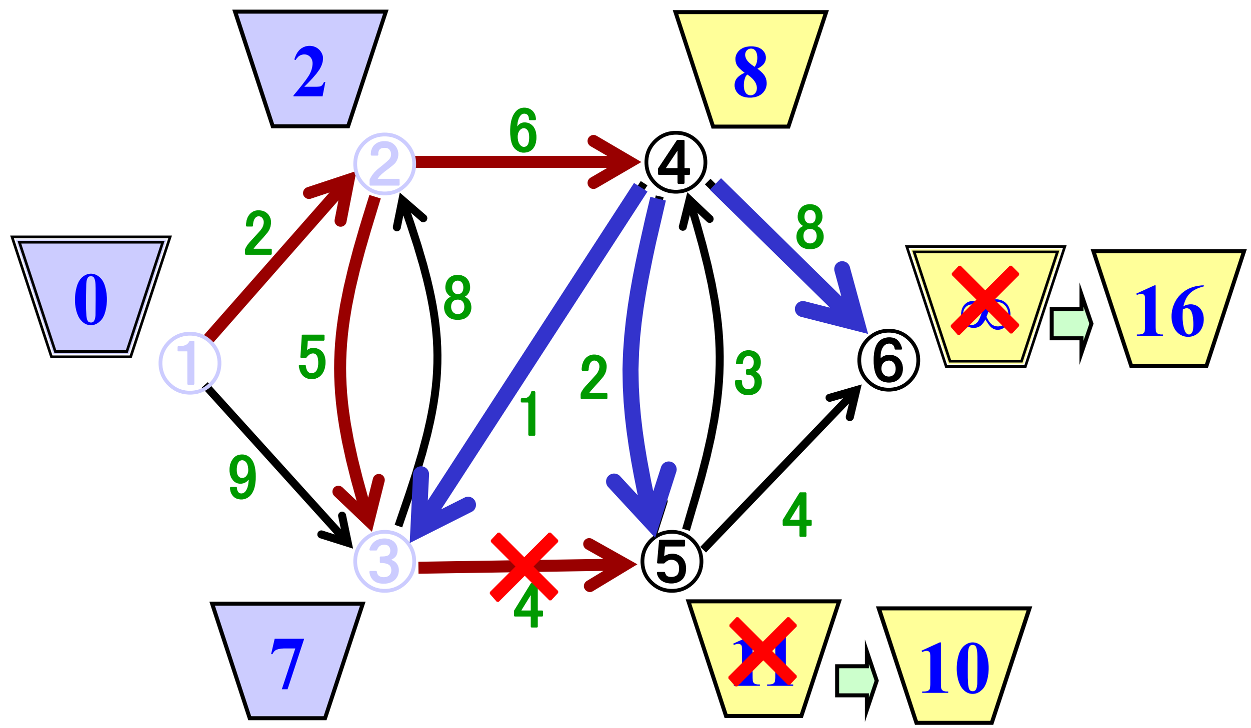


例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(4)

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

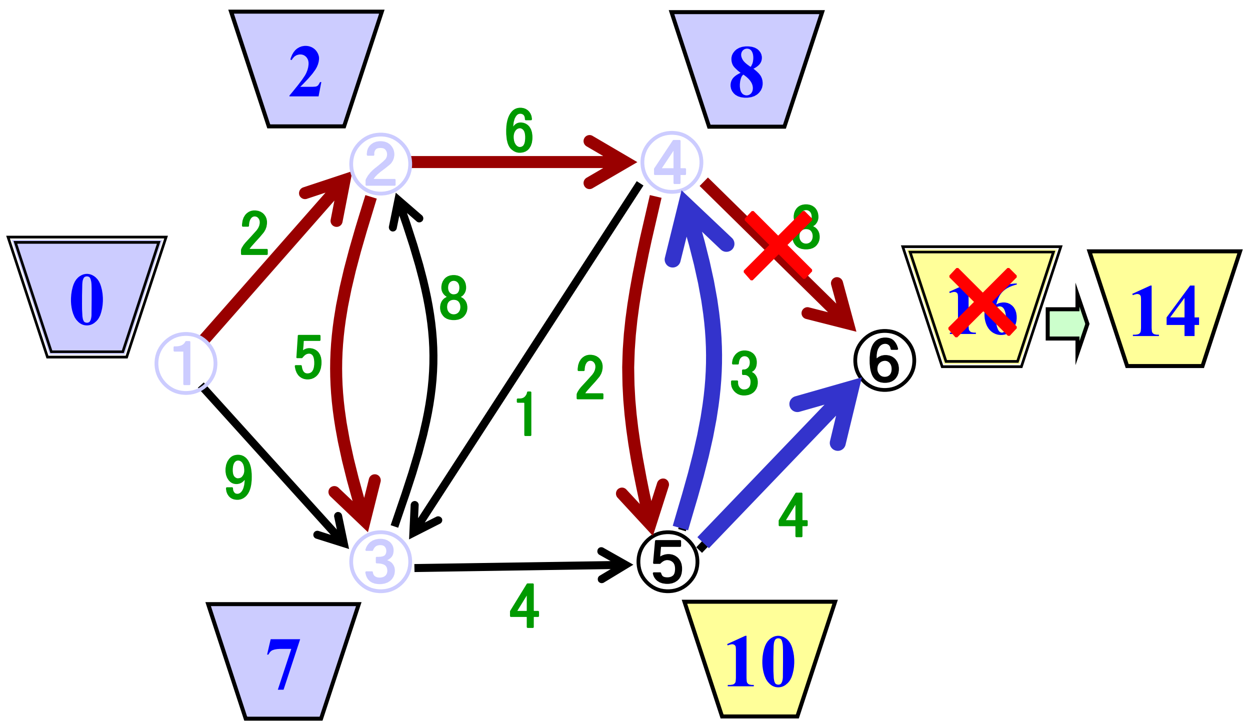


例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(5)

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定



例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(6)

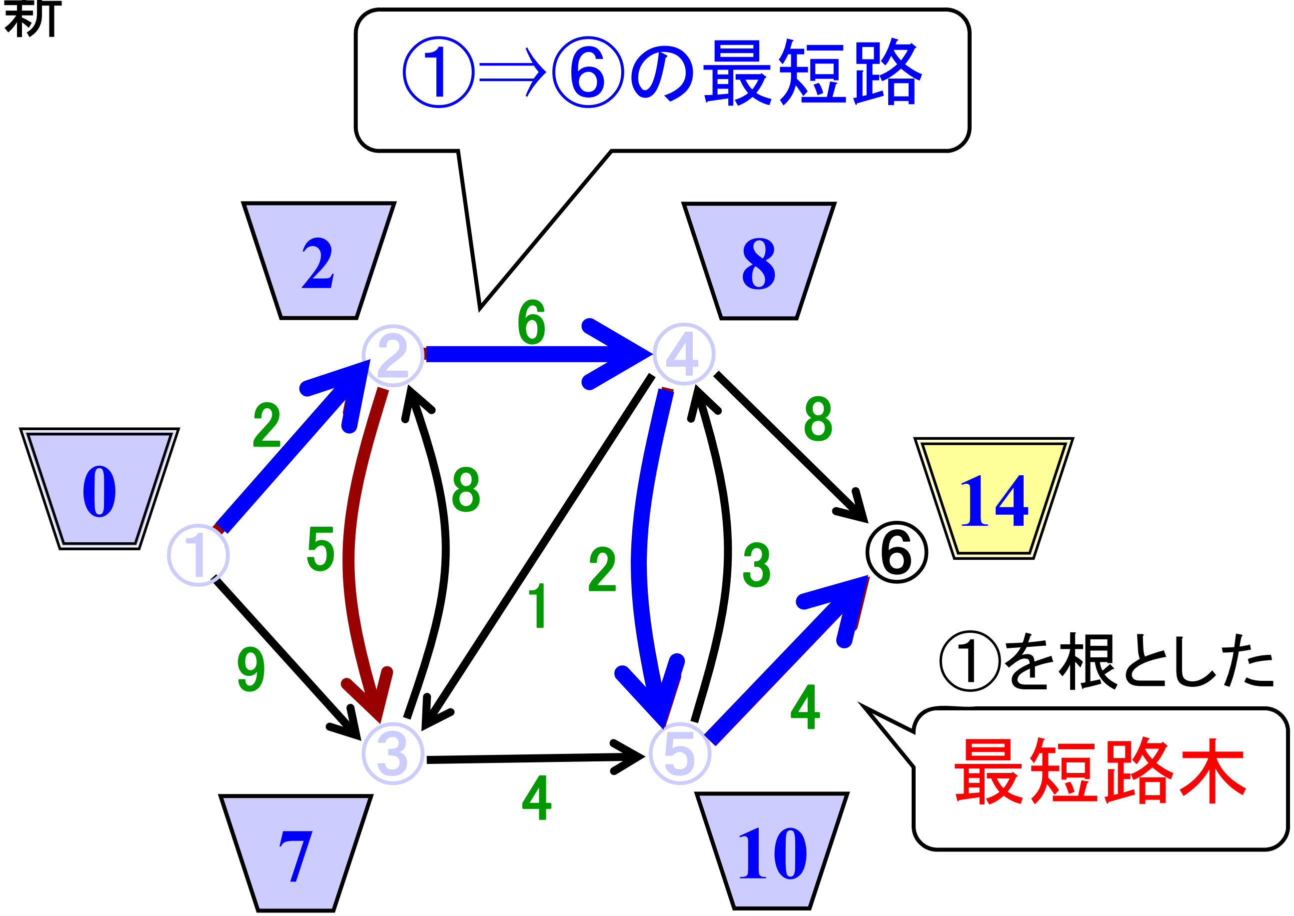
① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

⇩

全点が確定し終了



最適なポテンシャルが見つかった ⇨ 最短路も見つかった

ダイクストラ法の高速実現法

ポテンシャル最小の点を高速に発見

– 未確定点を配列でなくリスト構造で保持（走査する点数を減らす）
– 未確定点をポテンシャルの値順に整列 →整列アルゴリズムの知識が必要

フィボナッチヒープ

効率的実装

$O(m+n\log n)$

基本的なアルゴリズム+
データ構造の知識は
不可欠

まとめ：問題を解く戦略を練る