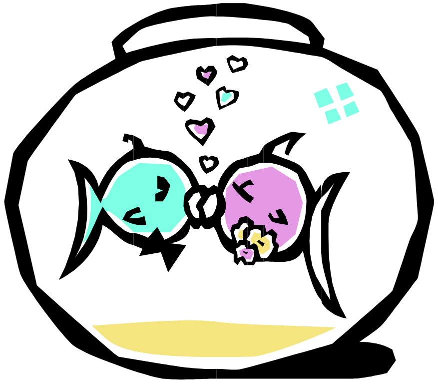
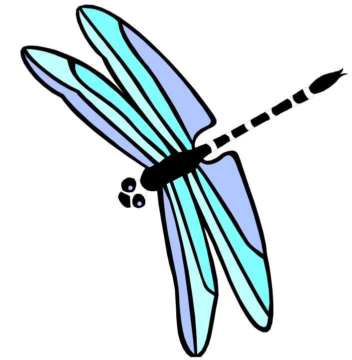


連立方程式の解き方

行列と連立方程式
ガウスの消去法

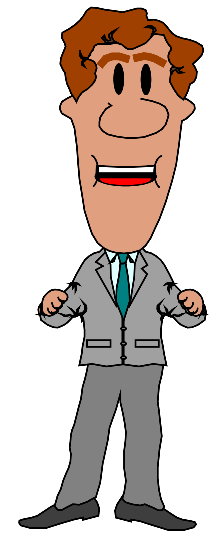


連立方程式

- さまざまな問題に現れる
  - モデル分析の基本
- 実際には数多くの変数，方程式から成る連立方程式を解く必要がある．
  - 例：飛行機クルーのスケジュール
    １万変数，１００万本の方程式

効率のよい連立方程式の扱い方を知ることは重要

例題1 連立方程式



解いてみよう!!

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 45 & \cdots ① \\ x_1 + 2x_2 = 40 & \cdots ② \end{cases}$$

中・高校での方法

代入法

①より $x_2 = -3x_1 + 45 \cdots$ ①’

②に①’を代入

$$x_1 + 2(-3x_1 + 45) = 40$$

よって $x_1 = 10.\ x_2 = 15$

加減法

$$\begin{array}{rl} 6x_1 + 2x_2 = 90 & : ① \times 2 \\ -)\quad x_1 + 2x_2 = 40 & : ② \\ \hline 5x_1 \qquad\quad = 50 & \end{array}$$

$x_1 = 10.\ x_2 = 15$

- 変数が多くなったら大変そう
- 式が多くなったら大変そう

例題2 解いてみよう

$$
\begin{cases}
2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 44 & \cdots ① \\
3x_1 - 4x_2 + 18x_3 = 76 & \cdots ② \\
2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 11 & \cdots ③
\end{cases}
$$

いきなり解くのは大変そう

→同じ解を持つ<u>やさしい問題</u>に変形して解く

$$
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 22 & \cdots ① \\
x_2 + 3x_3 = 5 & \cdots ② \\
x_3 = 3 & \cdots ③
\end{cases}
$$

連立方程式の変形

解を比較してみよう

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 45 & \cdots ① \\ x_1 + 2x_2 = 40 & \cdots ② \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 45 & \cdots ① \\ -5x_1 = -50 & \cdots ② - ① \times 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x_2 = -75 & \cdots ① - ② \times 3 \\ x_1 + 2x_2 = 40 & \cdots ② \end{cases}$$

- ある等式の両辺を○倍する→連立方程式の解は同じ
- 2つの等式間の足し算・引き算→連立方程式の解は同じ

⇒2つの操作で連立方程式の解は変化しない！

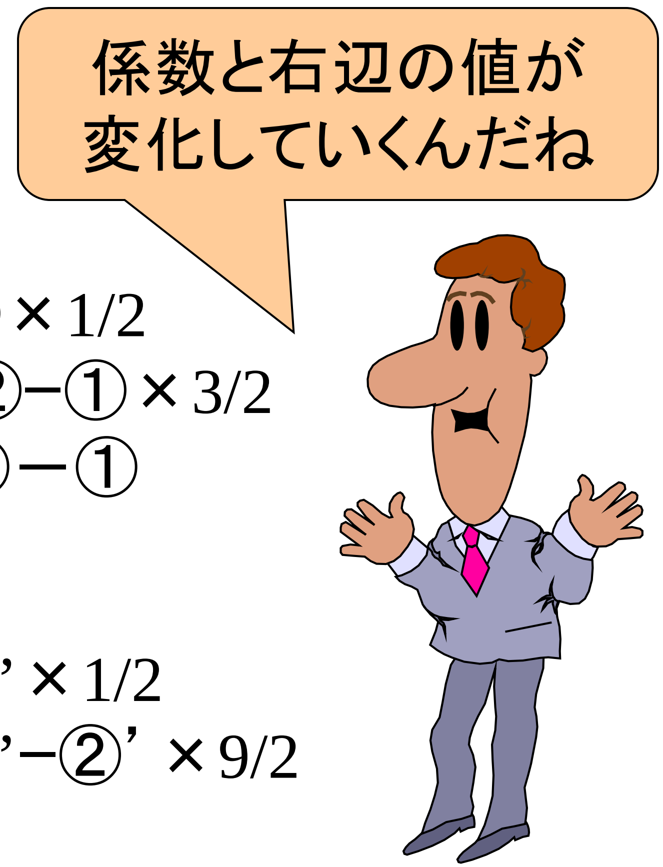
やさしい問題に変形する

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 44 & \cdots \text{①} \\ 3x_1 - 4x_2 + 18x_3 = 76 & \cdots \text{②} \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 11 & \cdots \text{③} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 22 & \cdots \text{①}' : \text{①} \times 1/2 \\ \quad 2x_2 + 6x_3 = 10 & \cdots \text{②}' : \text{②} - \text{①} \times 3/2 \\ \quad 9x_2 + x_3 = -33 & \cdots \text{③}' : \text{③} - \text{①} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 22 & \cdots \text{①}'' \\ \quad x_2 + 3x_3 = 5 & \cdots \text{②}'' : \text{②}' \times 1/2 \\ \quad -26x_3 = -78 & \cdots \text{③}'' : \text{③}' - \text{②}' \times 9/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 22 & \\ \quad x_2 + 3x_3 = 5 & \\ \quad x_3 = 3 & : \text{③}'' \times (-1/26) \end{cases}$$



係数と右辺の値

- 行列：数を長方形に並べて括弧( )で括ったもの
- 連立方程式は行列で表現できる

ピボット

列

行

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 44 \\ 3 & -4 & 18 & 76 \\ 2 & 5 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

1行×1/2
2行ー1行×3/2
3行ー1行

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 22 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 9 & 1 & -33 \end{pmatrix}$$

2行×1/2
3行ー2行×9/2

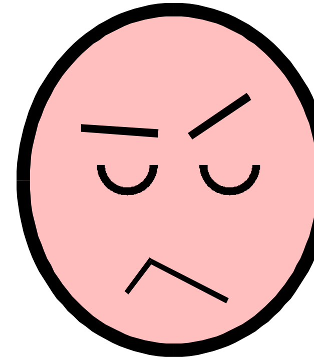
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 22 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -26 & -78 \end{pmatrix}$$

3行×(-1/26)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 22 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

この操作を
「**掃き出し**」
という.

素朴な消去法



- 連立方程式を行列で表現する
- 対角線上に<u>ピボット</u>を選びながら<u>掃き出し</u>を行う.
- やさしい問題に変形できたら，下から方程式を順に解いていく.

演習1: 以下の連立方程式を消去法で解いてみよう

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 45 & \cdots ① \\ x_1 + 2x_2 = 40 & \cdots ② \end{cases}$$

とことん掃出しをしよう

ピボット

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 44 \\ 3 & -4 & 18 & 76 \\ 2 & 5 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

1行×1/2
2行ー1行×3/2
3行ー1行×2/2

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 22 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 9 & 1 & -33 \end{pmatrix}$$

1行ー2行×(-2/2)
2行×1/2
3行ー2行×9/2

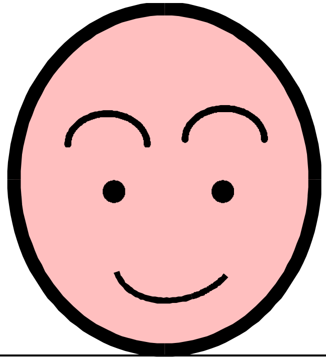
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 32 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -26 & -78 \end{pmatrix}$$

1行ー3行×(10/-26)
2行ー3行×(3/-26)
3行×(1/-26)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

掃出しの操作を
上の行にも行えば,
直接解が求まるよね

ガウスの消去法



- 連立方程式を行列で表現する
- 対角線上に**ピボット**を選びながら**すべての行に対し掃き出し**を行う.
- 最後の行まで実行したら終了!!

「ピボット変換」ともいう

演習2:以下の連立方程式をガウスの消去法で解いてみよう

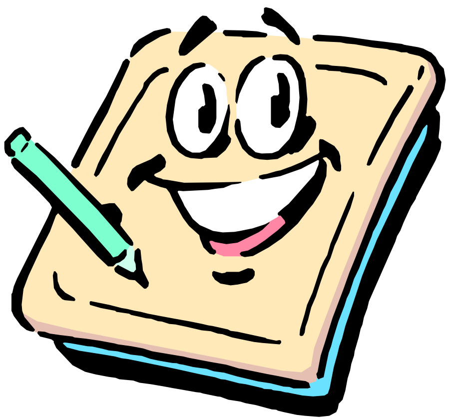
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 45 & \cdots ① \\ x_1 + 2x_2 = 40 & \cdots ② \end{cases}$$

ここで一息

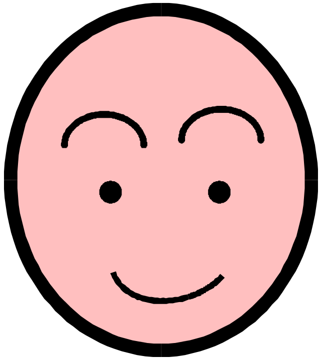
以下の方程式の解は？

（1）　$2x = 6$

（2）　$ax = b$



ピボットが0になった時(1)

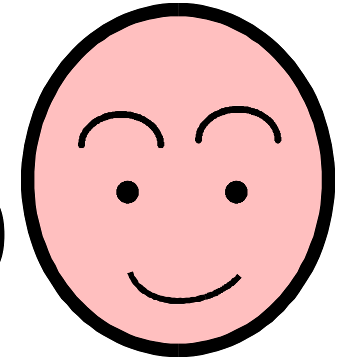


以下の連立方程式を解いてみよう

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 39 \\ 8x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 83 \end{cases}$$

行の入れ替えで最後まで変形できる

ピボットが0になった時(1)



行の入れ替えで最後まで変形できる

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 15 \\ 4 & 2 & 5 & 39 \\ 8 & 8 & 9 & 83 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 23 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 15/2 \\ 0 & 4 & 5 & 23 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/8 & 37/8 \\ 0 & 1 & 5/4 & 23/4 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

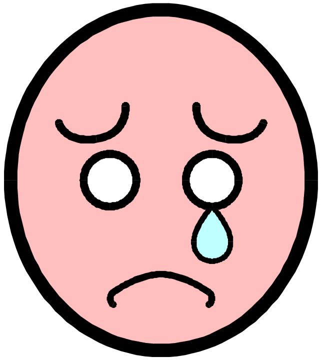
ピボットが0になった時(2)

以下の連立方程式を解いてみよう

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 39 \\ 8x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 83 \end{cases}$$

連立方程式は解を持たない場合もある

ピボットが0になった時(2)



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 15 \\ 4 & 2 & 5 & 39 \\ 8 & 4 & 5 & 83 \end{pmatrix}$$

連立方程式は解を持たない場合もある

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 23 \end{pmatrix}$$

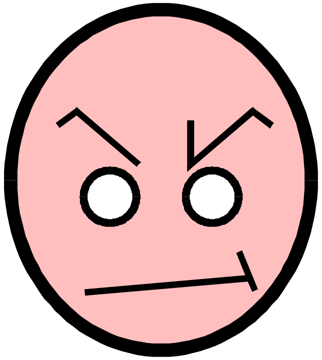
stop

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$0x$=b
のパターン

解なし

ピボットが0になった時(3)

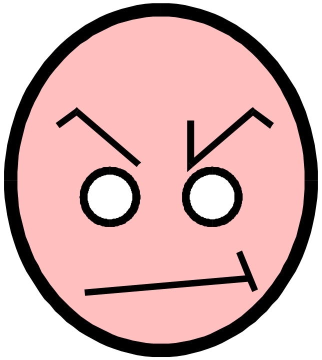


以下の連立方程式を解いてみよう

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 39 \\ 8x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 63 \end{cases}$$

連立方程式は解が定まらない場合もある

ピボットが0になった時(3)



連立方程式は解が定まらない場合もある

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 15 \\ 4 & 2 & 5 & 39 \\ 8 & 4 & 5 & 63 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

stop

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1+1/2x_2+1/2x_3 = 15/2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$0x=0$

のパターン

$$\begin{cases} x_1+1/2x_2 = 6 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t+12 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

任意の実数

演習3 解いてみよう!

(1)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 13 \\ x_1 + 8x_3 = -5 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_3 = 1 \\ 3x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = -6 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

連立方程式と行列

行列の積を定義すると連立方程式は
自然に行列で表現できる.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 44 \\ 3x_1 - 4x_2 + 18x_3 = 76 \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 11 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 3 & -4 & 18 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 76 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 3 & -4 & 18 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 44 \\ 76 \\ 11 \end{pmatrix}$$

とおくと Ax=b と書ける.

この記法よりLPを

$$\begin{aligned} &\max\ c^t x \\ &\text{s.t.}\quad Ax \leqq b \\ &\qquad\qquad x \geqq 0 \end{aligned}$$

と書くこともある

寄り道 実際に連立方程式を解く

- ガウスの消去法 $O(n^3)$

遅い・・・

- 現在の理論的な最速解法 $O(n^{2.376})$
  - Coppersmith and Winograd(1990)
  - でも，係数が大きく実用的×
- 実際に解く場合は
  - 初期値→（反復公式）→解の精度を改善：反復法
  - 行列分解，スパース性等 を利用

直接法
要素の消去
↕

（大規模）数値計算の話題へ