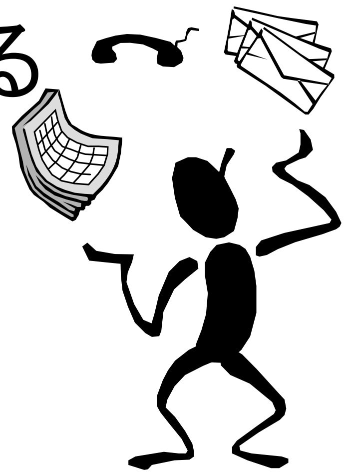
最適化問題の緩和と双対

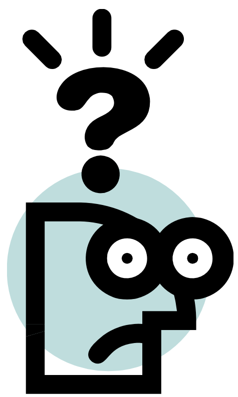
Relaxation and Duality

別な観点から最適化問題を眺める



ここで学ぶこと

- 最適化問題の最適値の上限･下限
- 最適化問題が持つ｢裏の顔｣との関係



例題1 生産計画

- 2つの製品Q,Rを製造
- 製品Q,R共，原液A,Bから生産
- 利益最大の生産計画は？

	製品Q 1kg当たり	製品R 1kg当たり	使用可能量
原液A	2(kl)	1(kl)	70(kl/日)
原液B	3(kl)	4(kl)	180(kl/日)
利益	6(千円)	4(千円)	

定式化してみよう！

定式化

最適値の見積もり例

製品Qの製造量:x_1

製品Rの製造量:x_2

$$
\begin{array}{ll}
\max & 6x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \le 70 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\
 & x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

$x_1, x_2 \geqq 0$より

$\leqq$

$$
\begin{array}{lr}
\times 2 & 4x_1 + 2x_2 \le 140 \\
\times 1 & 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\
\hline
+ & 7x_1 + 6x_2 \le 320
\end{array}
$$

最適値の上界は**320**

$$
\begin{array}{ll}
\max & 6x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \le 70 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\
 & x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

$\leqq$

$$
\begin{array}{lr}
\times 0.9 & 1.8x_1 + 0.9x_2 \le 63 \\
\times 1.4 & 4.2x_1 + 5.6x_2 \le 252 \\
\hline
+ & 6x_1 + 6.5x_2 \le 315
\end{array}
$$

最適値の上界は**315**

Quiz : もっと良い見積もりをしてみよう

最適値の上界・下界

上界の更新

前ページの見積もり1 320

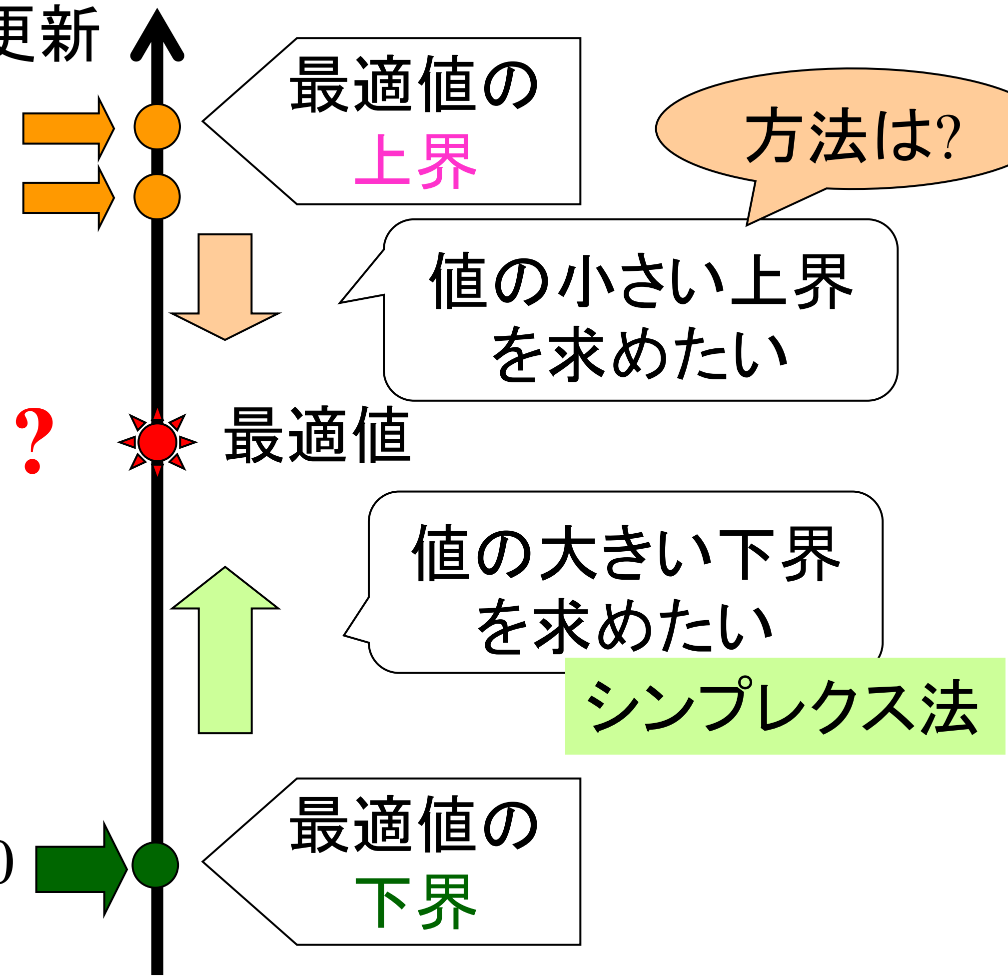
前ページの見積もり2 315

$$
\begin{array}{lrl}
\max & 6x_1 + 4x_2 & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + \quad x_2 & \leq 70 \\
 & 3x_1 + 4x_2 & \leq 180 \\
 & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

実行可能解

x_1=10, x_2=30

⇒（目的関数値）＝180



より良い上界の見積もり方法

小さくしたい

最適値の上界は$70y_1+180y_2$

$6 \leqq 2y_1 + 3y_2$

$4 \leqq y_1 + 4y_2$

で成立

$$\begin{array}{lr} \max & 6x_1 + 4x_2 \quad \leqq \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \le 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

$\times y_1$

$\times y_2$

$(2y_1 + 3y_2)x_1 + (y_1+4y_2)x_2 \le 70y_1+180y_2$

$2y_1x_1 + y_1x_2 \le 70y_1$

$3y_2x_1 + 4y_2x_2 \le 180\, y_2$

+

$y_1, y_2 \geqq 0$ で成立

最良の上界を見つける問題

$$\begin{array}{lr} \text{min.} & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \ge 6 \\ & y_1 + 4y_2 \ge 4 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{array}$$

例題1-2

次の問題の最適値のより良い下界を求める
線形計画問題を作ってみよう

$$
\begin{array}{ll}
\min & 70y_1 + 180y_2 \\
\text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\
 & y_1 + 4y_2 \geq 4 \\
 & y_1, y_2 \geq 0
\end{array}
$$

双対な関係

問題(P)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 6x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \le 70 \\
& 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

問題(D)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 70y_1 + 180y_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2y_1 + 3y_2 \ge 6 \\
& y_1 + 4y_2 \ge 4 \\
& y_1, y_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

主問題 $\longrightarrow$ 双対問題

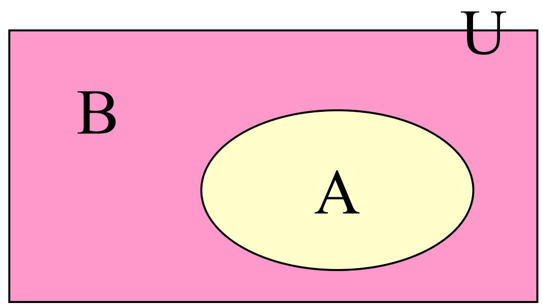
双対問題 $\longleftarrow$ 主問題

「双対(そうつい)」とは

- あるAに，ある操作αを行ったら，Bを得た.
- Bに，操作αを行ったら，Aを得た.

AとBは(操作αに関し)双対の関係

（例） 集合Uの部分集合A:
集合Aの補集合を集合Bとする.
集合Bの補集合は集合A.



⇒集合Aと集合Bは(補集合という操作に関し)双対.

面白そうな双対の関係

- （射影）幾何学の分野：点と線は双対.
  - 定理「2点を通る直線は1つ」
  - 定理「2直線を通る点は1つ」

  双対性（duality）

- いろいろな数理的な場面で双対の関係が本質的に重要役割を演じることが多い.
- 線形計画（数理計画）の分野にも…

ワーク1　双対問題を作ろう

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\ & z = 6x_1 + 5x_2 \\
\text{s.t.}\ & 3x_1 + x_2 \leqq 45 \\
& x_1 + 2x_2 \leqq 40 \\
& x_1,\ x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

ワーク2　双対問題を作ろう

$$\begin{aligned}
&\text{min. } z = 500x_1 + 600x_2 \\
&\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 \geq 4 \\
&\qquad\quad 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\
&\qquad\quad x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}$$

双対問題を作る別な方法

(P)

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \le 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$70-(2x_1+x_2) \geqq 0$

$180-(3x_1+4x_2) \geqq 0$

$y_1 \geqq 0$に対して

$y_1(70-(2x_1+x_2)) \geqq 0$

$y_2 \geqq 0$に対して

$y_2(180-(3x_1+4x_2)) \geqq 0$

(P1)

$$\leqq \quad \begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 4x_2 + \underbrace{y_1(70-(2x_1+x_2))}_{\text{非負}} + \underbrace{y_2(180-(3x_1+4x_2))}_{\text{非負}} \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \le 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

ラグランジュ緩和

(P1)

$$\begin{aligned}
\max \quad & 6x_1 + 4x_2 + y_1(70 - (2x_1 + x_2)) + y_2(180 - (3x_1 + 4x_2)) \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \le 70 \\
& 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\
& x_1, x_2 \ge 0 \\
& y_1, y_2 \ge 0
\end{aligned}$$

最適化では
様々な場面で現れる
重要な緩和手法

ラグランジュ緩和(Lagrange Relaxation)

(P2)

$$\leqq \quad \begin{aligned}
\max \quad & 6x_1 + 4x_2 + y_1(70 - (2x_1 + x_2)) + y_2(180 - (3x_1 + 4x_2)) \\
\text{s.t.} \quad & x_1, x_2 \ge 0, \quad y_1, y_2 \ge 0
\end{aligned}$$

ラグランジュ緩和問題

ラグランジュ緩和問題の構造

ラグランジュ緩和問題

$$
\begin{array}{ll}
\max & 6x_1 + 4x_2 + y_1(70-(2x_1+x_2)) + y_2(180-(3x_1+4x_2)) \\
\text{s.t.} & x_1, x_2 \geq 0, \quad y_1, y_2 \geq 0
\end{array}
$$

ラグランジュ緩和問題

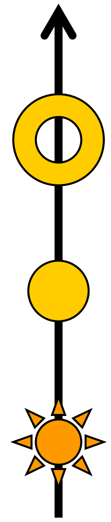
(P2)の最適値

条件緩和

(P1)の最適値

目的関数に追加

(P)の最適値



整理

非有界にならないための条件

$6\text{-}2y_1\text{-}3y_2 \leqq 0$

$4\text{-}y_1\text{-}4y_2 \leqq 0$

$$
\begin{array}{ll}
\max & (6-2y_1-3y_2)x_1 + (4-y_1-4y_2)x_2 + 70y_1 + 180y_2 \\
\text{s.t.} & x_1, x_2 \geq 0, \quad y_1, y_2 \geq 0
\end{array}
$$

ラグランジュ緩和問題を利用した より良い上界の導出

$6\text{-}2y_1\text{-}3y_2 \leqq 0$　　$4\text{-}y_1\text{-}4y_2 \leqq 0$　　小さくしたい

$$\begin{array}{ll} \max & (6-2y_1-3y_2)x_1+(4-y_1-4y_2)x_2+70y_1+180y_2 \\ \text{s.t.} & x_1, x_2 \geq 0, \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

ラグランジュ緩和問題

(P2)の最適値

(P1)の最適値

(P)の最適値

より良い上界

より良い上界を求める問題(D)

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & 70y_1+180y_2 \\ \text{s.t.} & 6-2y_1-3y_2 \leq 0 \\ & 4-y_1-4y_2 \leq 0 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

ラグランジュ緩和問題を利用した双対問題の導出

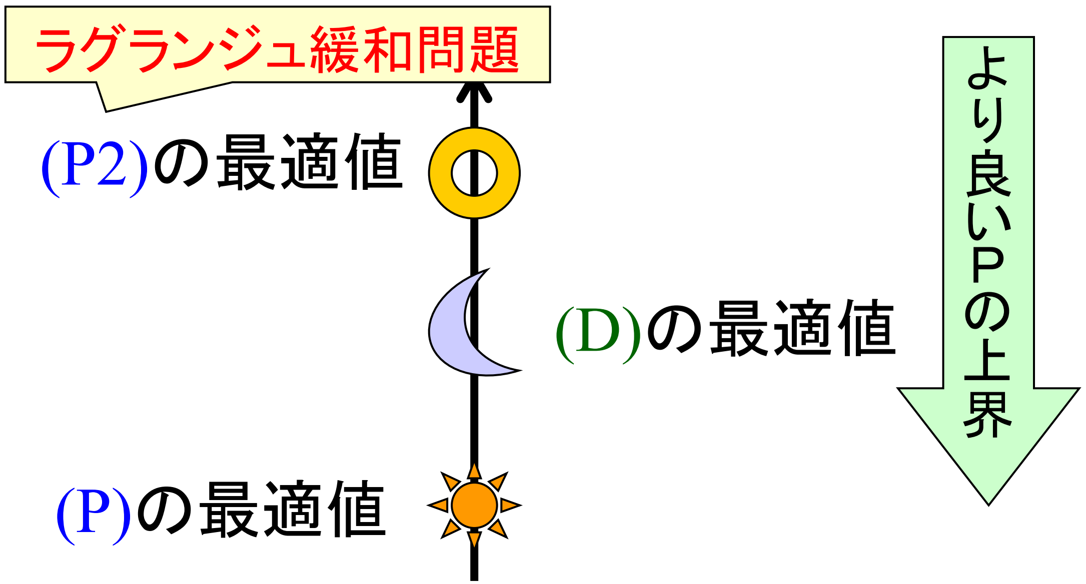
(P)

$$
\begin{array}{ll}
\max & 6x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \le 70 \\
& 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

双対

(D)

$$
\begin{array}{ll}
\min. & 70y_1 + 180y_2 \\
\text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \ge 6 \\
& y_1 + 4y_2 \ge 4 \\
& y_1,\ y_2 \ge 0
\end{array}
$$



練習1

ラグランジュ緩和問題を経由し，
(D)の双対問題が(P)になることを確認せよ

(D)

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 4 \\ & y_1,\ y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

⇒

(P)

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

練習2　ラグランジュ緩和問題を経由し双対問題を作ろう

(P)

$$
\begin{array}{lrl}
\text{max.} & -x_1 + 2x_2 & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + \ \ x_2 & \geq 8 \\
 & x_1 + 3x_2 + x_3 & = 9 \\
 & x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

練習2 解答例(1)

(P)

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & -x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 8 \\
& x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$8-(2x_1+x_2) \leqq 0$

$9-(x_1+3x_2+x_3)=0$

$y_1 \leqq 0$に対して

$y_1(8-(2x_1+x_2)) \geqq 0$

y_2（自由変数）に対して

$y_2(9-(x_1+3x_2+x_3))=0$

(P1)

$\leqq$

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & -x_1 + 2x_2 + \underbrace{y_1(8-(2x_1+x_2))}_{\text{非負}} + \underbrace{y_2(9-(x_1+3x_2+x_3))}_{0} \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 8 \\
& x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\
& y_1 \leq 0
\end{aligned}
$$

練習2 解答例(2)

(P1)

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & -x_1 + 2x_2 + y_1(8-(2x_1+x_2)) + y_2(9-(x_1+3x_2+x_3)) \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ & y_1 \leq 0 \end{array}$$

ラグランジュ緩和(Lagrange Relaxation)

(P2)

$\leqq$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & -x_1 + 2x_2 + y_1(8-(2x_1+x_2)) + y_2(9-(x_1+3x_2+x_3)) \\ \text{s.t.} & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ & y_1 \leq 0 \end{array}$$

ラグランジュ緩和問題

練習2 解答例(3)

ラグランジュ緩和問題

$$\begin{aligned} \text{max.}\quad & -x_1 + 2x_2 + y_1(8-(2x_1+x_2)) + y_2(9-(x_1+3x_2+x_3)) \\ \text{s.t.}\quad & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ & y_1 \leq 0 \end{aligned}$$

整理

非有界にならないための条件

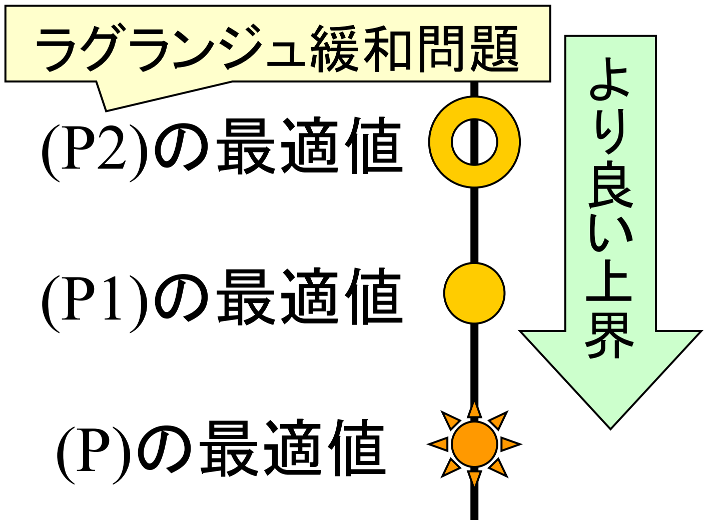
$-1-2y_1-y_2 \leqq 0$　　$2-y_1-3y_2 \leqq 0$　　$-y_2 \leqq 0$

$$\begin{aligned} \text{max.}\quad & (-1-2y_1-y_2)x_1 + (2-y_1-3y_2)x_2 + (-y_2)x_3 + 8y_1 + 9y_2 \\ \text{s.t.}\quad & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ & y_1 \leq 0 \end{aligned}$$

練習2 解答例(4)

-1-2y_1-y_2≦0　2-y_1-3y_2≦0　-y_2≦0　小さくしたい

$$
\begin{array}{ll}
\text{max.} & (-1-2y_1-y_2)x_1+(2-y_1-3y_2)x_2+(-y_2)x_3+8y_1+9y_2 \\
\text{s.t.} & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\
 & y_1 \leq 0
\end{array}
$$



より良い上界を求める問題(D)

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & 8y_1+9y_2 \\
\text{s.t.} & -1-2y_1-y_2 \leq 0 \\
 & 2-y_1-3y_2 \leq 0 \\
 & -y_2 \leq 0 \\
 & y_1 \leq 0
\end{array}
$$

練習2 解答例(5)

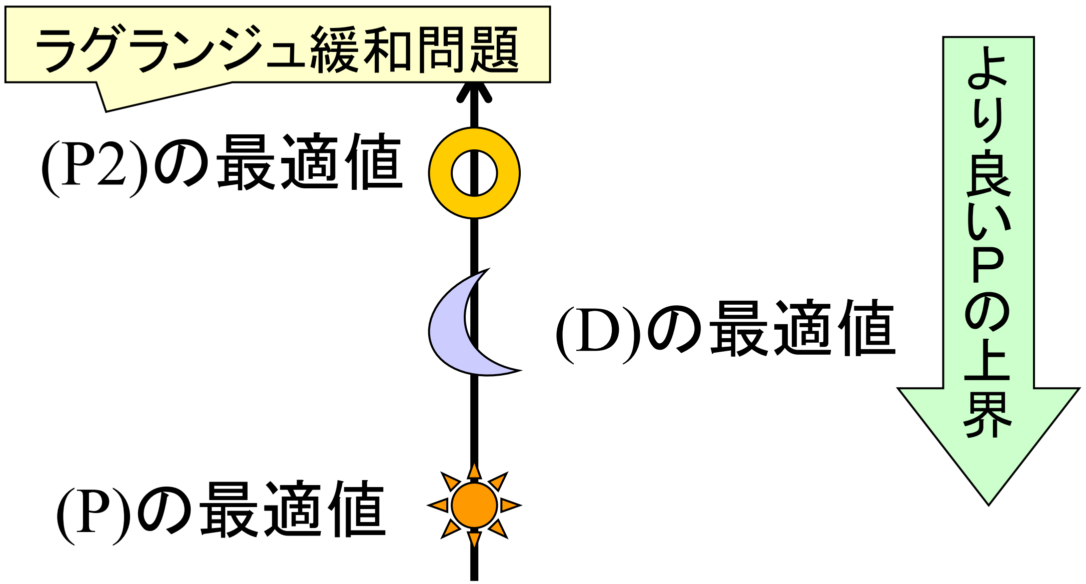
(P)

$$
\begin{array}{llr}
\text{max.} & -x_1 + 2x_2 & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + \ \ x_2 & \geq 8 \\
 & x_1 + 3x_2 + x_3 & = 9 \\
 & x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

双対

(D)

$$
\begin{array}{llr}
\text{min.} & 8y_1 + 9y_2 & \\
\text{s.t.} & 2y_1 + \ \ y_2 & \geq -1 \\
 & y_1 + 3y_2 & \geq 2 \\
 & y_1 & \leq 0 \\
 & y_2 & \geq 0
\end{array}
$$



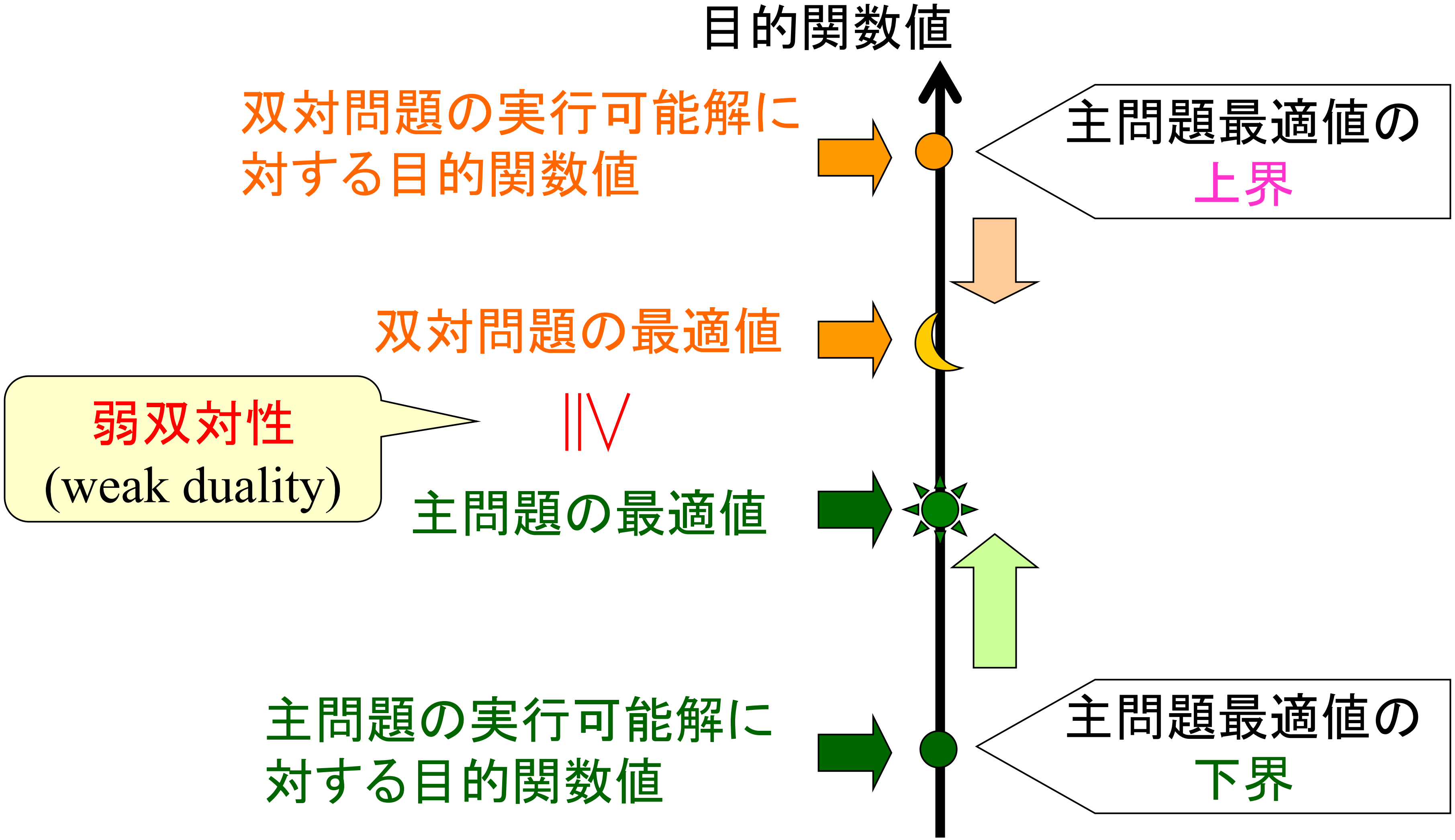
ワーク3　ラグランジュ緩和問題を経由し双対問題を作ろう

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\ & z = 6x_1 + 5x_2 \\
\text{s.t.}\ & 3x_1 + x_2 \leqq 45 \\
& x_1 + 2x_2 \leqq 40 \\
& x_1,\ x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

ワーク4　ラグランジュ緩和問題を経由し双対問題を作ろう

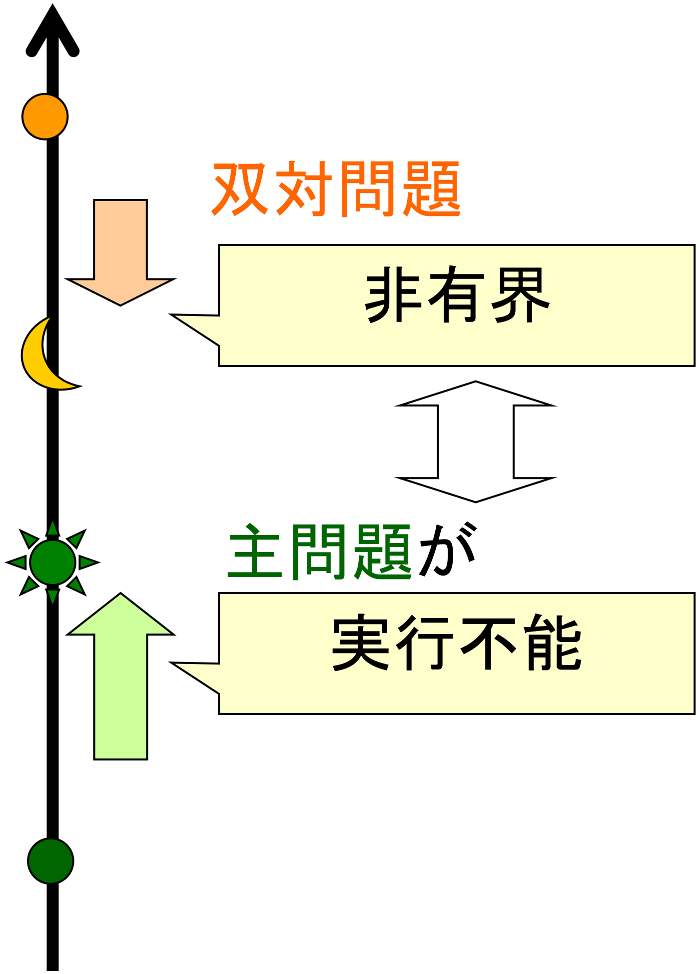
$$\begin{aligned}
\text{min. } & z = 500x_1 + 600x_2 \\
\text{s.t. } & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}$$

主問題と双対問題の関係(1)

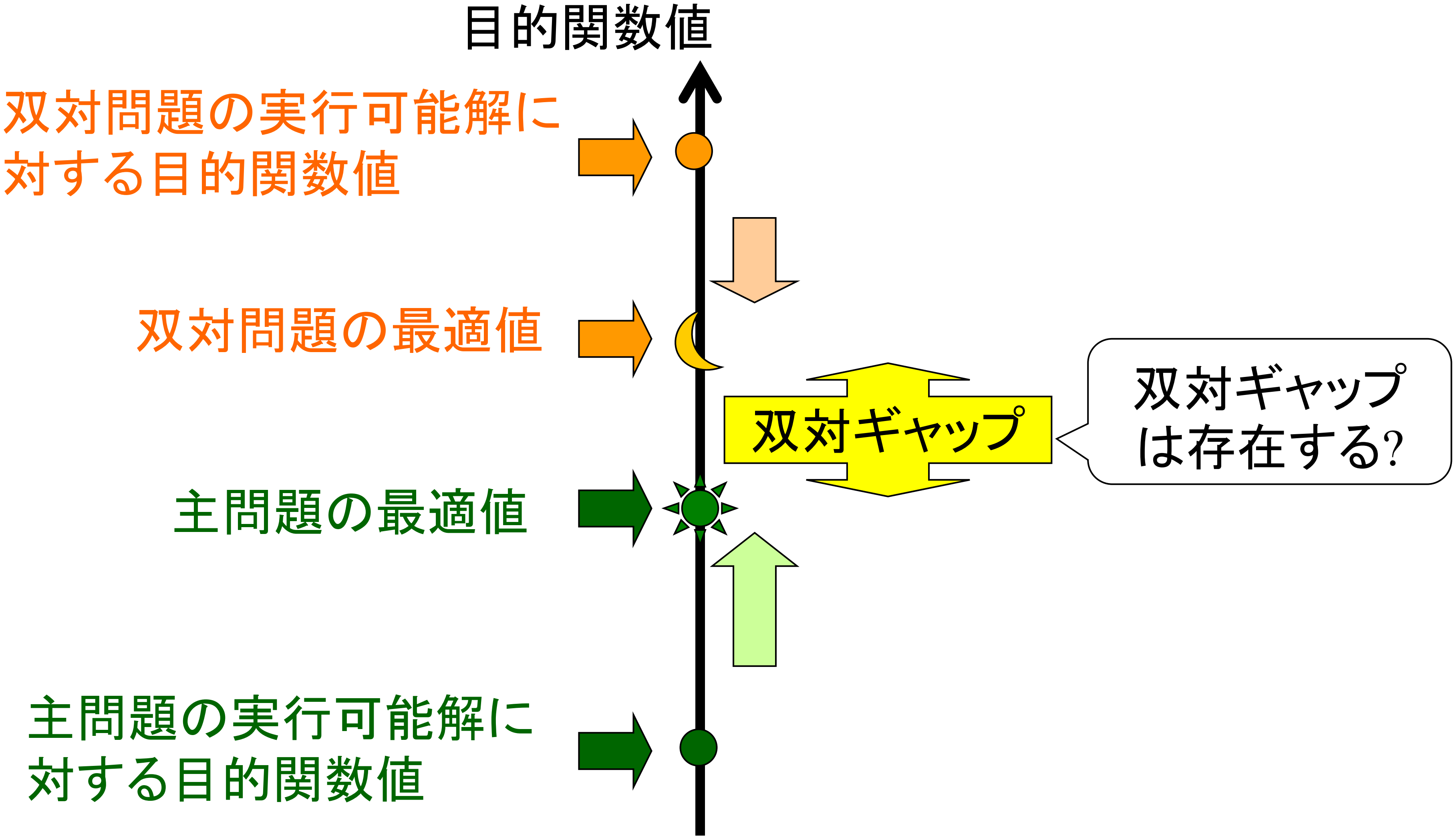


主問題と双対問題の関係(2)

どの組合せがあり得る?			双対問題		
			実行可能		実行不能
			最適解	非有界	
主問題	実行可能	最適解		×	×
		非有界	×	×	
	実行不能		×		



主問題と双対問題の関係(3)



主問題と双対問題の関係(4)

シンプレクス法で最適解と最適値を導出

主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \le 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	4/5	−2/5	20
x2	0	0	1	−3/5	2/5	30
z	1	0	0	12/5	2/5	240

双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + 3y_2 \ge 6 \\ & y_1 + 4y_2 \ge 4 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

基底変数	(−z)	y1	y2	s1	s2	定数項
y1	0	1	0	−4/5	3/5	12/5
y2	0	0	1	1/5	−2/5	2/5
(−z)	1	0	0	20	30	−240

主問題の最適値⇔双対問題の最適値

主(双対)問題の最適解⇔双対(主)問題の限界価値

偶然？

主問題	双対問題
$\max.\ \mathbf{c}^t\mathbf{x}$	$\min.\ \mathbf{b}^t\mathbf{y}$
s.t. $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$	s.t. $\mathbf{A}^t\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

LPでの主問題と双対問題の重要な関係

◆（主問題の最適値）＝（双対問題の最適値）

（双対ギャップ）＝0

強双対性
(strong duality)

強双対性から得られる性質

$$\begin{aligned}&\min.\ (70-2x_1-x_2)y_1+(180-3x_1-4x_2)y_2+6x_1+4x_2\\&\text{s.t.}\quad x_1,x_2\ge 0,\ \ y_1,y_2\ge 0\end{aligned}$$

$$(70-2x_1-x_2)y_1+(180-3x_1-4x_2)y_2=0$$

(P)

$$\begin{aligned}\max\quad & 6x_1+4x_2\\ \text{s.t.}\quad & 2x_1+x_2\le 70\\ & 3x_1+4x_2\le 180\\ & x_1,x_2\ge 0\end{aligned}$$

強双対性

双対ギャップ=0

相補性条件

(D)

$$\begin{aligned}\min.\quad & 70y_1+180y_2\\ \text{s.t.}\quad & 2y_1+3y_2\ge 6\\ & y_1+4y_2\ge 4\\ & y_1,\ y_2\ge 0\end{aligned}$$

$$(6-2y_1-3y_2)x_1+(4-y_1-4y_2)x_2=0$$

$$\begin{aligned}&\max\quad (6-2y_1-3y_2)x_1+(4-y_1-4y_2)x_2+70y_1+180y_2\\&\text{s.t.}\qquad x_1,x_2\ge 0,\ \ y_1,y_2\ge 0\end{aligned}$$

ラグランジュ緩和問題

相補性条件

(Complementary slackness condition)

x_1,x_2が(P)の実行可能解，y_1,y_2が(D)の実行可能解

$$\boxed{\begin{aligned}(70-2x_1-x_2)y_1+(180-3x_1-4x_2)y_2&=0\\(6-2y_1-3y_2)x_1+(4-y_1-4y_2)x_2&=0\end{aligned}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}(70-2x_1-x_2)y_1&=0\\(180-3x_1-4x_2)y_2&=0\\(6-2y_1-3y_2)x_1&=0\\(4-y_1-4y_2)x_2&=0\end{aligned}}$$

条件に余裕

↓

対応双対変数＝0

x_1,x_2が(P)の最適解 ⟷ y_1,y_2が(D)の最適解

双対定理

- 主問題に有界な最適解が存在
- 双対問題にも有界な最適解が存在
- それぞれの目的関数値は一致

相補性条件

●双対問題が主問題の最適解の証拠を提供

●双対問題から間接的に主問題の情報把握

●最適化アルゴリズムの開発に応用

ワーク5　双対問題を解き最適解を求めよう

$$
\begin{aligned}
\text{min. } & z = 500x_1 + 600x_2 \\
\text{s.t. } & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

演習

粉製品P,Q,Rは職人A,Bの手作業で完成する.

（例：製品P1kgは，職人Aが3h，職人Bが2h加工し完成）

(1) 利益を最大にする生産計画を求める問題を定式化せよ.

(2) 双対問題を作成せよ.

(3) 双対変数の単位を明示せよ.

(4) 双対変数の意味を自由に発想し，双対問題を解釈せよ.

	製品P 1kg	製品Q 1kg	製品R 1kg	労働制限
職人A	3時間	2時間	4時間	40時間/週
職人B	2時間	4時間	3時間	42時間/週
利益	8千円	7千円	10千円	

さて，この後は

- 双対定理を利用したアルゴリズム開発
  - ネットワーク計画
- 緩和を用いたアルゴリズムの開発
  - 整数計画問題