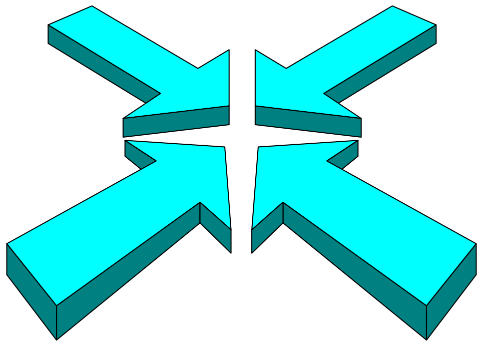
Graph Theory

点と線で表現する

点と線で表現する



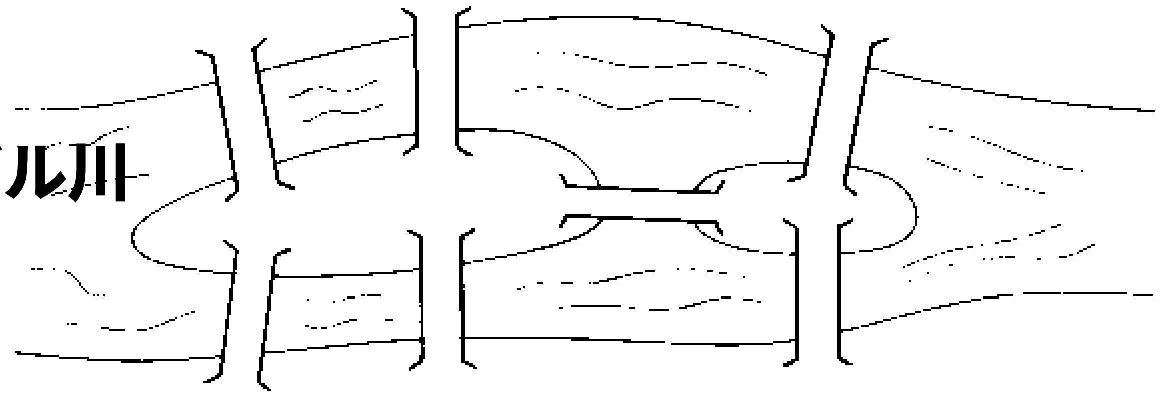
本質的に点と線で表現できるシステムは多い

- 例えば?

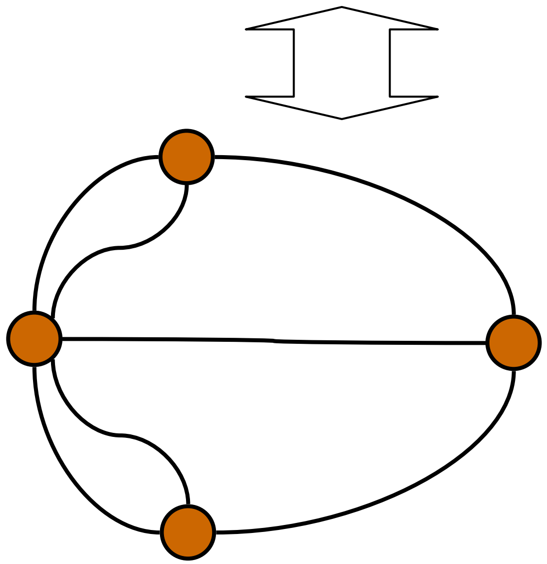
- 昔から考察の対象
→グラフ理論の発生, ネットワーク計画
→OR：モデル表現の大きな柱

グラフ

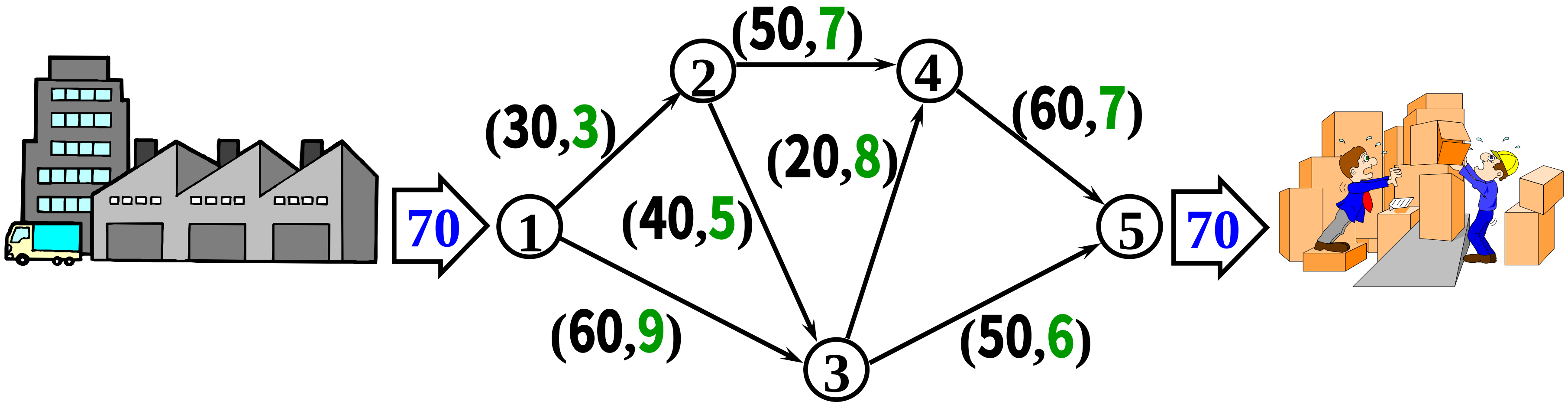
プレーゲル川



Konigsbergの橋



ネットワーク



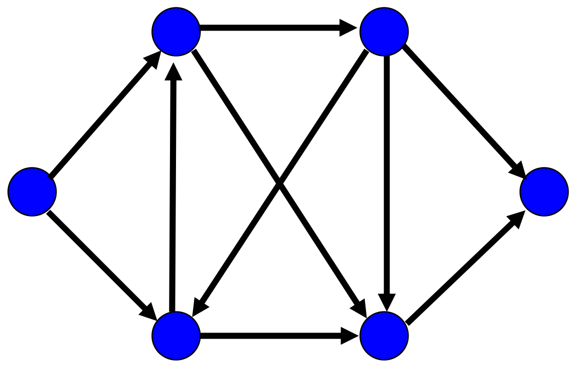
(道路の許容台数,1台当たりの通行料)

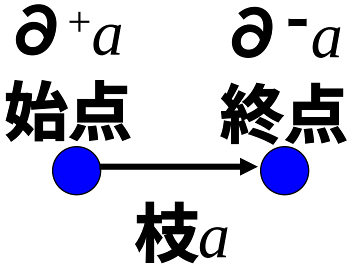
グラフとは

- 点集合 V
- 枝集合 A
- 写像 $\partial^+, \partial^- : A \to V$

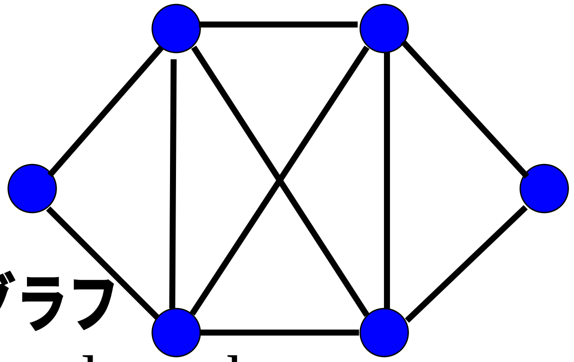
とからなる複合概念

$G=(V, A ; \partial^+, \partial^-)$

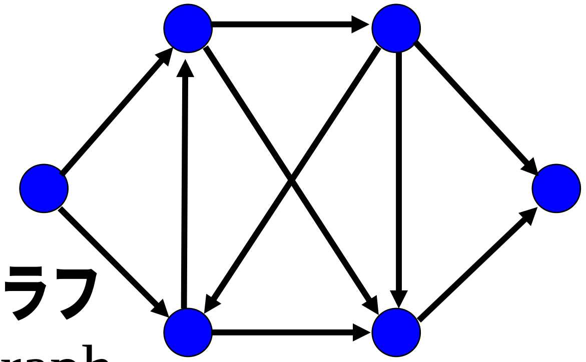




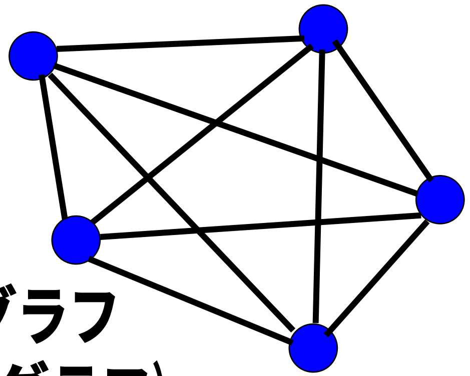
グラフの種類



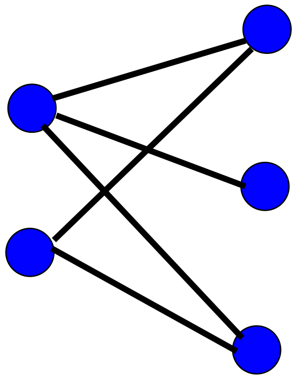
無向グラフ
undirected graph



(有向) グラフ
directed graph

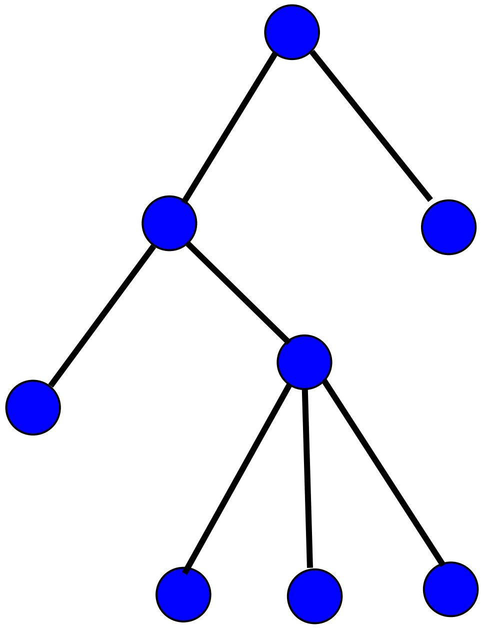


完備グラフ
(完全グラフ)
complete graph

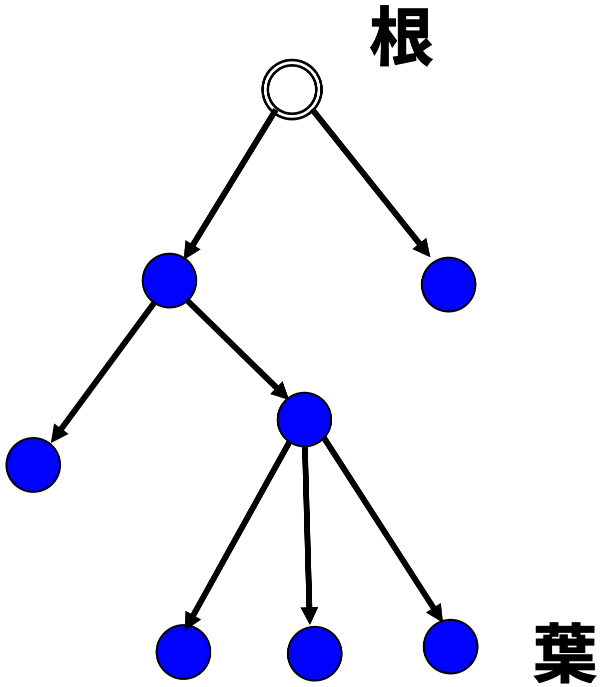


2**部グラフ**
bipartite graph

グラフの種類 (2)



木
tree



有向木
Directed tree

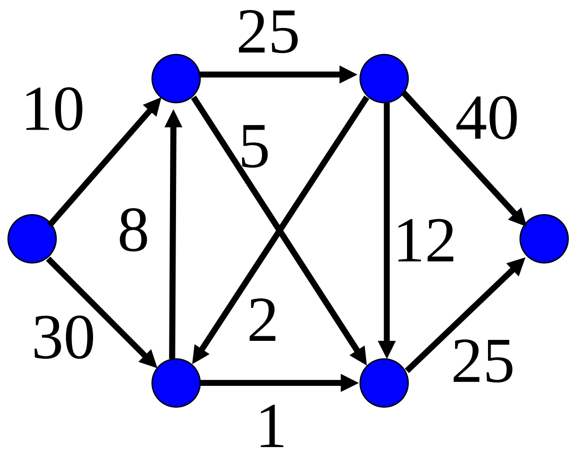
ネットワークとは

グラフの点や枝に情報が付与されたもの

(例)

各枝に距離dが与えられたグラフはネットワーク

N=(G=(V,A; ∂^+ , ∂^-) ,d)



演習4-1 身近なグラフ,ネットワーク

- グラフまたはネットワークで表現できる身近な社会現象, 社会システムをいくつか挙げてみよう.
  - 物理的なネットワーク (例えば鉄道網など) 以外の例をなるべく考えてみよう.
- 具体的にグラフ, ネットワークで表現してみよう.

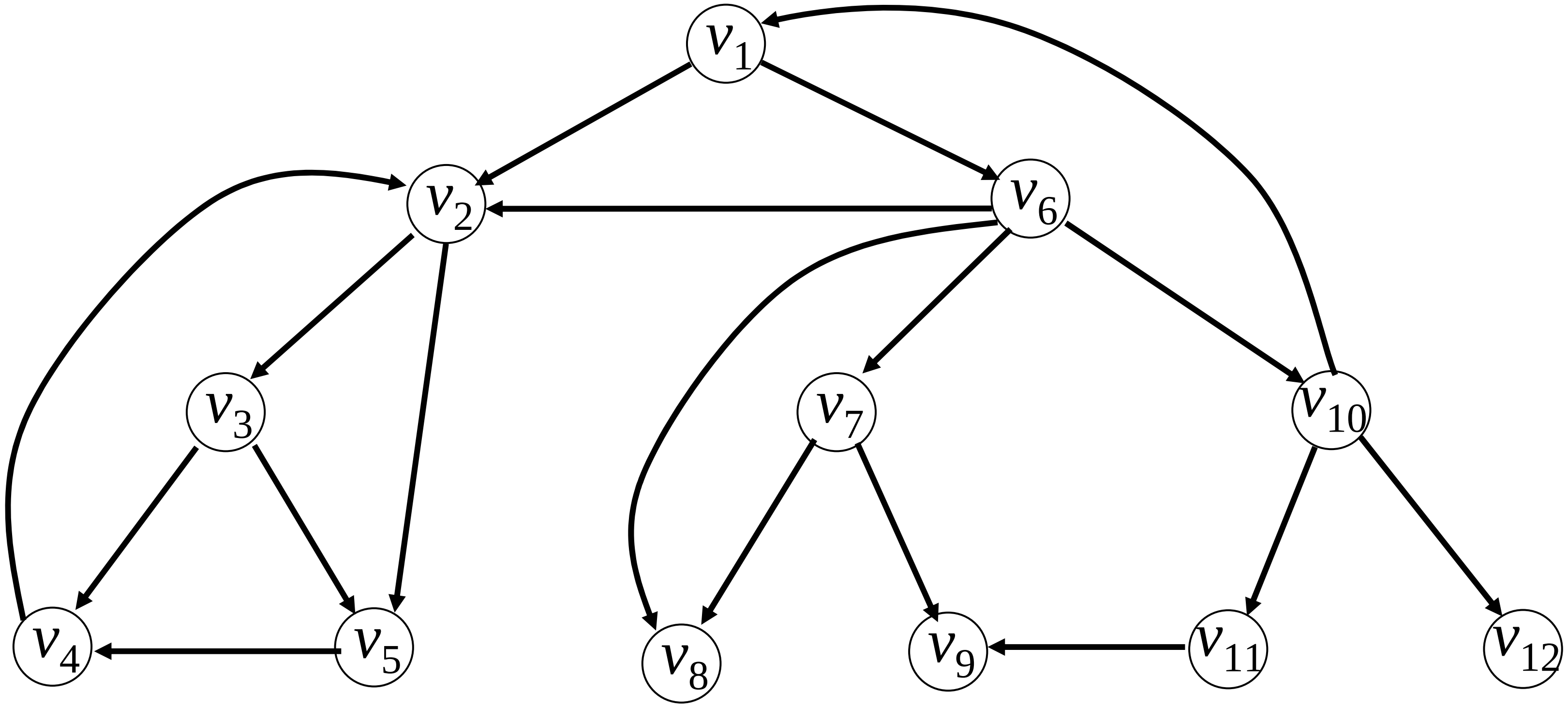
グラフ上の基本的な操作

グラフ，ネットワークで表現されたシステムを扱うために必要な基本的な技．

- グラフの探索
  - 幅優先探索
  - 奥優先探索
- グラフを表現する
  - 隣接行列
  - 接続行列
  - リスト表現
- グラフを分解する
  - 連結成分分解（無向グラフ）
  - 強連結成分分解（有向グラフ）

グラフの探索

グラフ上のすべての点と枝を走査すること



グラフの効率の良い探索方法

- 奥優先探索
  Depth-first search

- 幅優先探索
  Breadth-first search

Step1: 出発点にラベルを付ける

以下のStep2, 3を未探索辺がなくなるまで繰り返す.

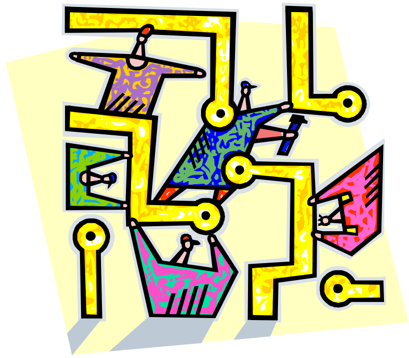
Step2: <u>最新ラベルを持つ点</u>から未探索辺を走査する.

Step2: <u>最も早いラベルを持つ点</u>から未探索辺を走査する.

Step3: 走査した未探索辺の終点にラベルが付いていなかったらラベルを付ける.

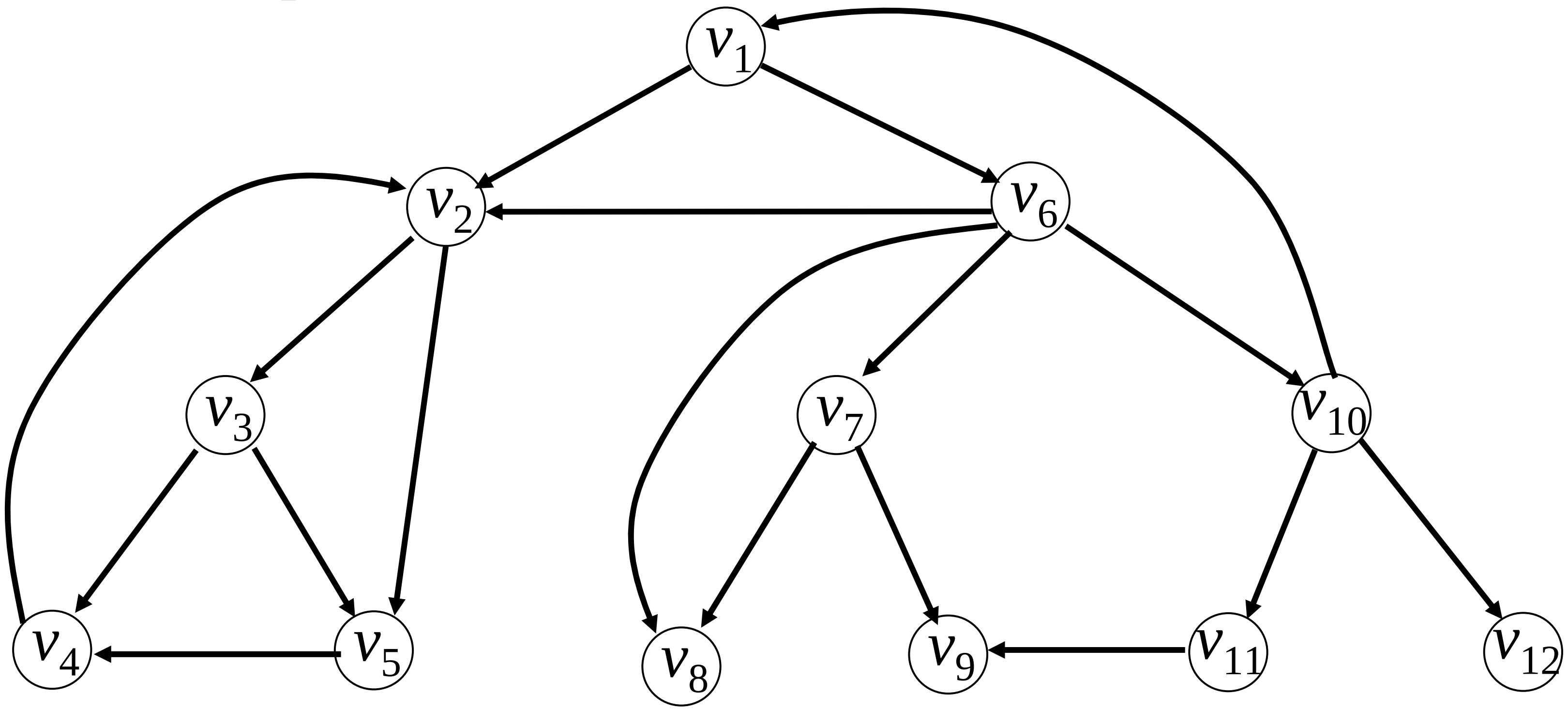
探索木

- 探索木：探索中に点にラベルを付ける原因となった枝の集まり
  - 出発点を根とする全張有向木になっている．（どうして？）
- 探索木は有用な情報を与えてくれる



練習4-1 奥優先探索をしてみよう

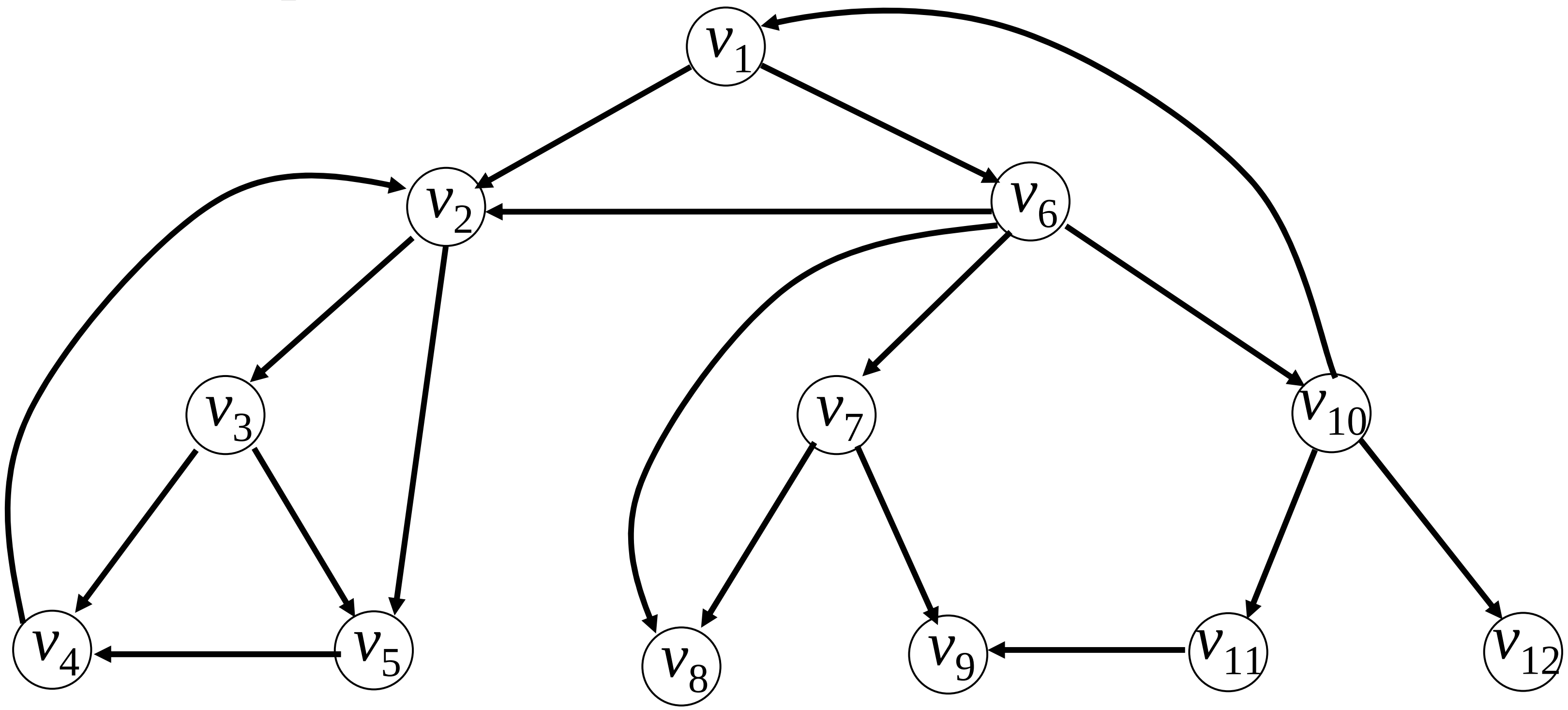
出発点：v_1



探索木は?

練習4-2 幅優先探索をしてみよう

出発点：v_1



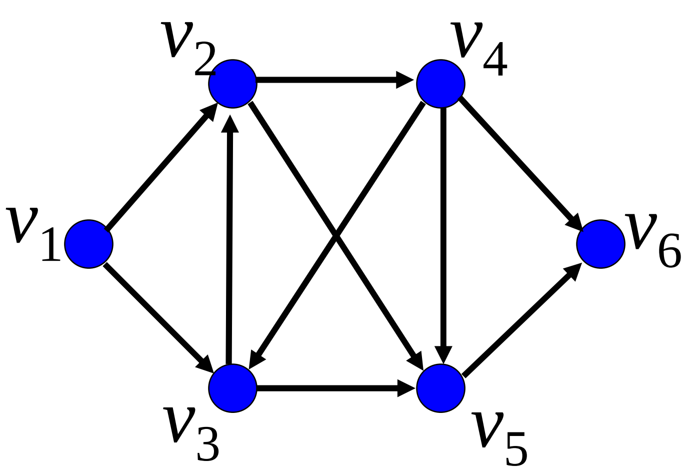
探索木は?

探査木利用 点への順序付け

- 前順(先行順：pre order)
  - ラベルと同時に番号付け
- 後順(後行順：post order)
  - 親の点に戻るときに番号付け

他にも
中間順 (in order)
幅優先順 (breadth-first order)
などがある

演習4-2 グラフの探索



出発点：v_1として右のグラフを以下の方法で探索せよ．

⑴ 奥優先探索
⑵ 幅優先探索

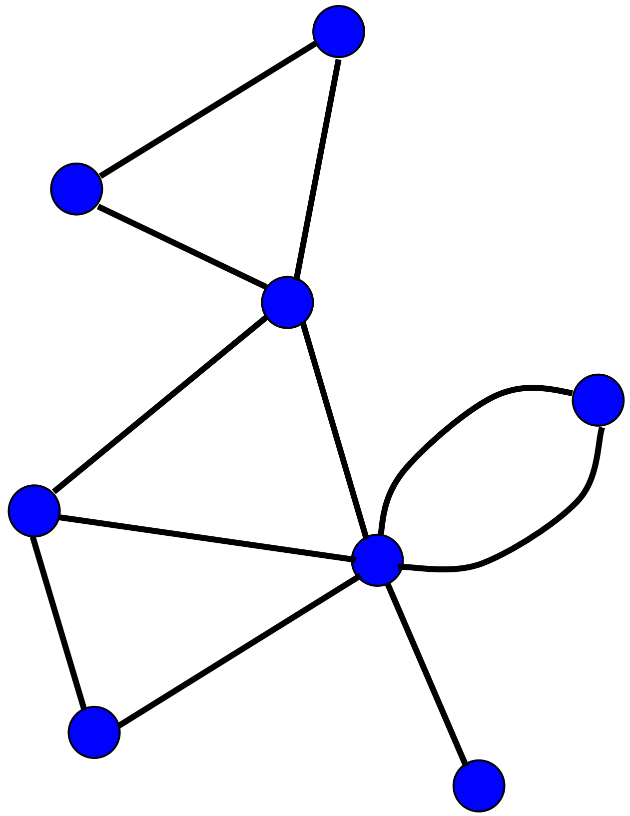
また，各々の探索木を示せ．

⑶ 奥優先探索での探索木を利用し，各点に前順・後順を各々付けてみよう。

グラフの分解

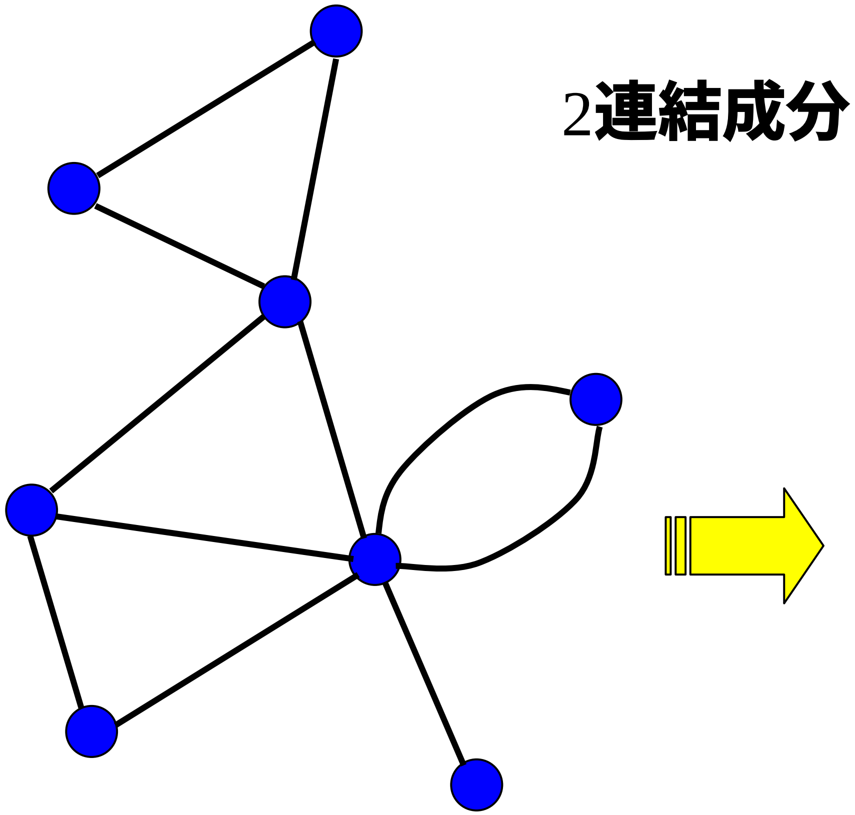
表現されているシステムの
解析に用いる

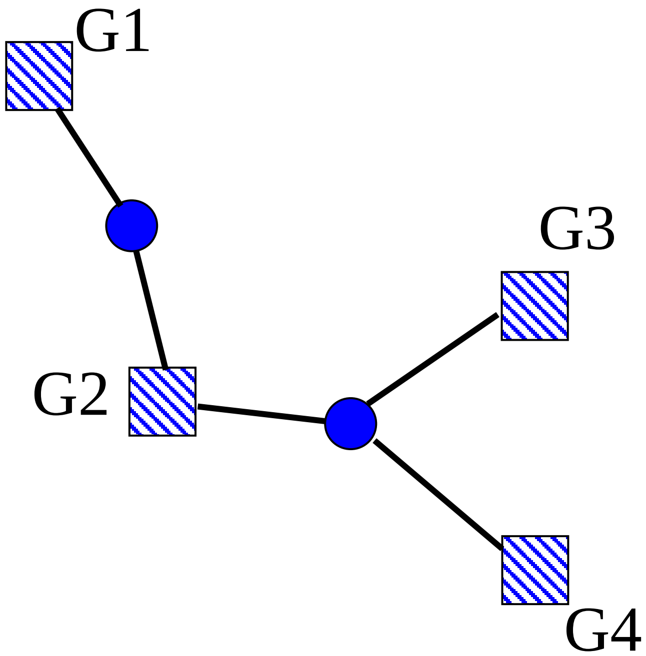
- 道 (path) :接続する点と枝の交互列
- 無向グラフが連結
  ⇔任意の2点間に道が存在
- 点vは関節点
  ⇔連結なグラフから点vを除くと
  非連結になる
- 無向グラフが2連結
  ⇔関節点がないグラフ



無向グラフの2連結成分分解

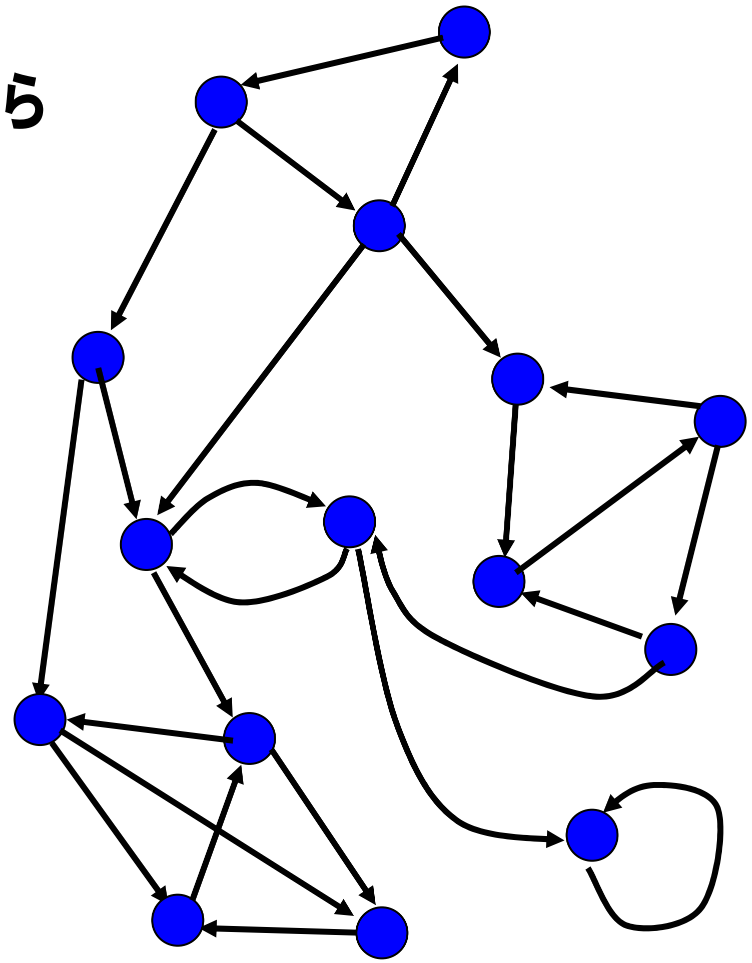
2連結成分：2連結な極大部分グラフ



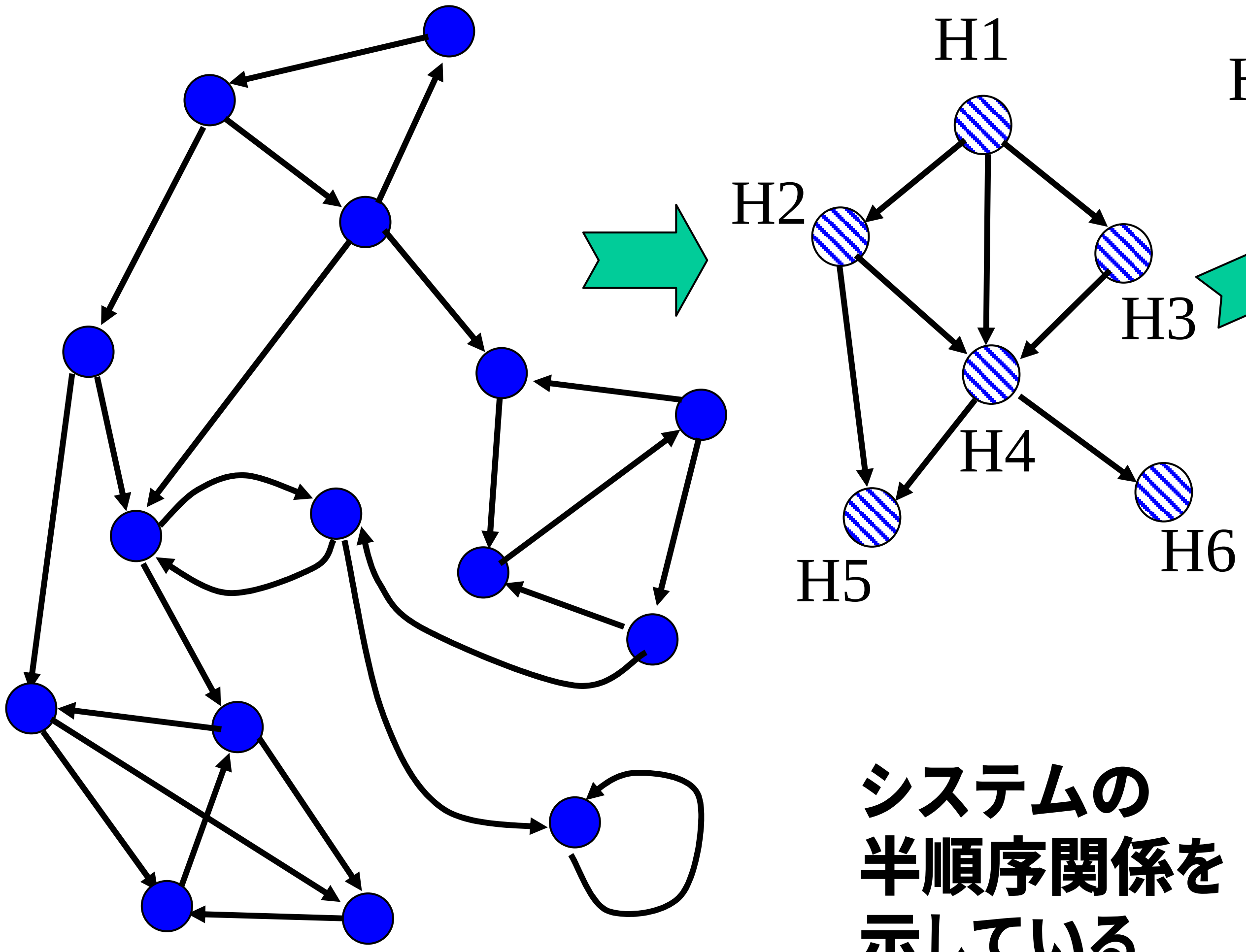


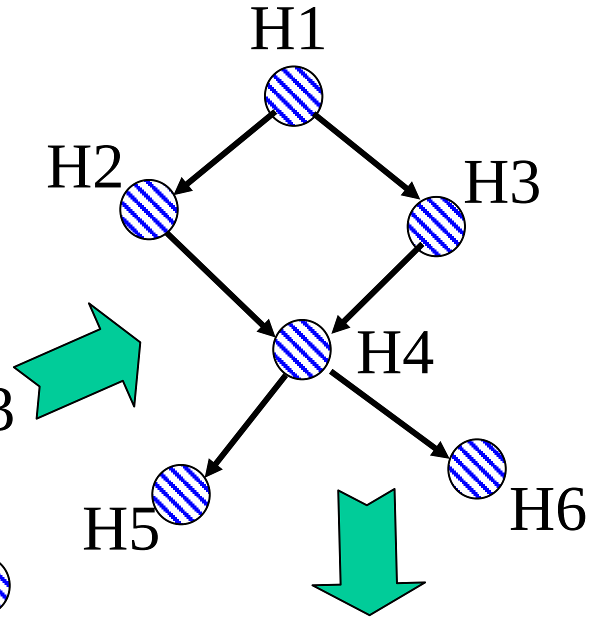
有向グラフの強連結成分分解

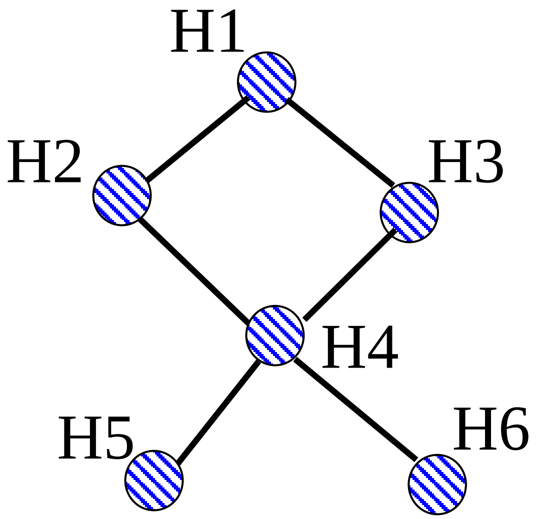
- 有向道：すべて同じ向きの枝から
　　　　できている道
- 有向グラフが強連結
　⇔任意の2点間に両方向の
　　有向道が存在
- 強連結成分
　⇔強連結な極大部分グラフ



Hasse図



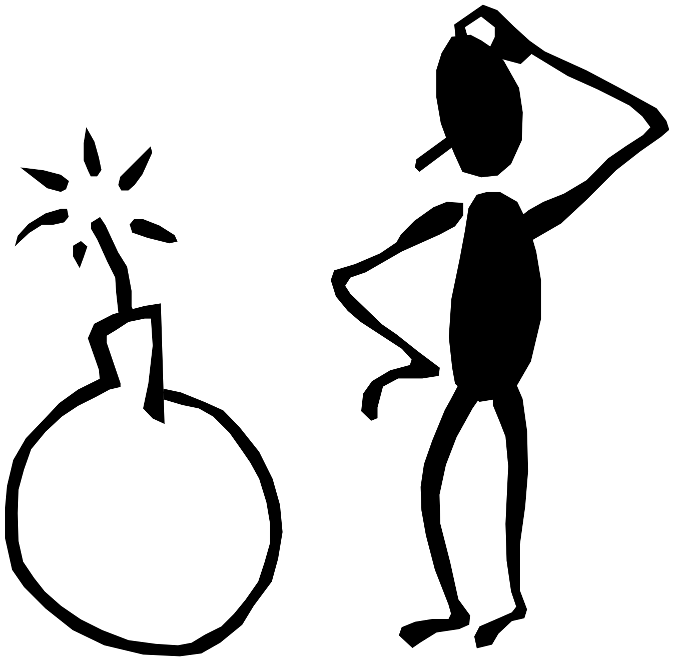




システムの
半順序関係を
示している

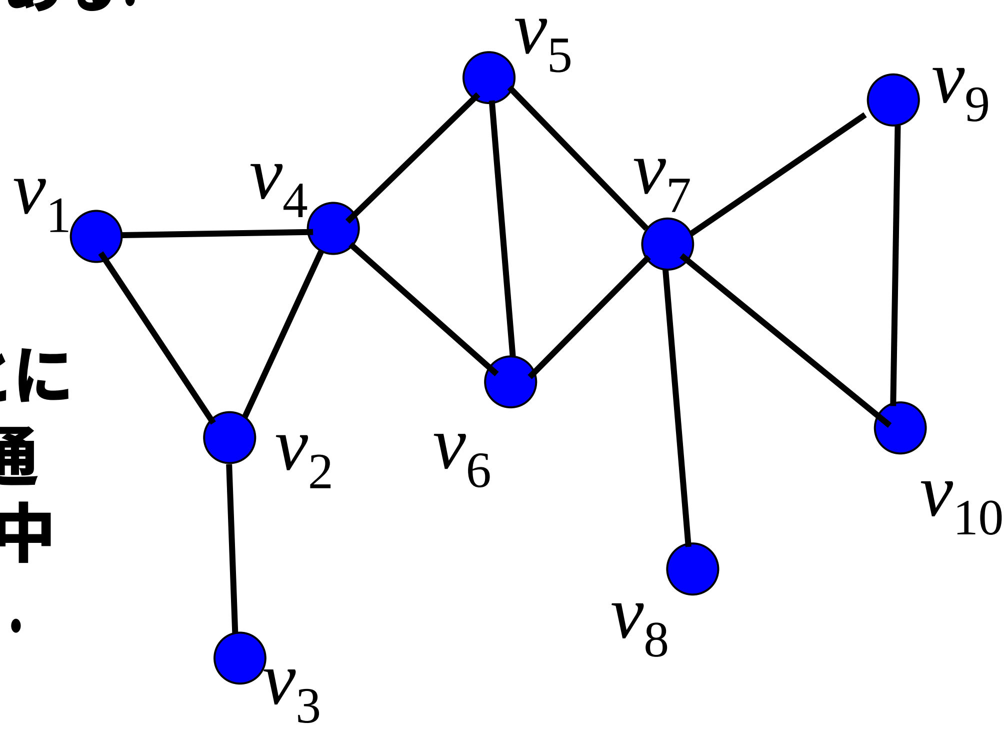
2連結成分, 強連結成分の求め方

- 2連結成分分解, 強連結成分分解共に,
  深さ優先探索を利用し可能
  - より効率的な解法を作ってみよう!!



演習4-3 2連結成分分解

右図のような通信網がある．
点は中継局を示す．

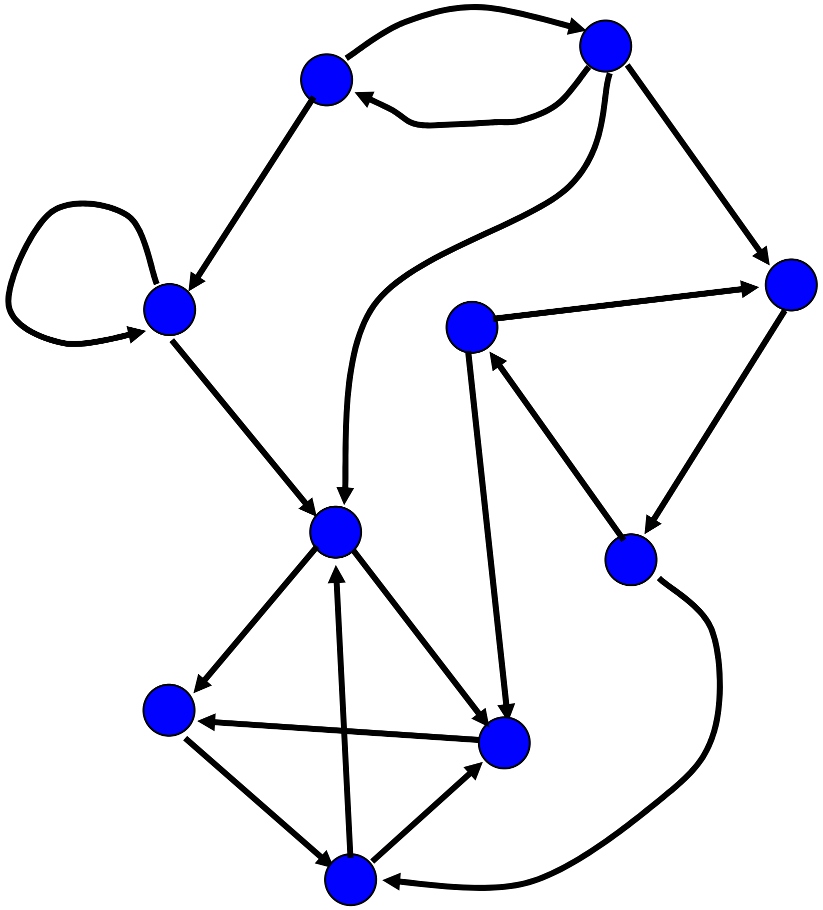


⑴ 機能が停止することにより，他の中継局間の通信にまで影響を及ぼす中継局はどれか指摘せよ．

⑵ 通信の信頼性を高めるためには新たにどのような線をどこに引けばよいか．適切な設置計画を提案せよ．

演習4-4 強連結成分分解

右の有向グラフの
Hasse図を作成しなさい

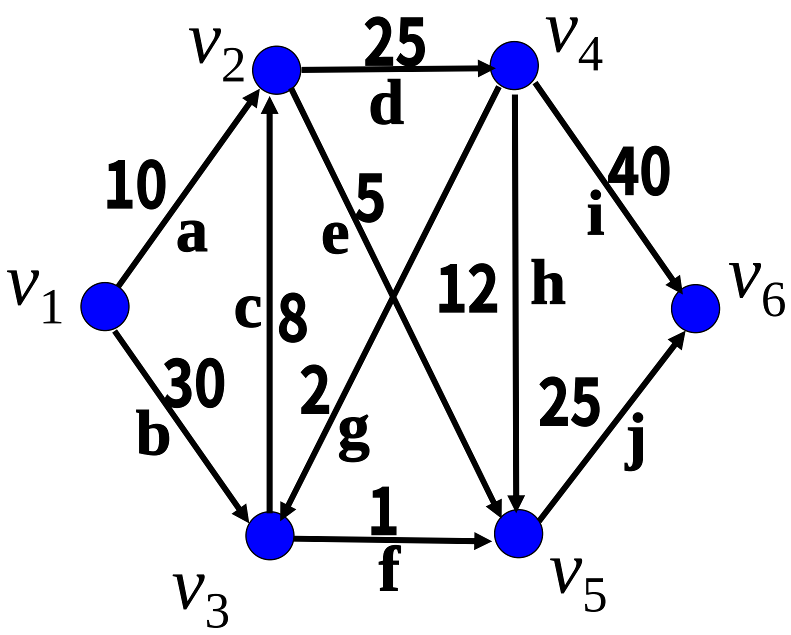


グラフ，ネットワークの表現

表現方法	利点	欠点
描画表現	目での理解容易	計算機不向き 情報伝達曖昧
数値表現	計算機向き 情報伝達確実	目での認識不向き 

- ネットワークのデータ
- 隣接行列での表現
- 接続行列での表現
- リスト表現

ネットワークのデータ

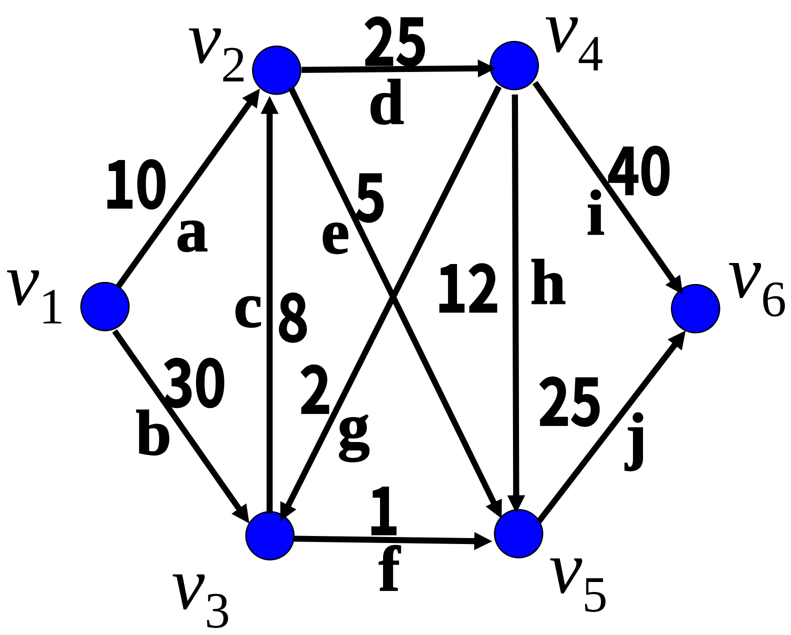


枝のインデクス	始点	終点	付随情報
a	1	2	10
b	1	3	30
c	3	2	8
d	2	4	25
e	2	5	5
f	3	5	1
g	4	3	2
h	4	5	12
i	4	6	40
j	5	6	25

欠点：扱いにくい

隣接行列での表現

- (点数) × (点数) の行列
- 付随情報は別な配列で保持



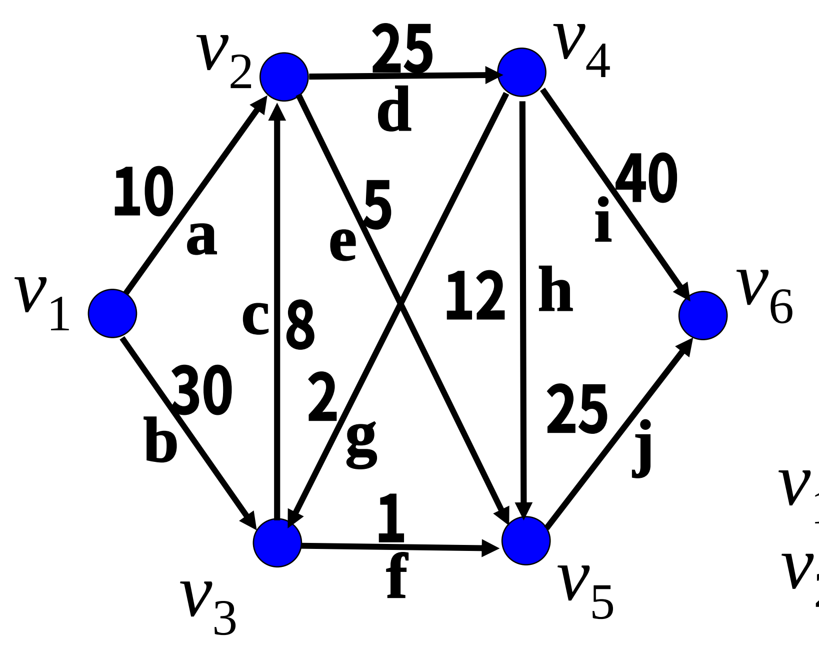
終点

始点

$$
\begin{array}{c}
 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

欠点 並列枝の情報喪失

接続行列での表現



- (点数) × (枝数) の行列
- 付随情報は別な配列で保持

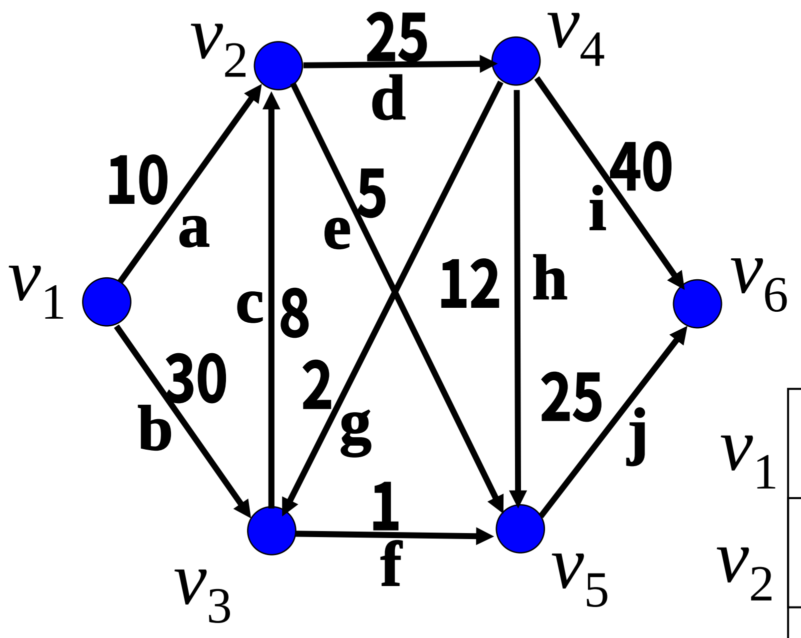
枝

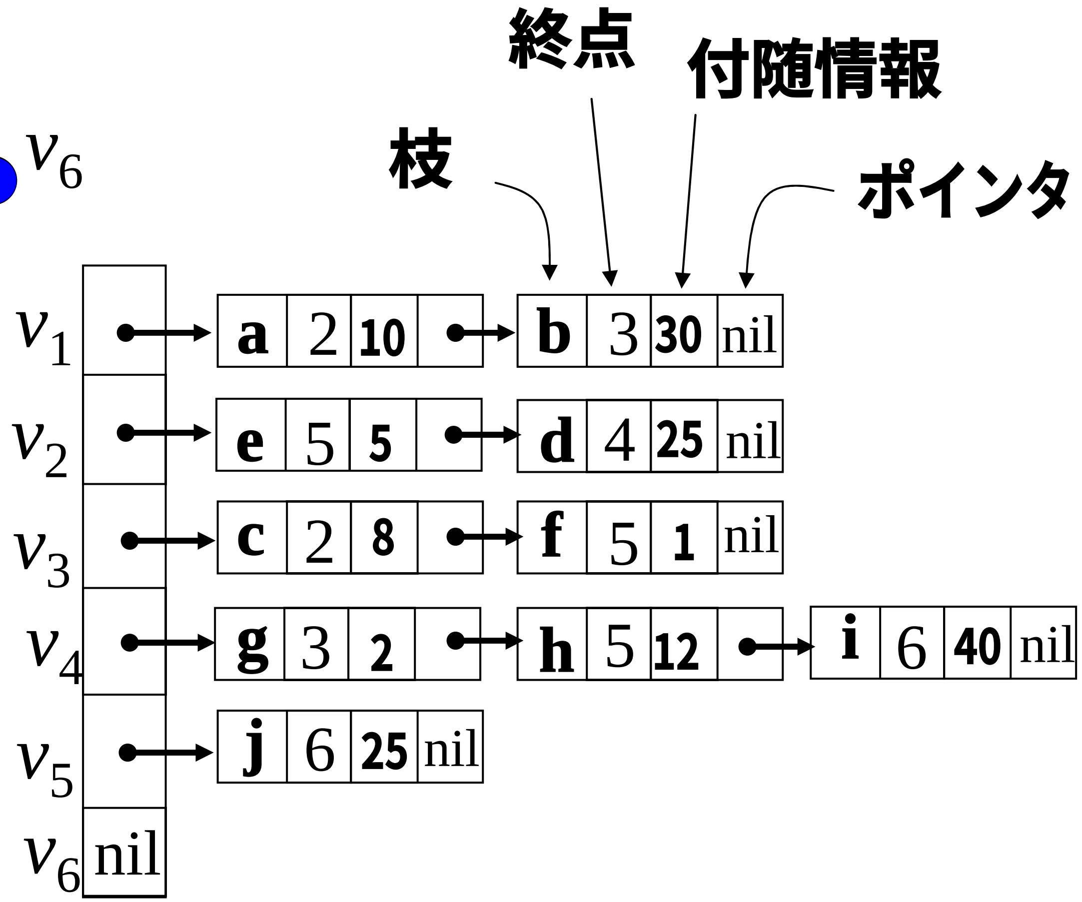
点

$$
\begin{array}{c}
\\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} & \mathbf{g} & \mathbf{h} & \mathbf{i} & \mathbf{j}
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

欠点 自己閉路の情報喪失

リスト表現





長所 メモリの節約
扱いやすい

演習4-5

右のグラフを以下の方法で表現せよ.

⑴ 隣接行列
⑵ 接続行列
⑶ リスト表現

なお, 各表現において不都合が生じる場合は, それがどのような状況でおきるのか考察せよ.