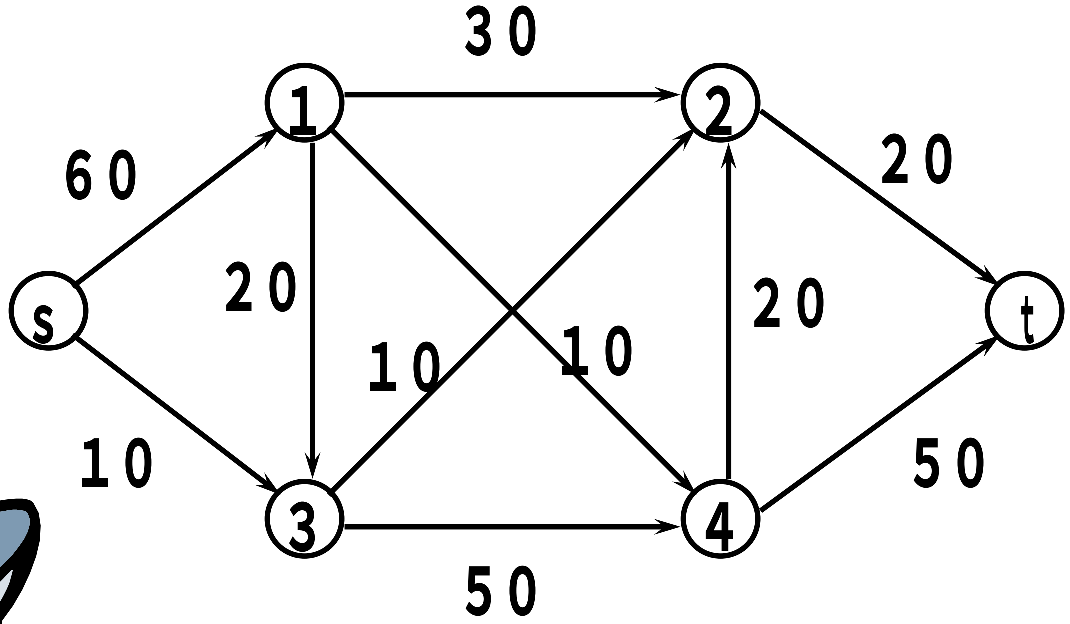
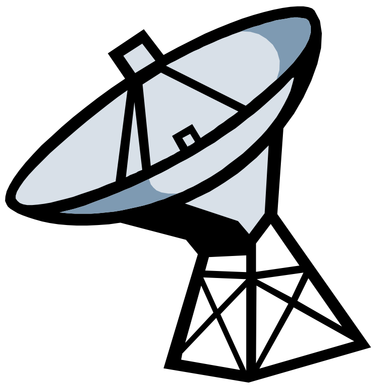
Network Programming III

ものをなるべく多く流す
最大フロー問題

最大フロー問題

通信所sからtまで同時通信できる最大データ量は？





各枝の数字はその枝の同時通信可能容量.

始点sから終点tへのフロー (flow)

容量付きネットワーク上で次の条件を満たす
枝毎の実数値を (実行可能) <u>フロー</u>と呼ぶ.

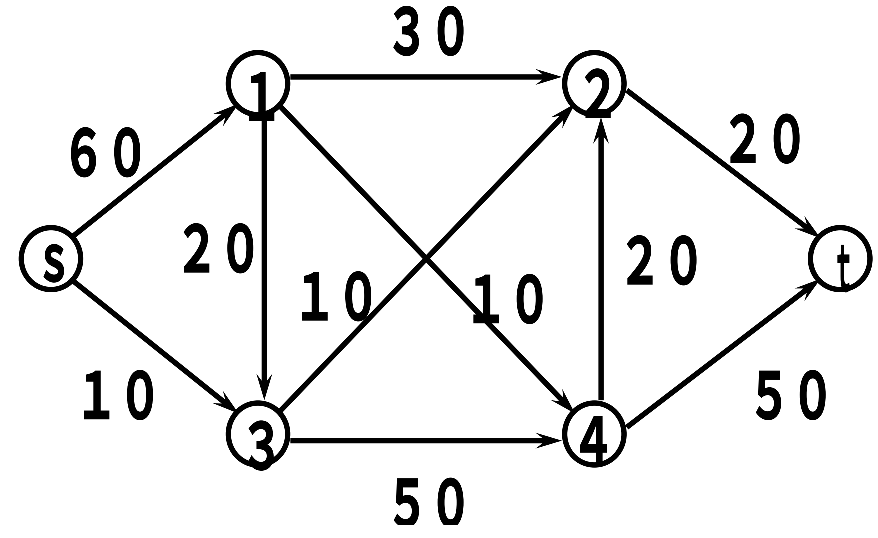
条件1：容量条件

– 各枝のフローは, 0以上, その枝の容量以下.

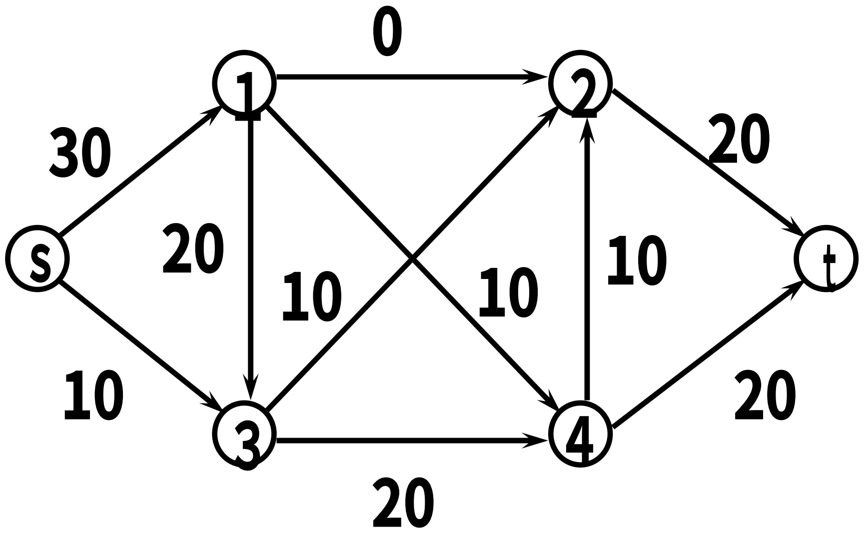
条件2：流量保存則

– 各点において
(流入するフローの和) ＝ (流出するフローの和)

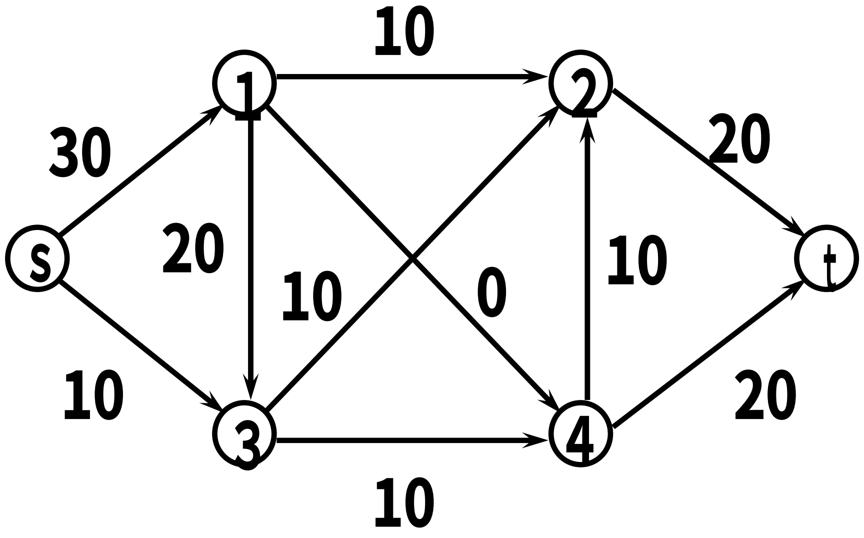
例題7-1 実行可能フロー？

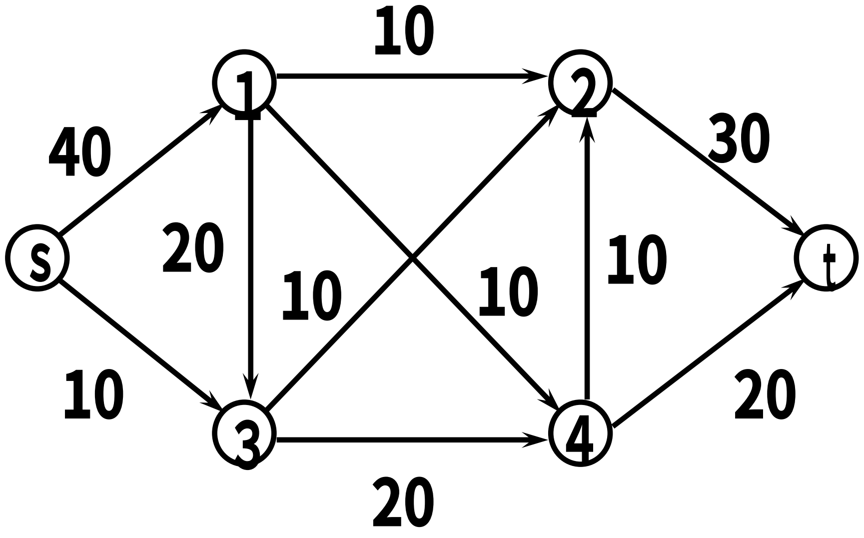


容量付きネットワーク



数字は各枝のフロー





最大フロー問題 (定式化)

- **フローの流量**：
  始点sから流出するフローの和

目的	フローの流量→最大
条件	実行可能フロー

⇦ 最大フロー問題

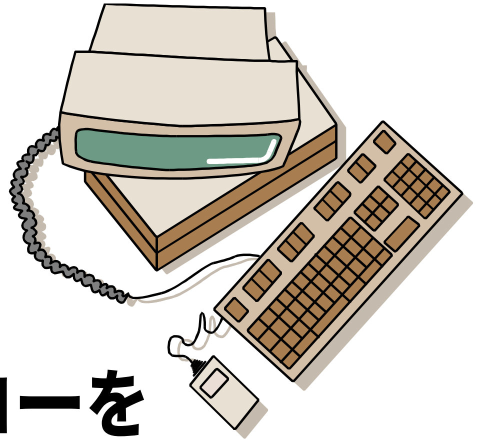
- **最大フロー**：フローの最大流量を達成する実行可能フロー

最大フロー問題の二大基本解法

- 増加道法 (Ford-Fulkerson)
  - 簡単な手順の繰り返し．直感的に妥当性が理解できる．計算時間が多くかかる．

⇩

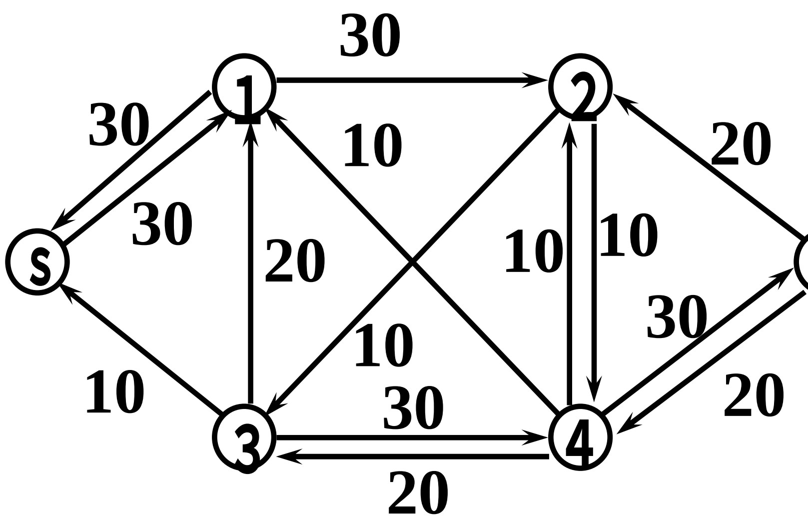
改良：Dinicの解法



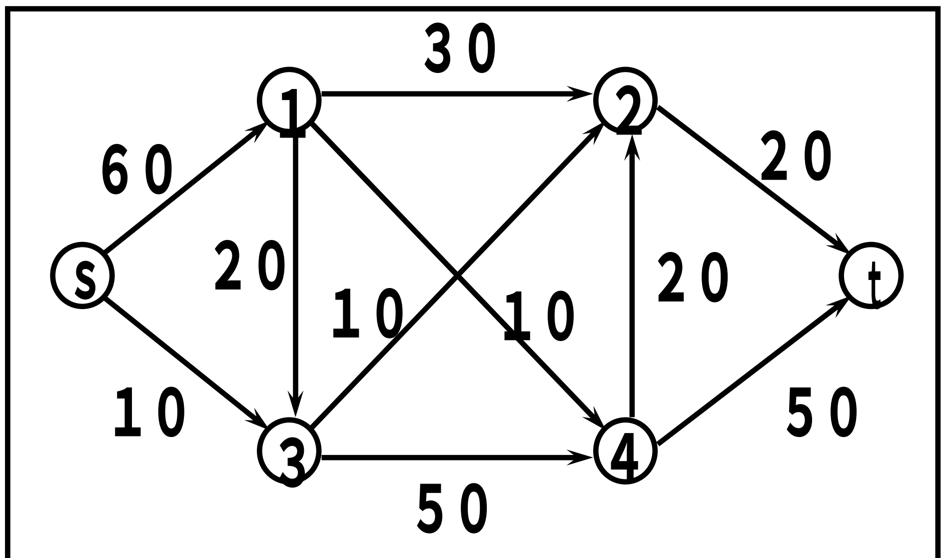
- Preflow-Push解法
  - 工夫を加えることで高速に最大フローを求める．

仮定：ネットワークの容量は整数で与えられる．

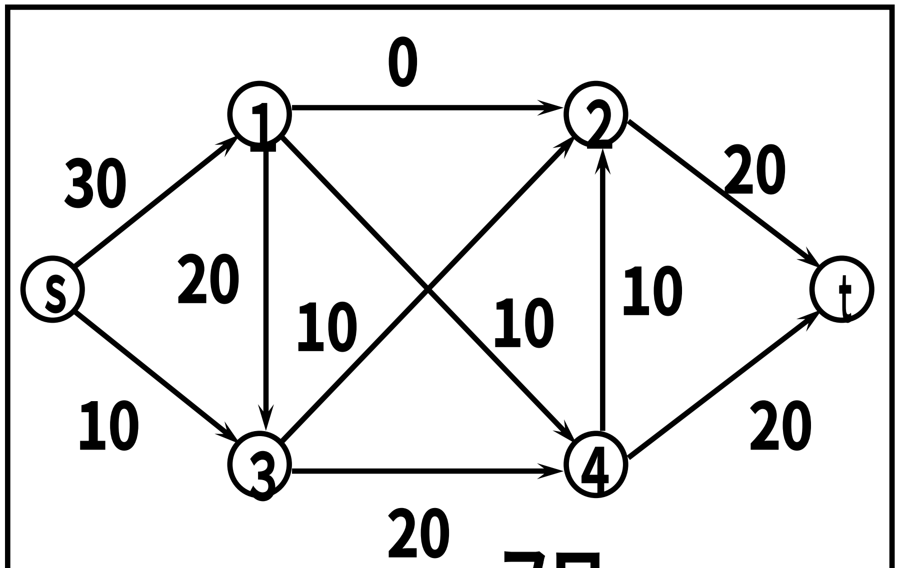
増加道法 (準備)残余ネットワーク



フローに関し
決められる



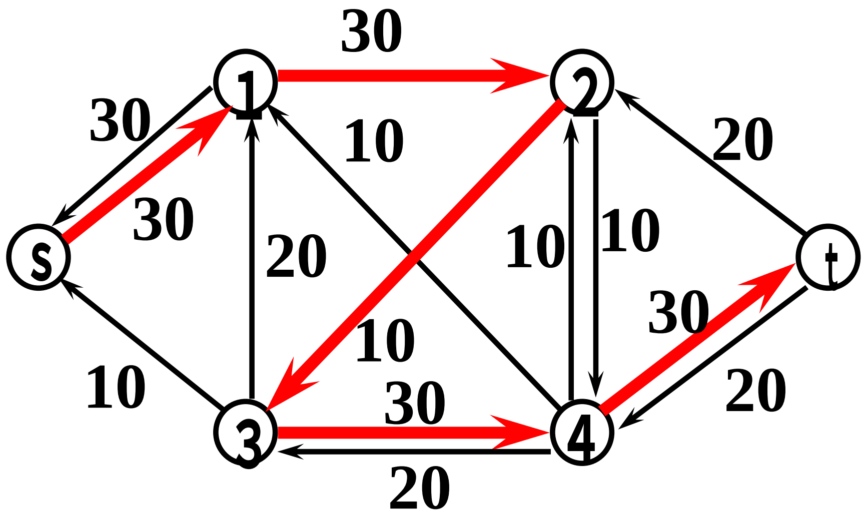
容量付きネットワーク



フロー

増加道法 (準備)増加道

前ページのフローに対する残余ネットワーク



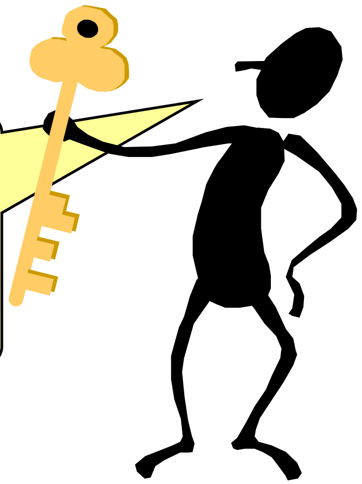
増加道：残余ネットワーク上でのsからtへの(初等的な)有向道

点の繰返しがない

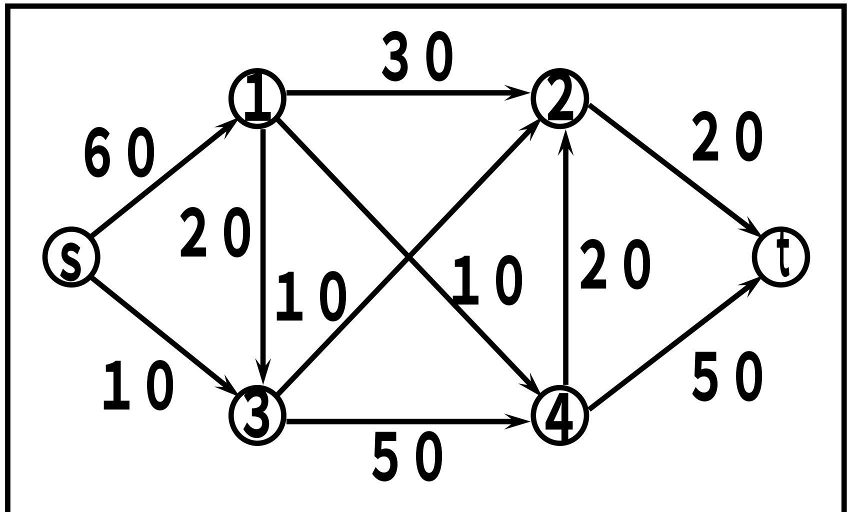
増加道法

- 手順1　各枝のフローを0にする．
- 手順2　**増加道**がある限り以下を繰り返す．
  - 増加道をひとつ見つける．
  - その増加道上の枝容量の最小値分のフローを，残余ネットワーク上で増加道に沿って流す．

残余ネットワーク上で流すので，
実際のネットワーク上ではフロー
が減る枝も出てくることに注意！

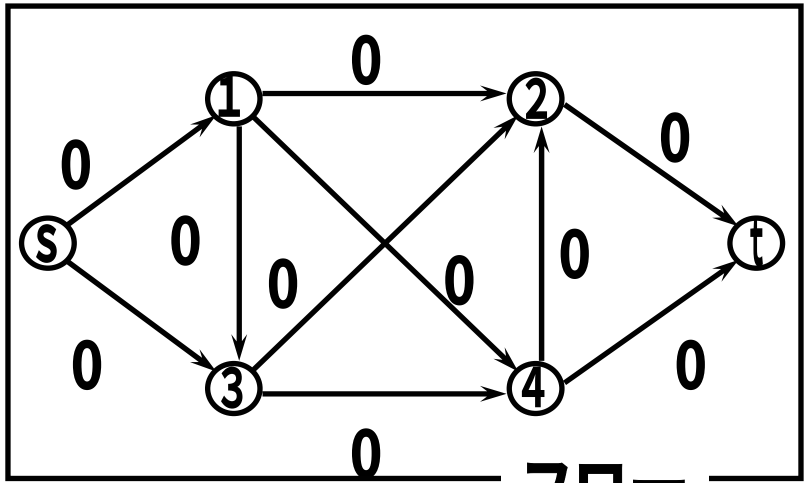


例題7-2
増加道法



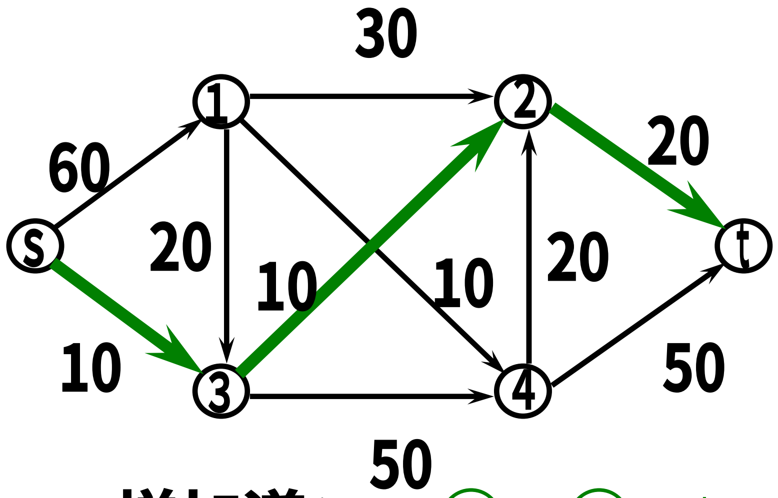
容量付きネットワーク

手順1



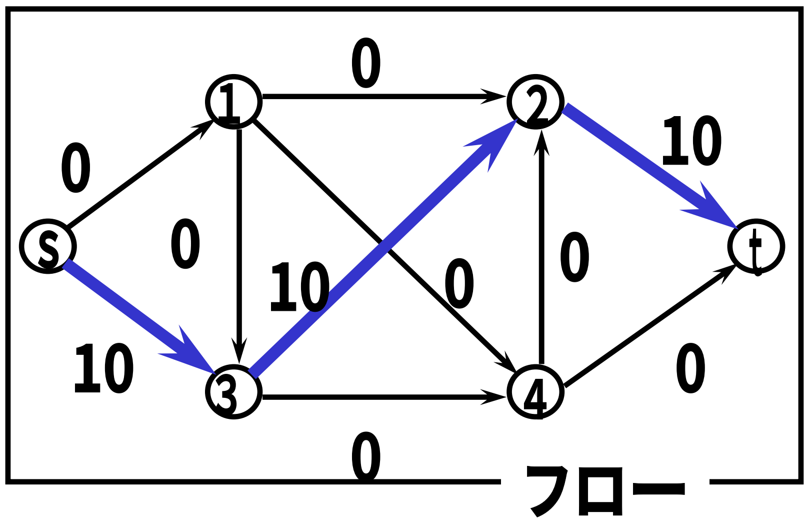
フロー

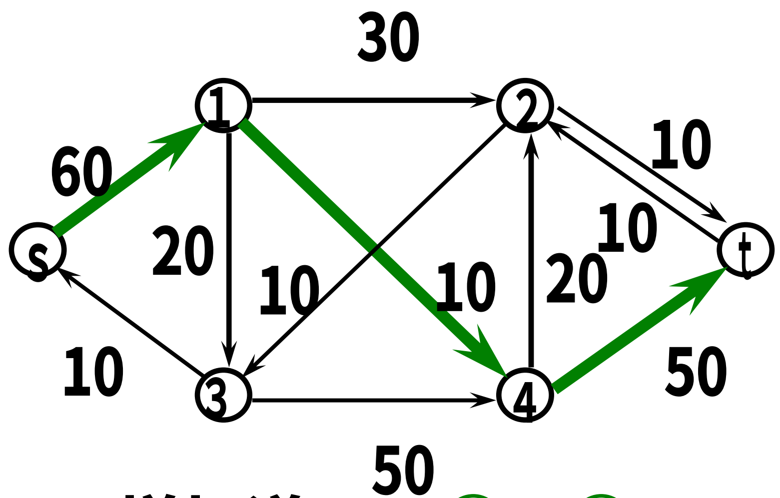
左側のフローに対する
残余ネットワーク



増加道：s→③→②→t
最小容量：10

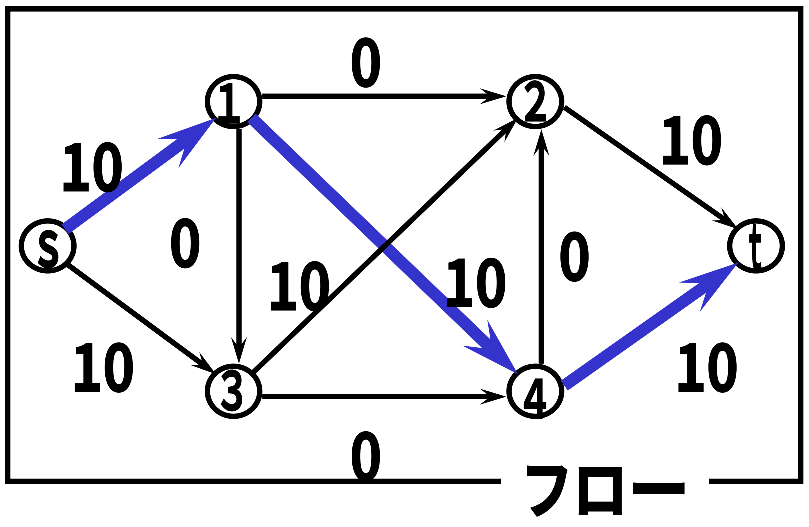
手順2 繰返し1回目

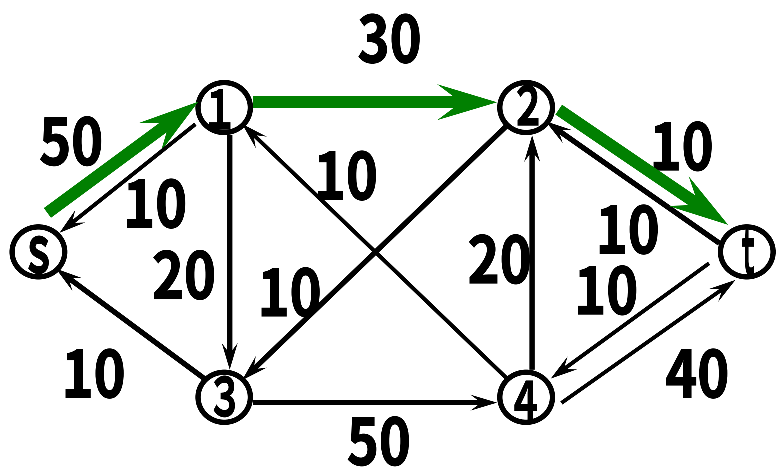




増加道：s→①→④→t
最小容量：10

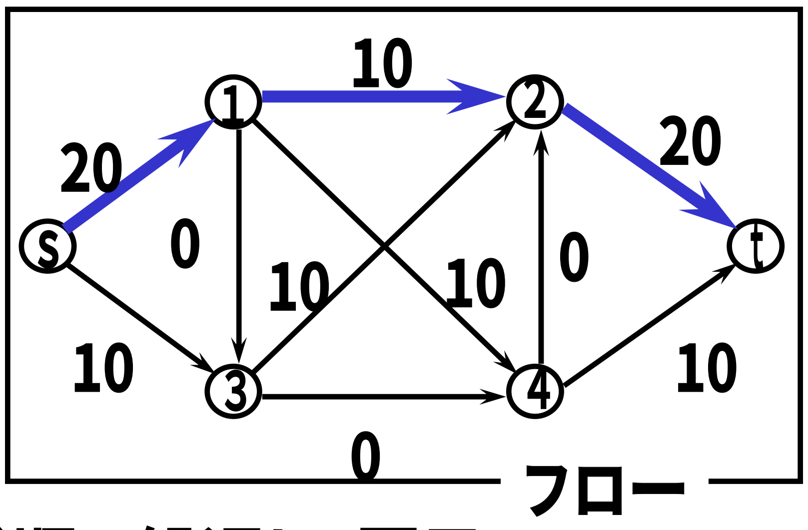
手順2 繰返し2回目

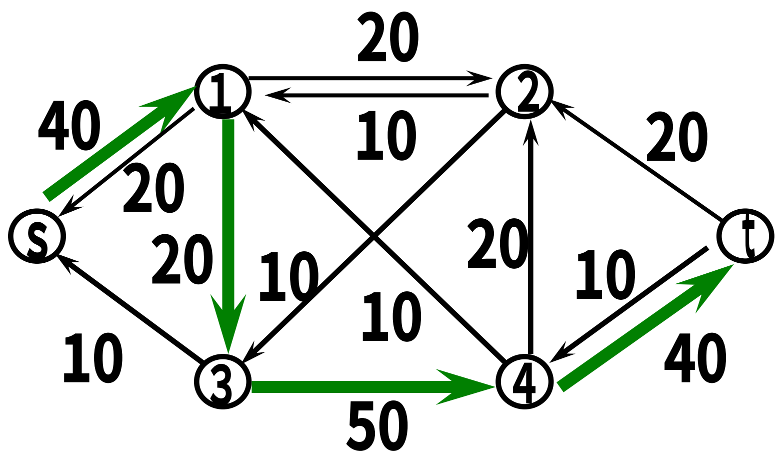




増加道：s→①→②→t
最小容量：10

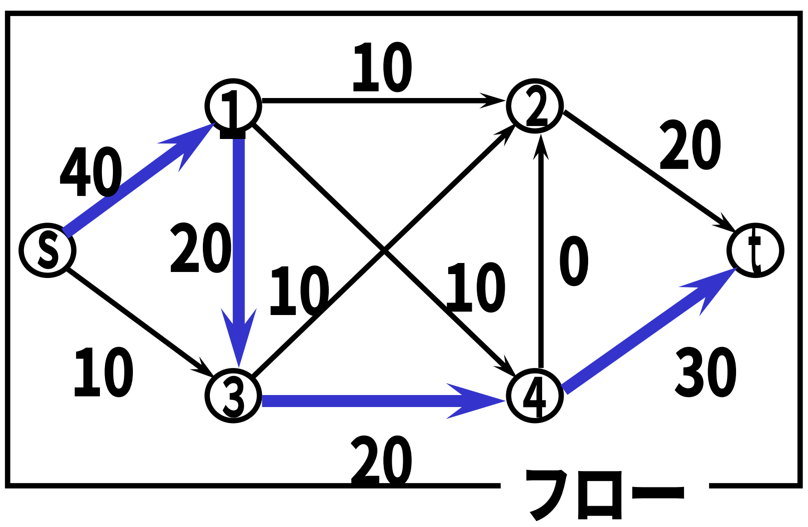
手順2 繰返し3回目

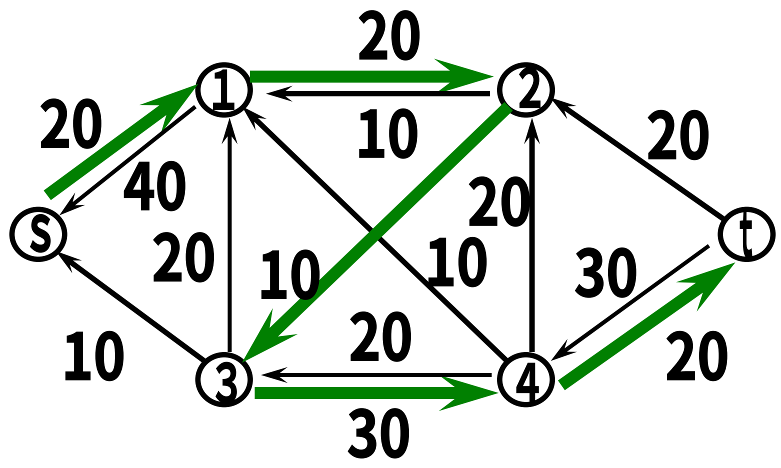




増加道：s→①→③→④→t
最小容量：２０

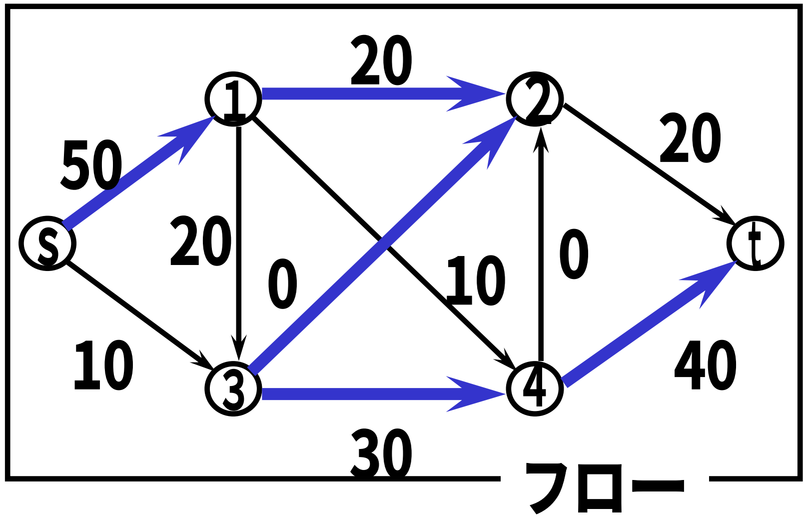
手順2 繰返し4回目

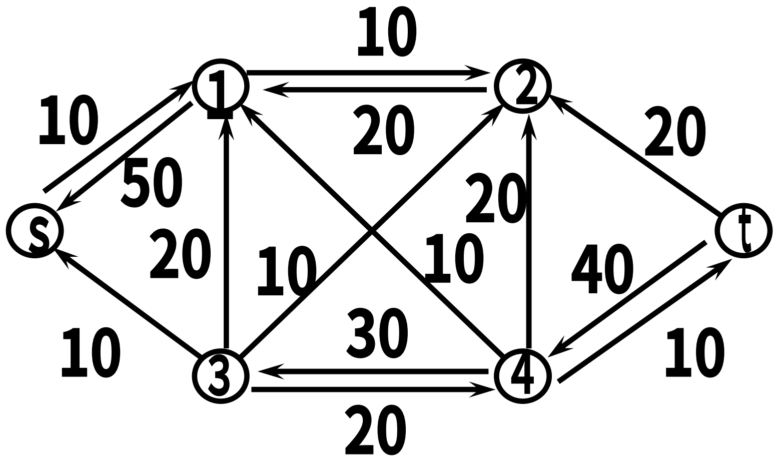




増加道：s→①→②→③→④→t
最小容量：１０

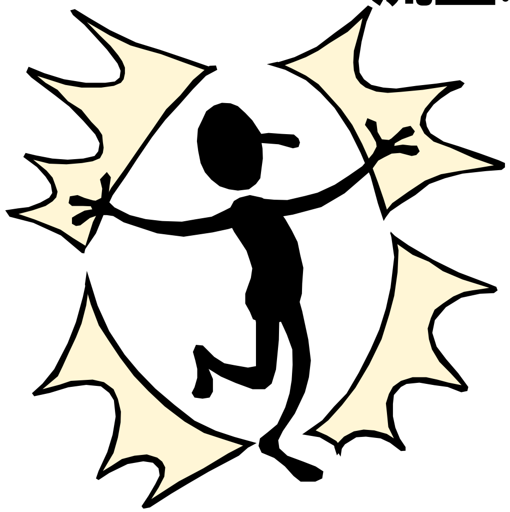
手順2 繰返し5回目



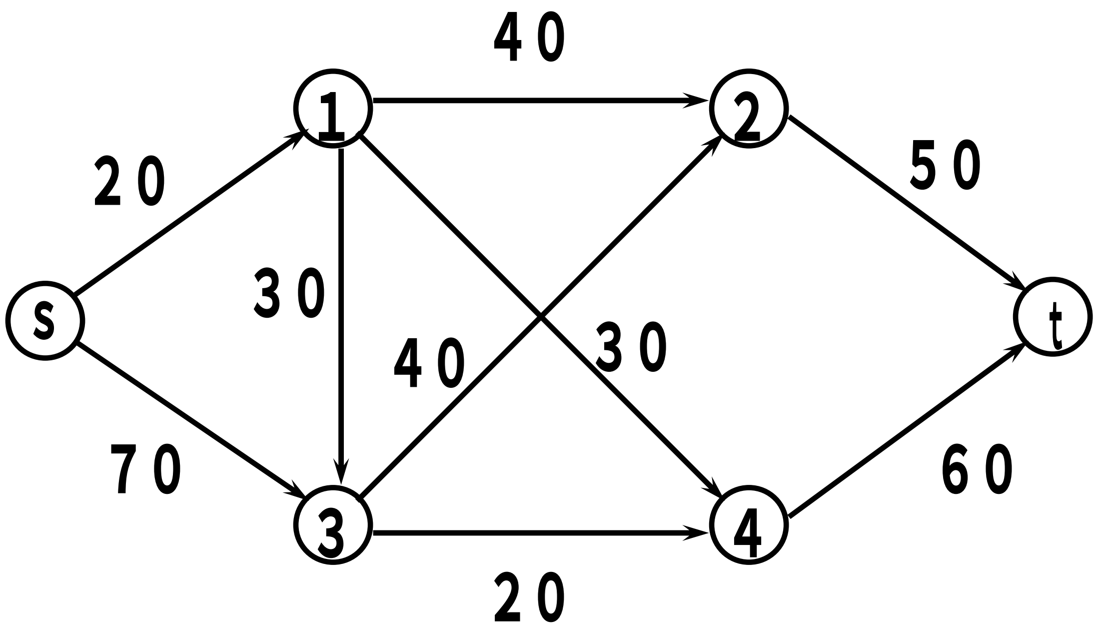


増加道：なし

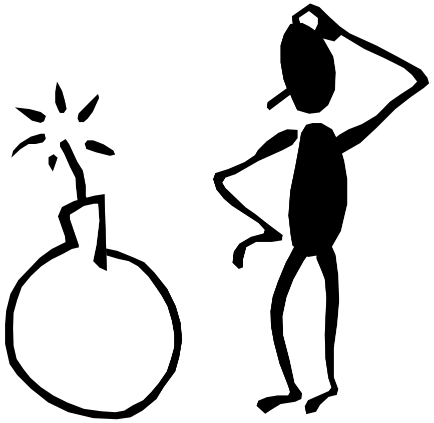
最大フロー
流量:６０



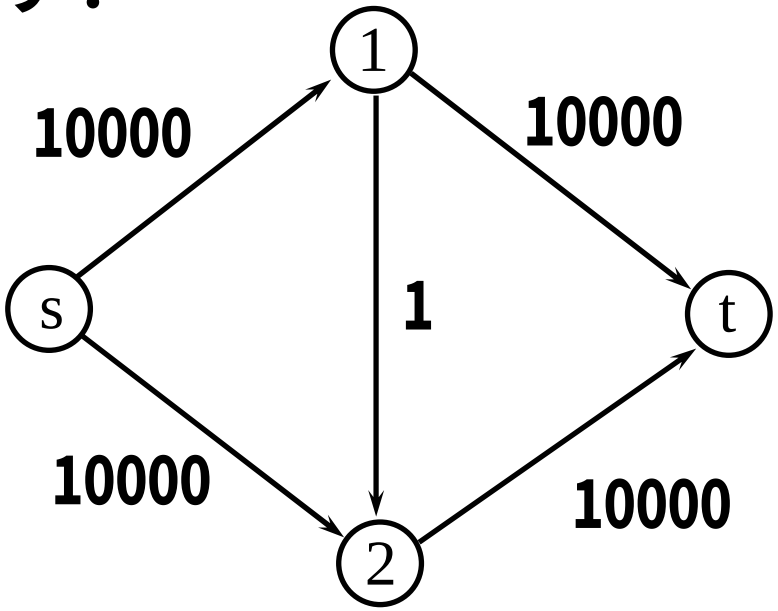
演習7-1 最大フローを求めよ



増加道法の欠点

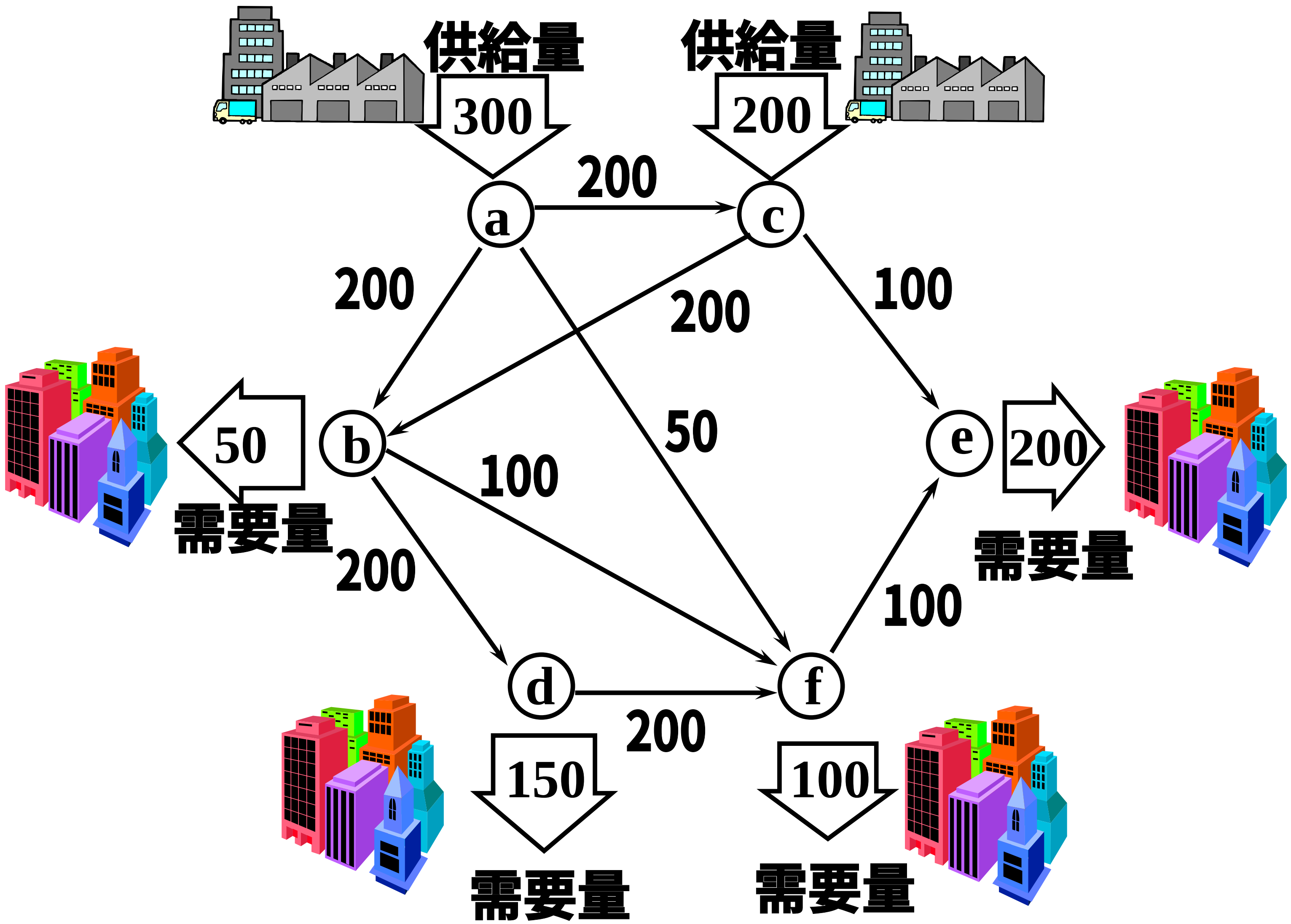


sからtへの最大フローを求めよ．
何回繰り返す？



演習7-2 増加道法を改良せよ

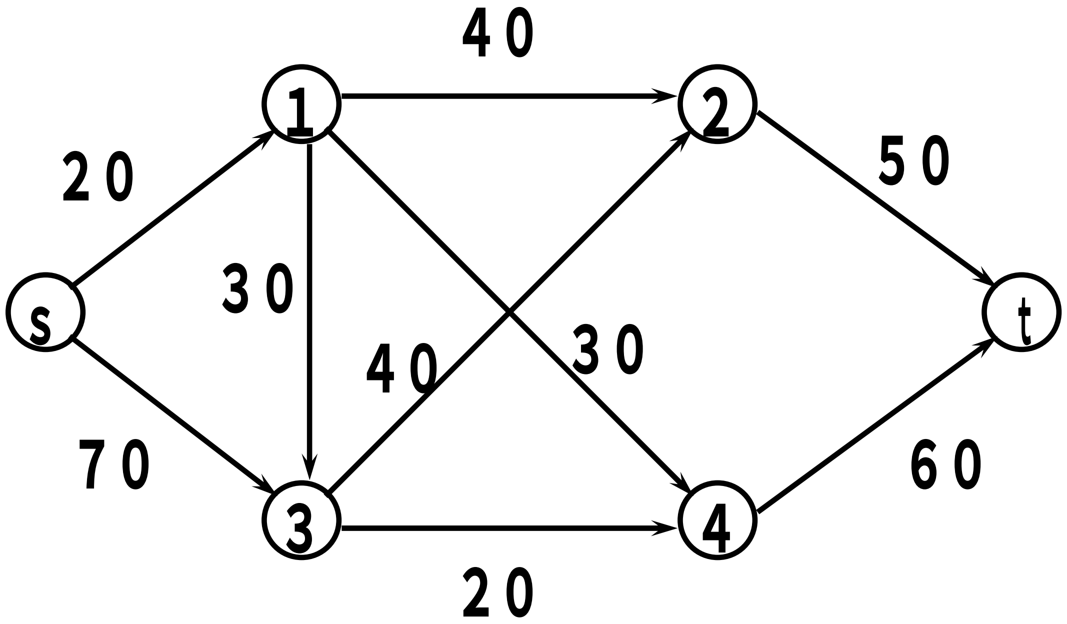
例題7-3 流せるか？



供給量
300
供給量
200
200
a
c
200
100
200
50
b
e
200
100
50
需要量
需要量
200
100
d
f
200
150
100
需要量
需要量

演習7-3

（演習7-1のネットワークで，）始点sから終点tへ最も多くのものを流すには，どの枝の容量を大きくするのが効果的か考えなさい．

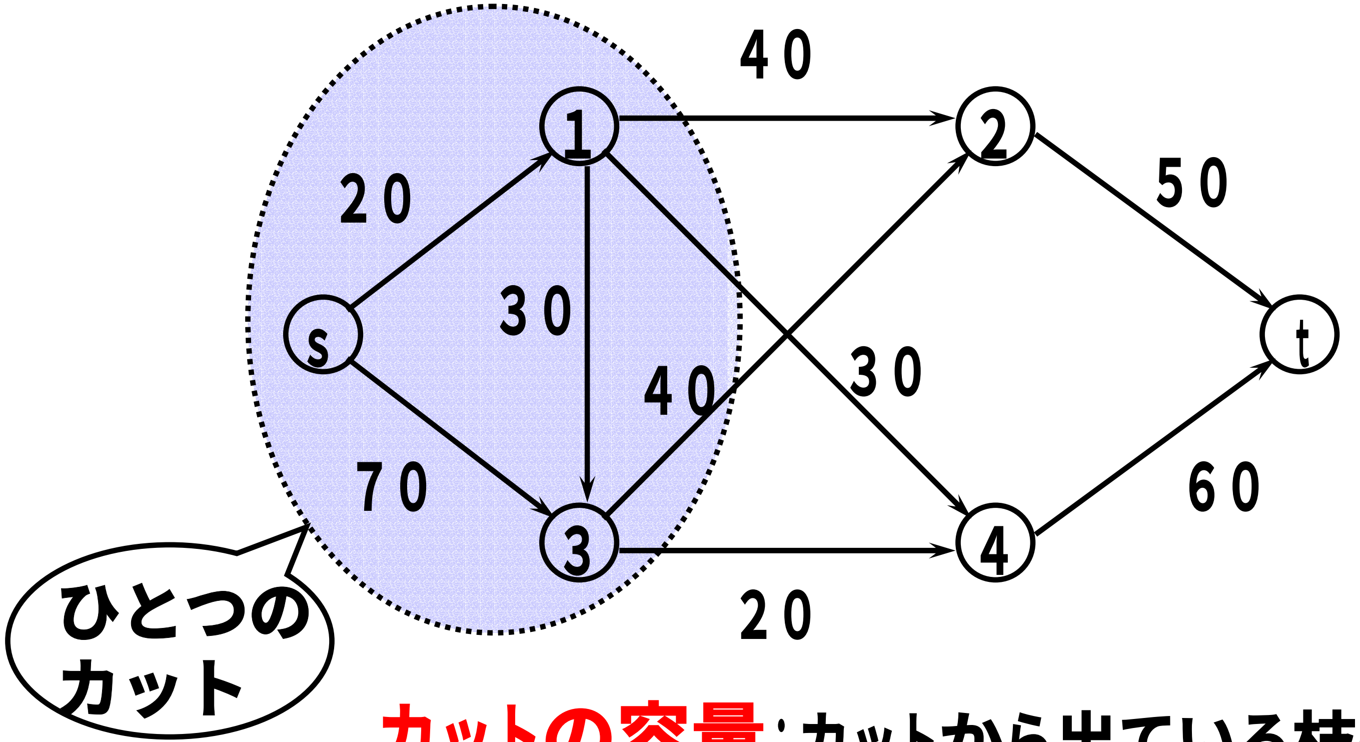


例題7-1のネットワークでは？

カット

sを含み，tを含まない点の部分集合を**カット**という．

※ネットワーク上にカットはたくさんある



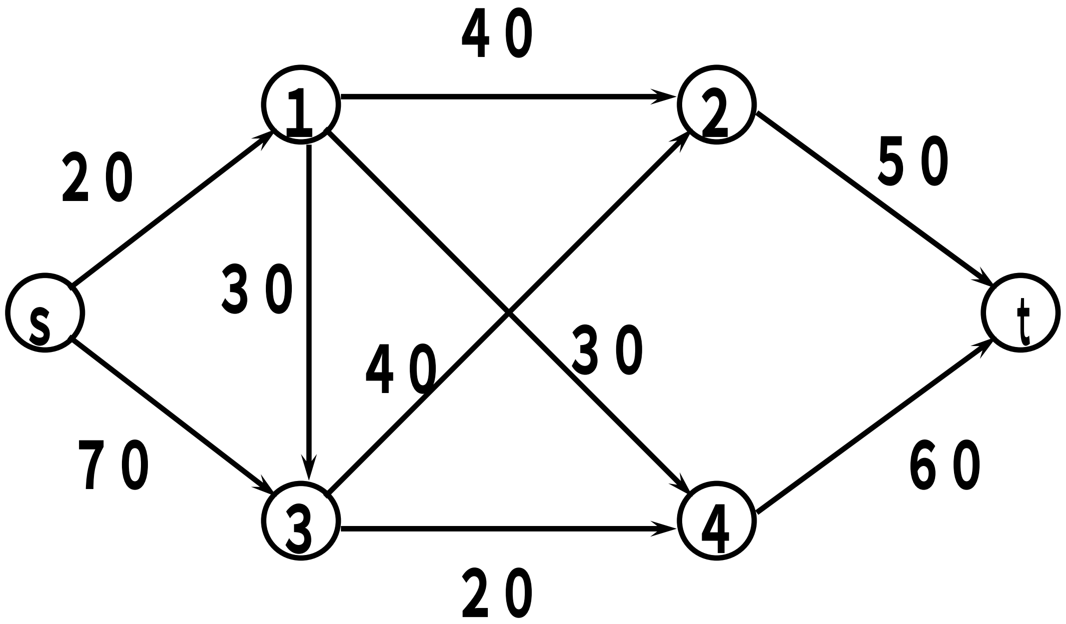
カットの容量：カットから出ている枝の容量の総和

※上記のカットを特に「s-tカット」と呼ぶ場合もある

最小カット

最小カット:容量最小のカット

演習7-4:以下のネットワークの最小カットを見つけよう



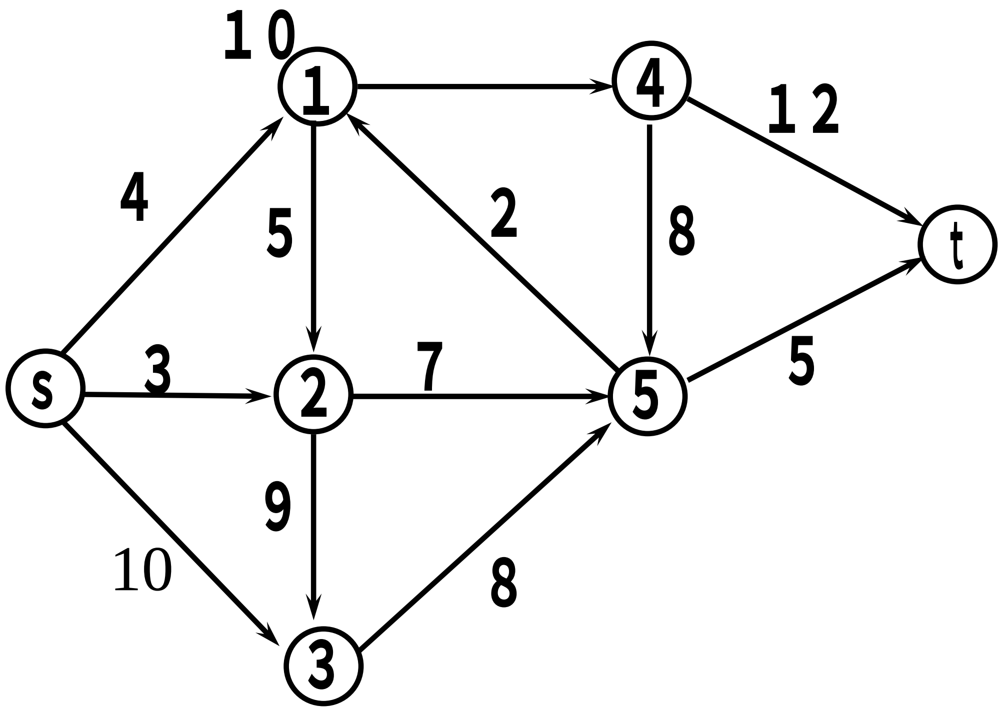
最大フローと最小カットの関係

- 最大フローの流量＝最小カットの容量
  (最大フロー･最小カット定理)
- 最小カットは最大フロー問題から導出可能
  - 導出概要：容量いっぱいに流れ，始点sと終点tを分割する枝集合→最小カット．

⇒CPMを実行する時の最小カットは最大フロー問題に帰着することにより得られる．

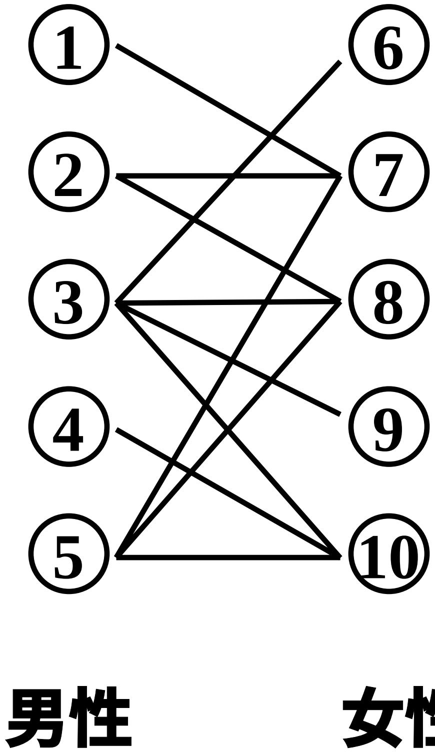
演習 7-5

- 最小カットを求めよ



例題7-4 Shall we dance?

社交ダンスパーティーに男性･女性5人ずつ集まった.
幹事がアンケートをとったところ，パートナーになってもよいと
お互い思っているペアは以下の組合せであることがわかった.



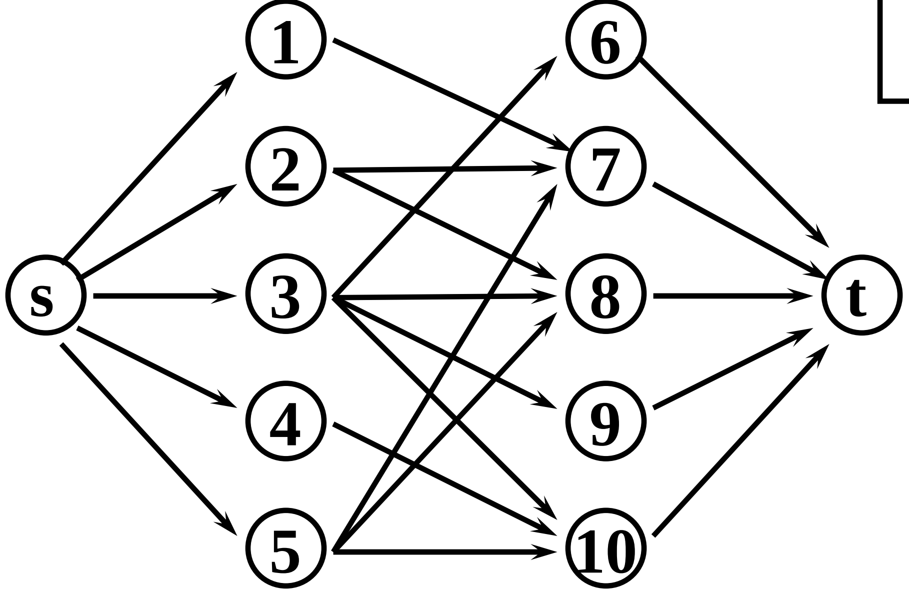
さて，なるべく多くのペアを組みたいが
最大で何組できるか？その組み方は？

同時にペアになれる組合せを
「**マッチング**」，このような問題を
「**マッチング問題**」とよぶ.

マッチング問題の解法

以下のように変形し最大フローを求める．

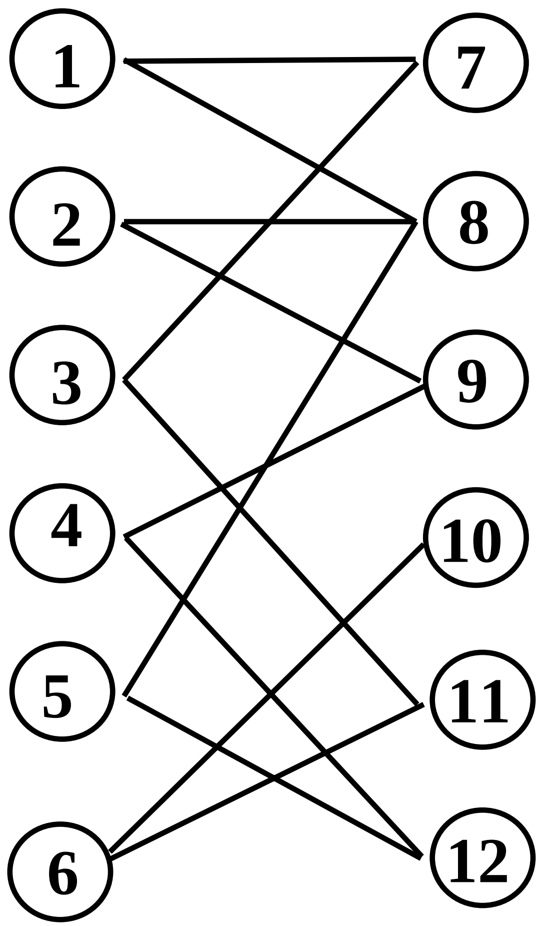
演習7-6
求めてみよう！



各枝の容量はすべて1

- 「フローが流れている元の枝⇔マッチング」⇦なぜか？
- 「最大フロー⇔最大マッチング」⇦なぜか？

演習7-7 最大マッチングを求めよう



演習7-8 バス会社運行係

- 右表のバス運行を計画中.
- 各ターミナル間の回送時間は右下表の通り.
- 最低何台のバスで運行可能？

	発地	出発時間	着地	到着時間
ルート①	A	9:20	C	9:40
ルート②	B	10:00	A	10:30
ルート③	B	8:40	B	9:50
ルート④	D	8:00	B	8:30
ルート⑤	C	12:30	E	13:30
ルート⑥	E	11:10	C	12:20

計画バスルート

回送着地

回送発地	A	B	C	D	E
A	0	3	1	6	2
B	4	0	5	5	6
C	2	5	0	6	4
D	3	2	1	0	5
E	7	3	5	4	0

(単位：10分)