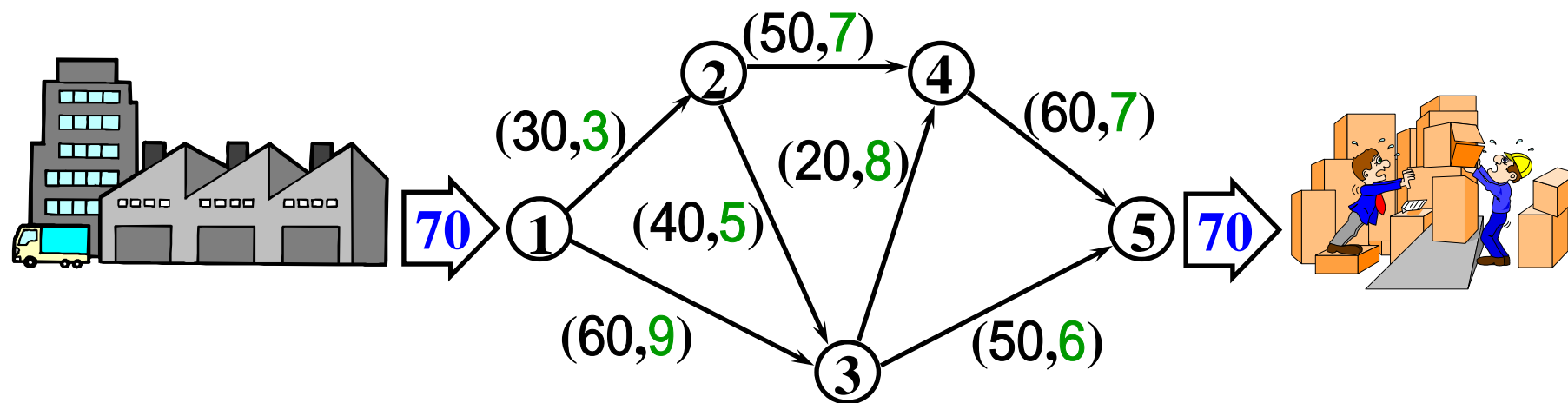


Network Programming IV



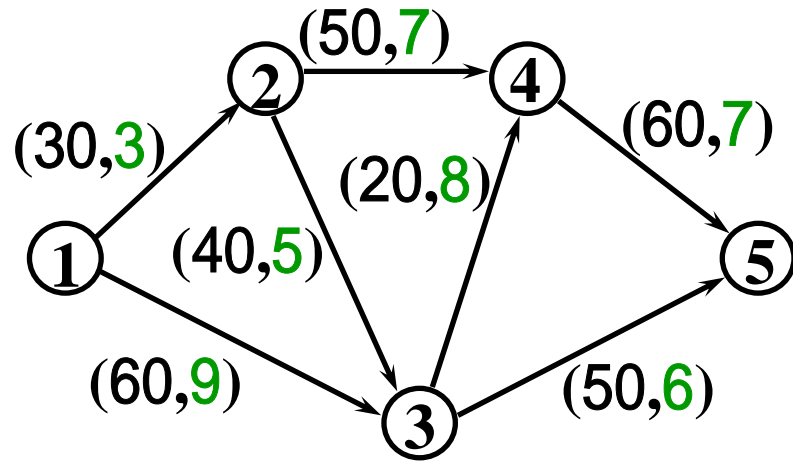
例題8-1 輸送作戦

文教工業では工場から倉庫へ70トン製品を輸送したい。最も費用の安い輸送計画を提案してほしい。

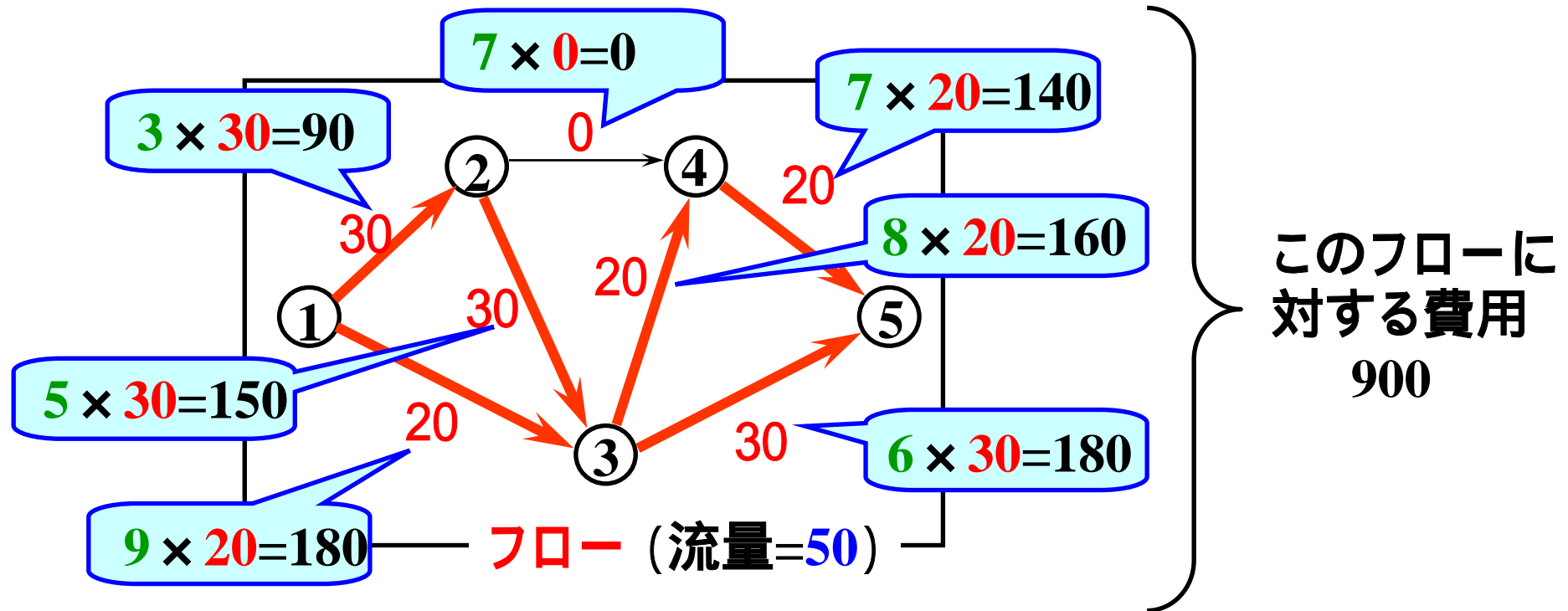


(枝の容量(トン), 1トン当たりの費用(万円))

フローにより 生じる費用



単位フロー当
たりの費用 × フロー



最小費用フロー問題

目的 フローにより生じる費用 最小

条件 指定された流量の実行可能フローであること

最小費用フロー : 指定された流量を持つ
費用最小の実行可能フロー



最小費用流問題に対する主な解法

- **負サイクル法**

- コストがより下がる閉路を見つけて更新する。
- 簡単．工夫次第でより高速にできる。

- **最短路繰返し法** (主双対法)

- コスト最小路にフローを流す手続きを繰返す。
- 簡単．工夫次第でより高速にできる。

- **ネットワーク単体法**

- 実用的解法。

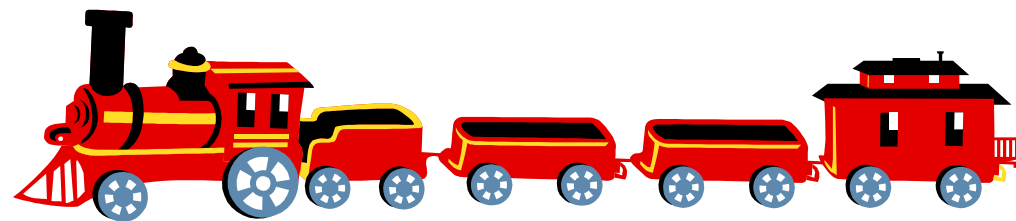
他多数の解法が提案されている。

最短路繰返し法

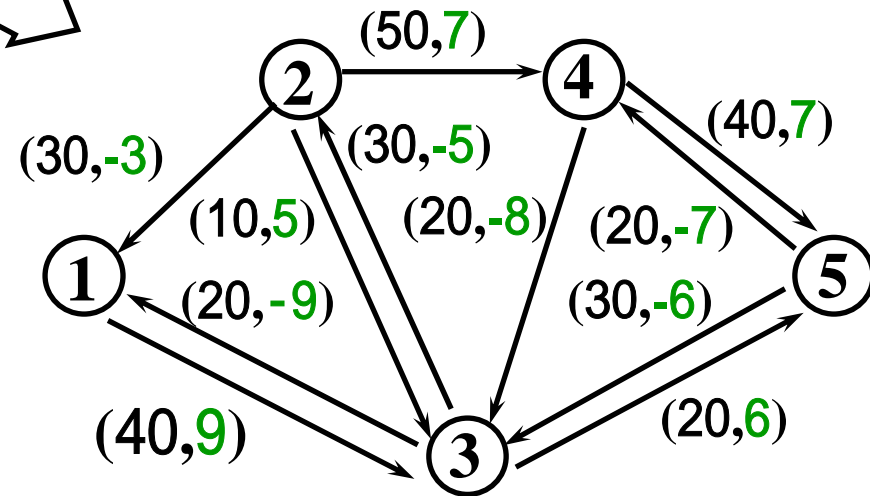
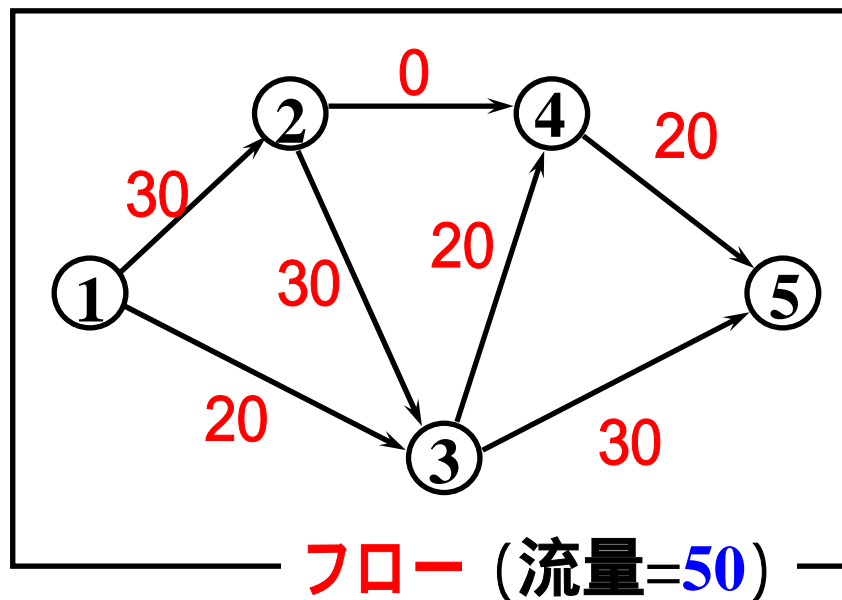
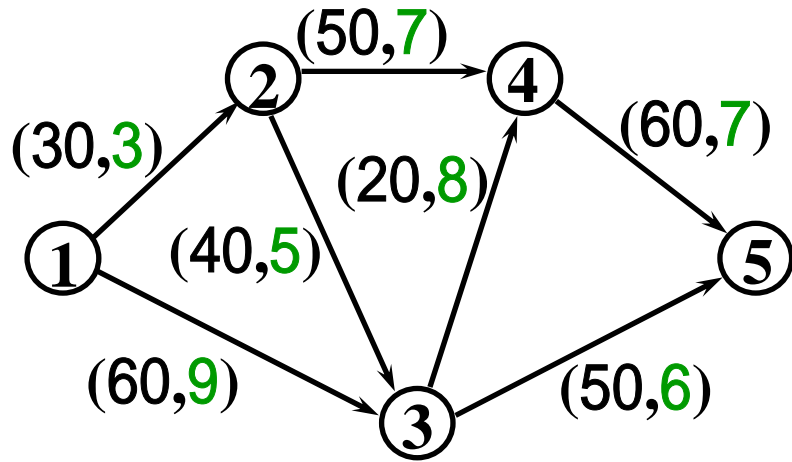
手順1:全枝のフローを0と置く.

手順2:以下を指定流量が得られるまで繰返す.

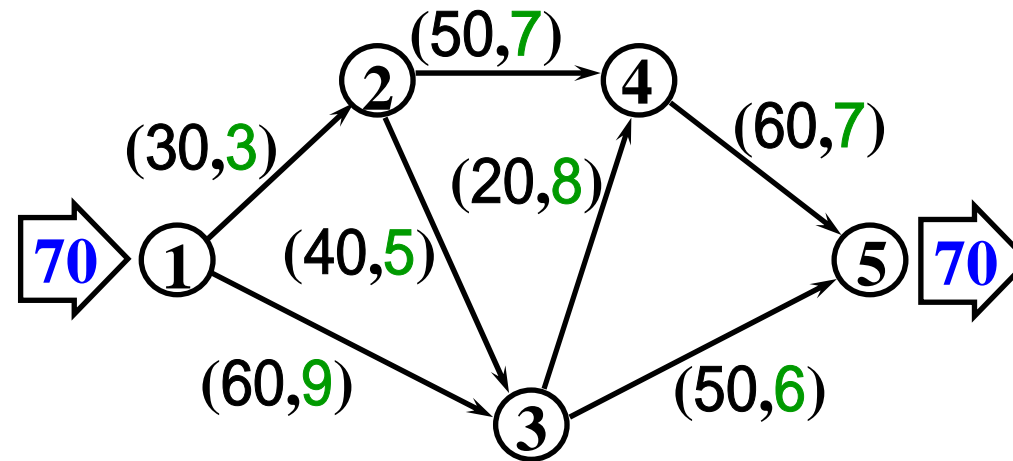
- (1) 残余ネットワークを作る.
- (2) 残余ネットワーク上で供給点から需要点へのコスト最小の路(最短路)を求める.
- (3) 最短路に沿って流せるだけフローを流す.



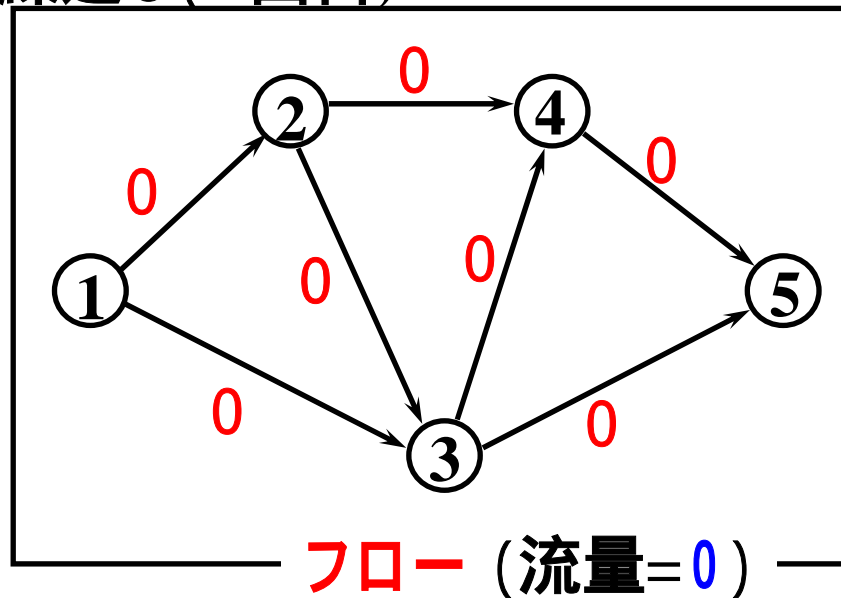
最小費用フローでの 残余ネットワーク



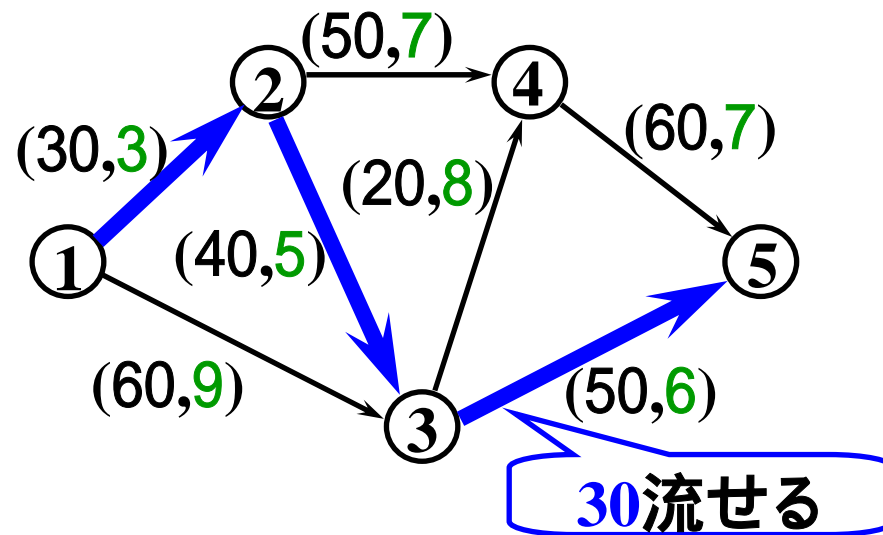
例題8-2 最短路繰返し法



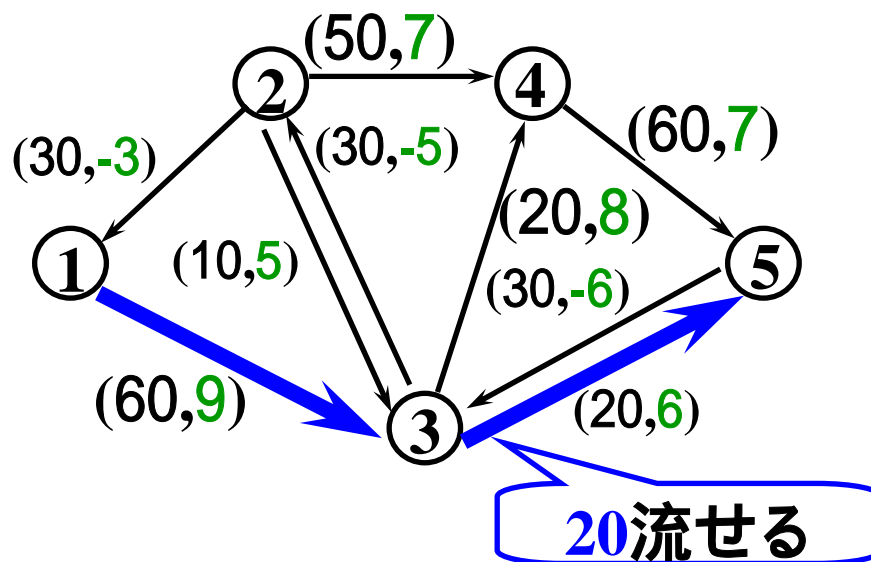
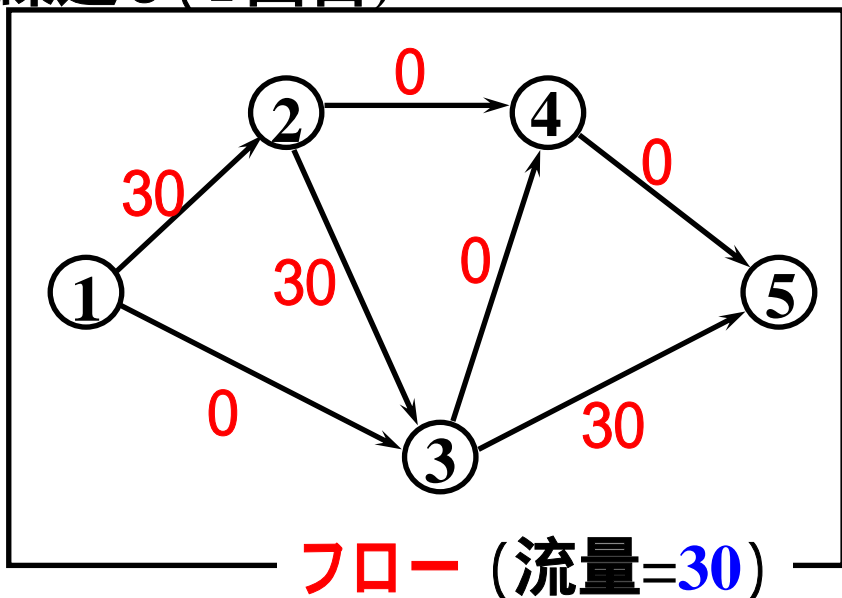
繰返し(1回目)



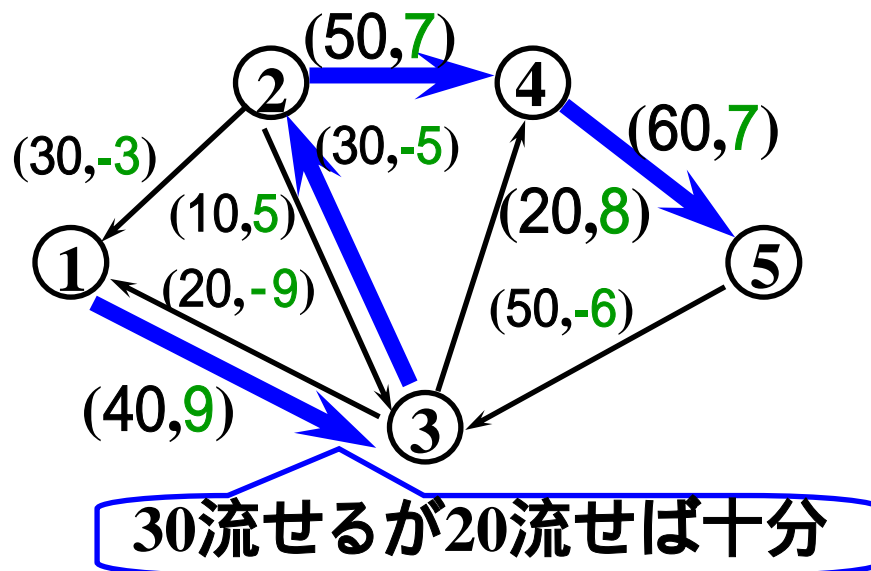
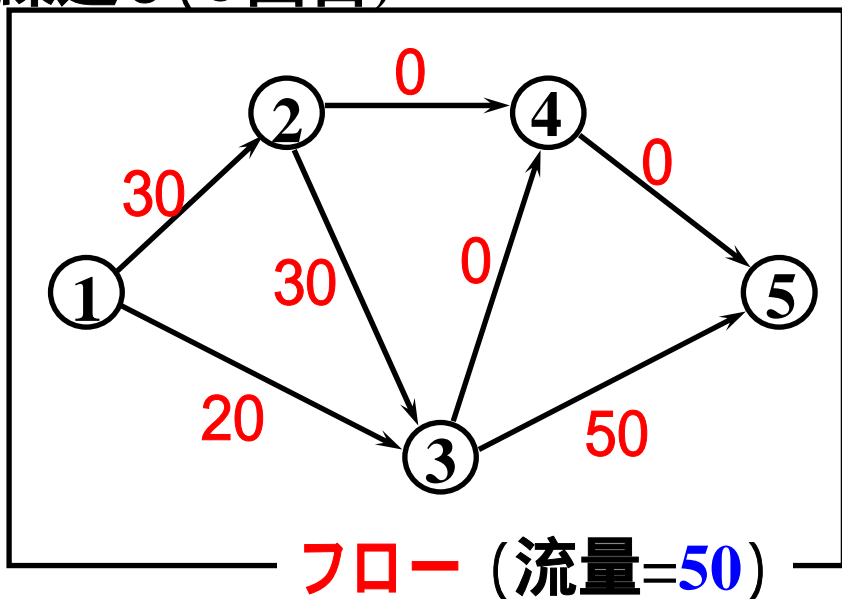
残余ネットワーク



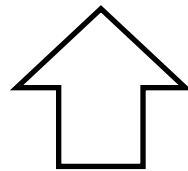
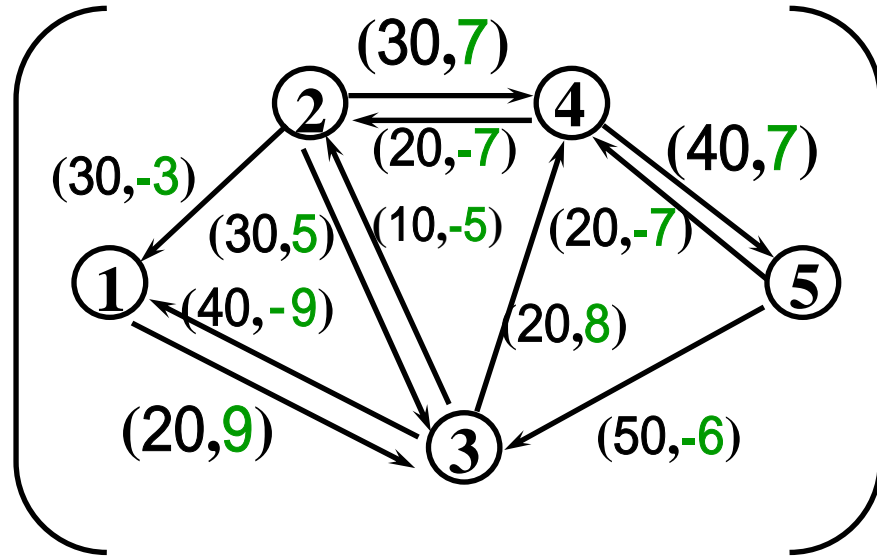
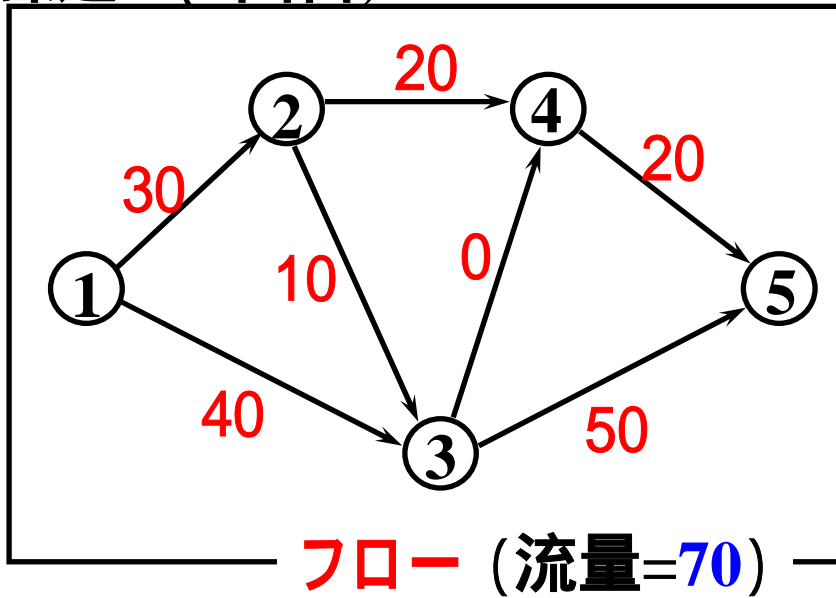
繰返し(2回目)



繰返し(3回目)



繰り返し(4回目)



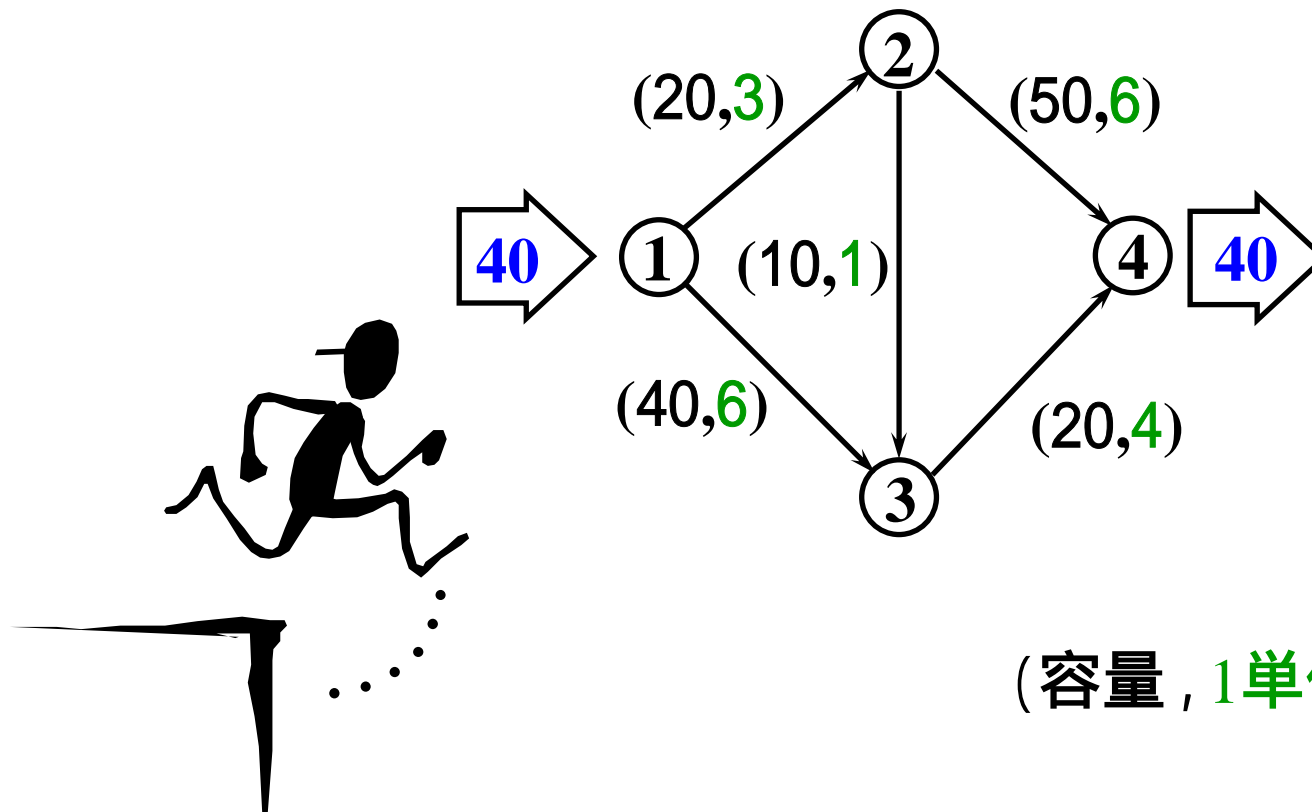
流量が供給量の70に到達したので終了.

流量70の最小費用フロー



演習8-1

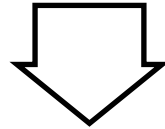
流量40の最小費用フローを求めよ。また、その時の費用を求めよ。



(容量, 1単位当たりの費用)

最短路繰返し法の弱い点

残余ネットワークに負の長さの枝が現れる。



最短路を求めるのにダイクストラ法が使えない。

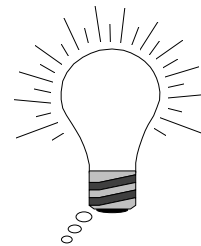
対策1

対策2

ダイクストラ法より計算時間はかかるが、負の長さも扱える解法を利用する。

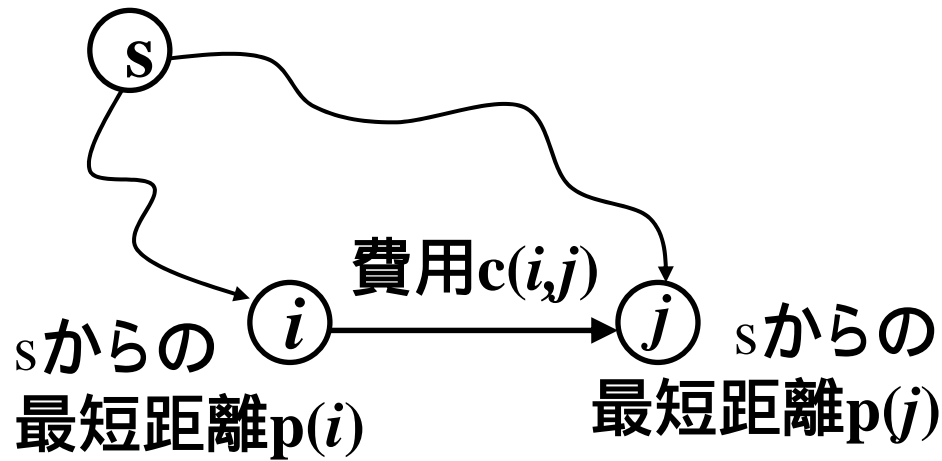
あまり良い対策ではない

残余ネットワークを工夫し、高速なダイクストラ法を利用する。



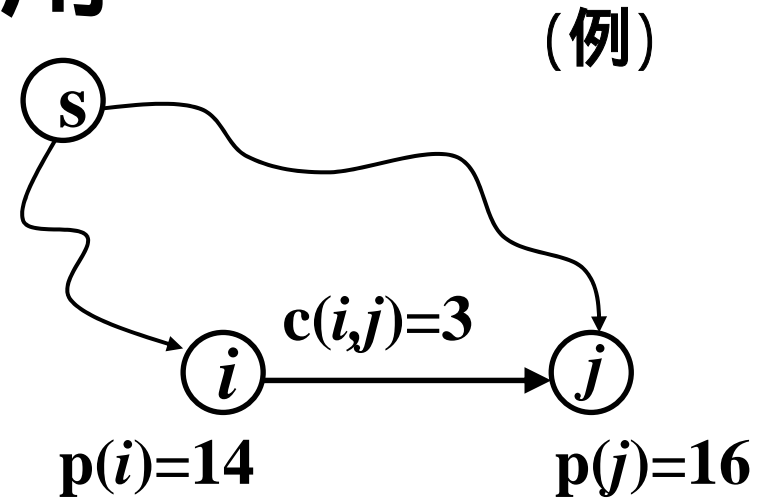
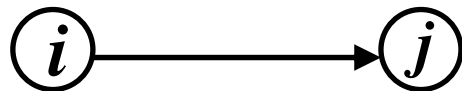
残余費用の導入

残余費用

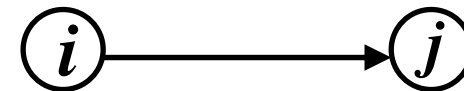


残余費用

$$\underline{c}(i,j) = c(i,j) + p(i) - p(j)$$



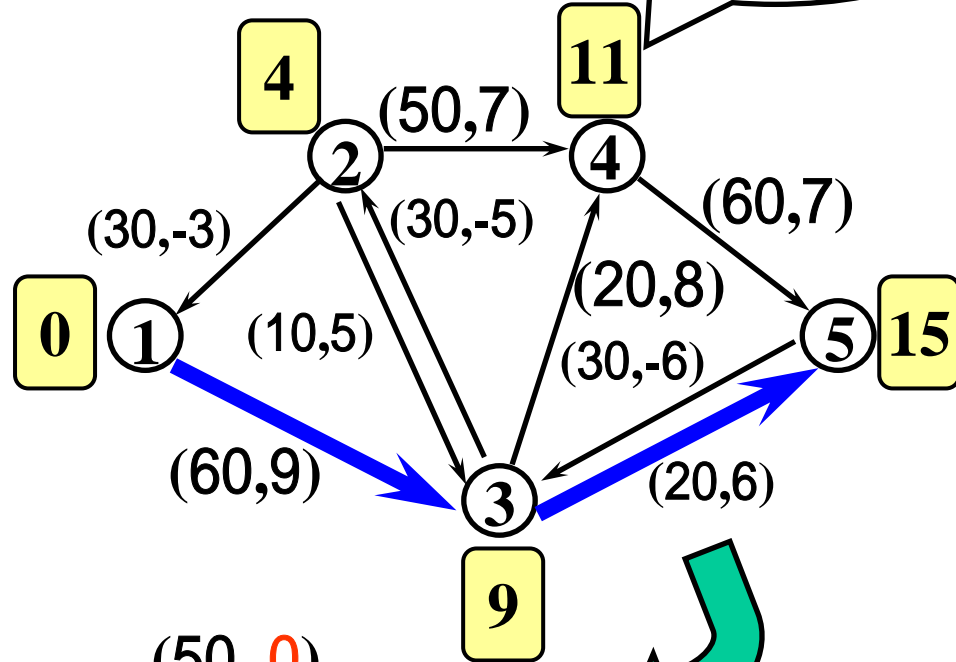
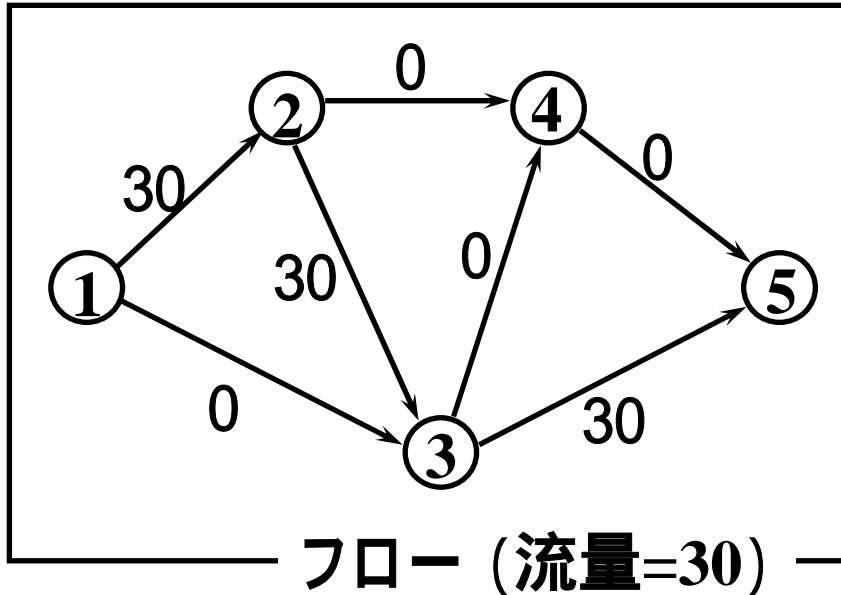
$$\underline{c}(i,j) = 3 + 14 - 16 = 1$$



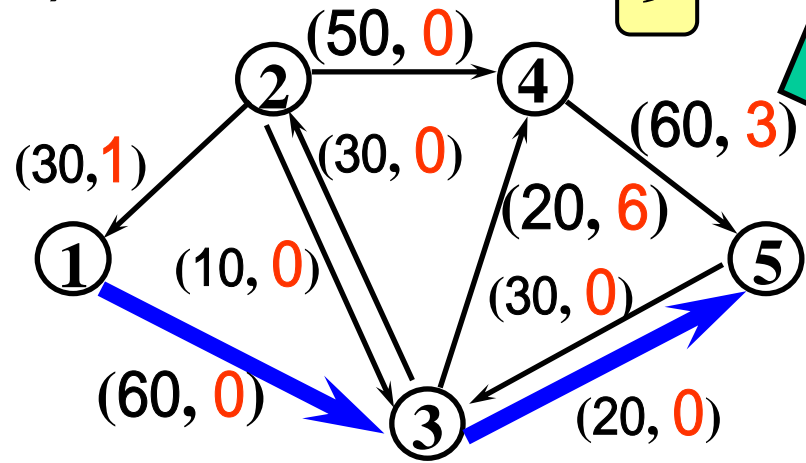
残余費用は非負である. なぜ?

改訂残余ネットワーク

供給点からの最短距離 p

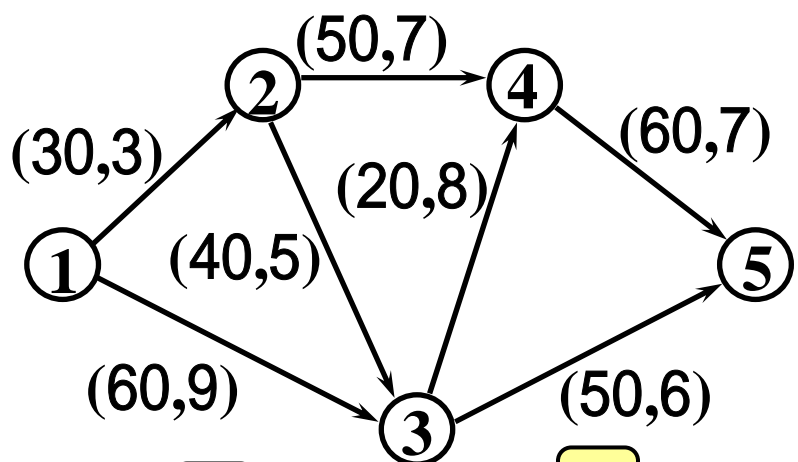


改訂残余ネットワーク

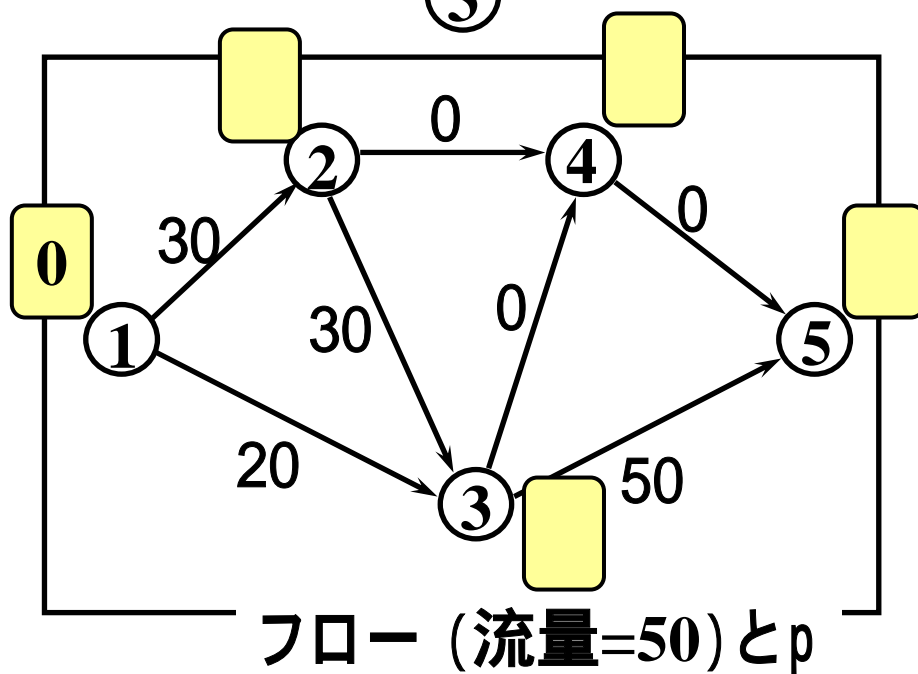


残余費用に置き換える

練習 改訂残余ネットワーク



左のネットワーク上に
左下のようなフローが流れて
いる時,
改訂残余ネットワークはど
のように表現されるか?



(改訂残余ネットワーク上
における供給点 から全点へ
の現在の最短距離 p は各自
で求めなさい)

改訂最短路繰り返し法

手順1: 全枝のフローを0, 各点での $p(v)$ を0とおく.

手順2: 以下を指定流量が得られるまで繰り返す.

(1) **改訂残余ネットワーク**を作る.

現在のフローに対するネットワークの構造を作る

現在の p に対する残余費用を定める

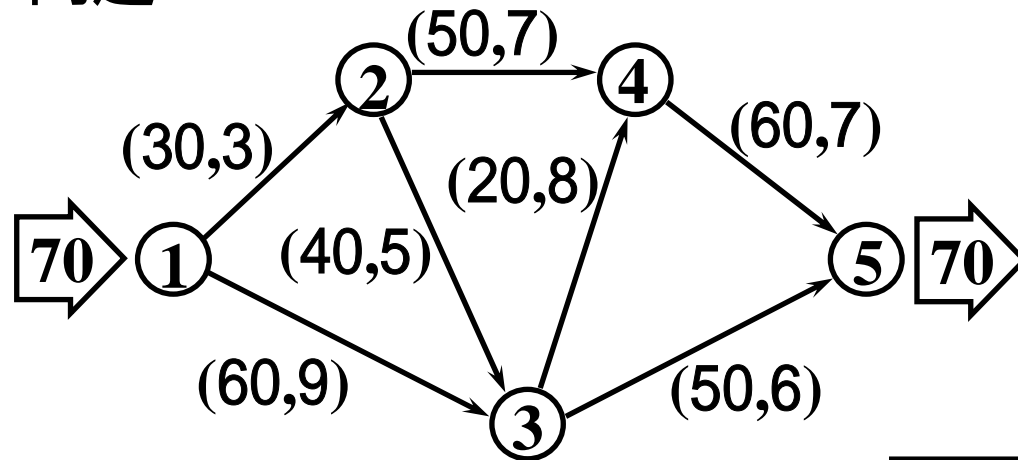
供給点から各点への最短距離 $d(v)$ を求める.

(2) 供給点から需要点への**最短路**に沿って流せるだけ**フローを流す**.

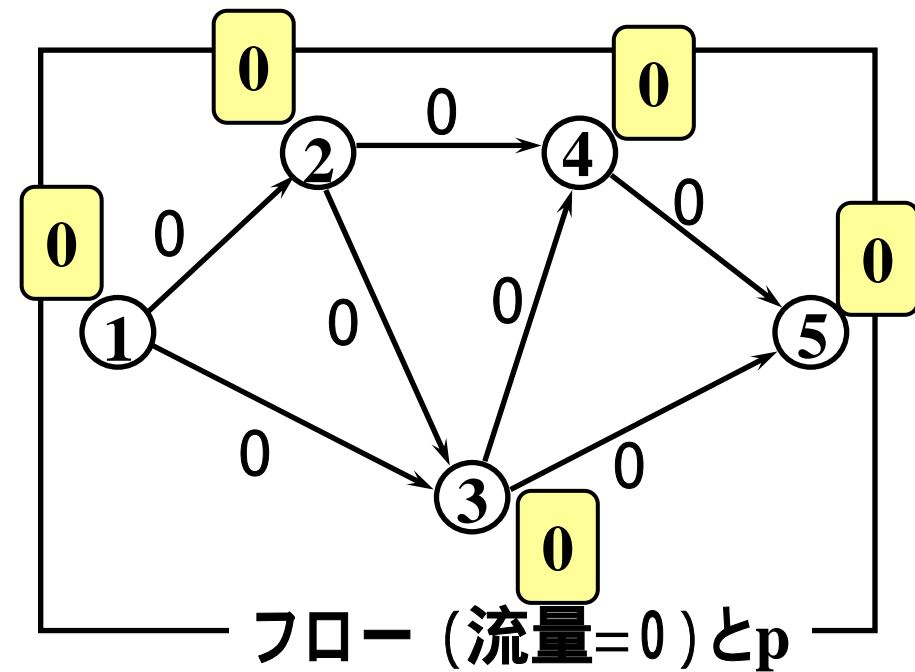
(3) 各点において $p(v) \leftarrow p(v) + d(v)$ とおく.

例題8-3 改訂最短路繰返し法

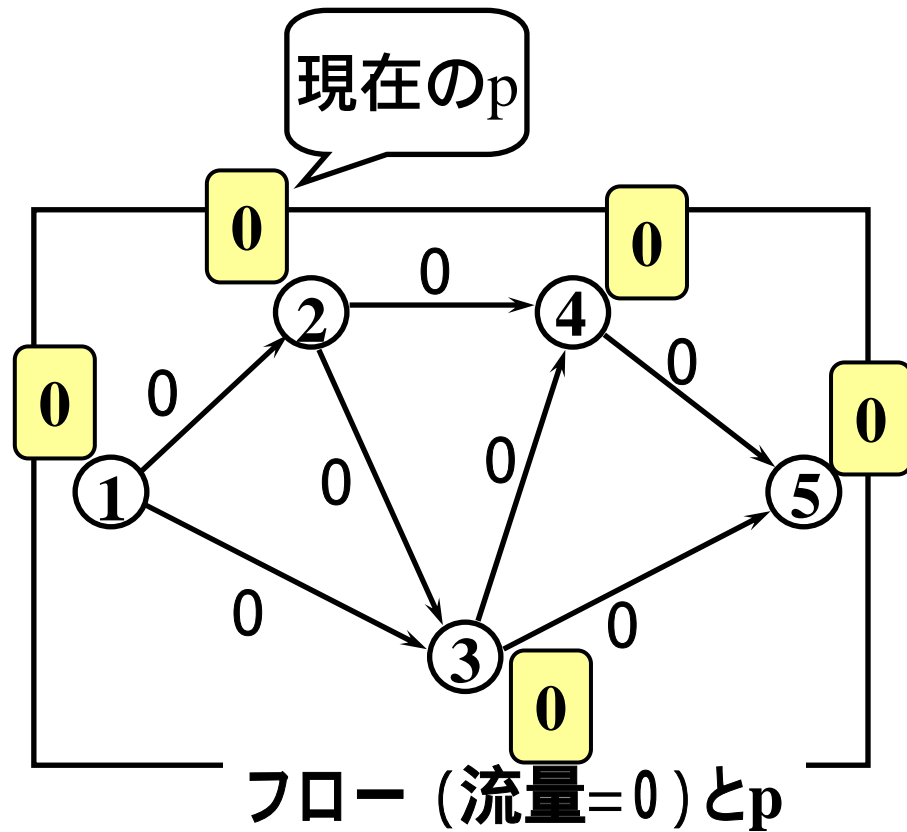
問題



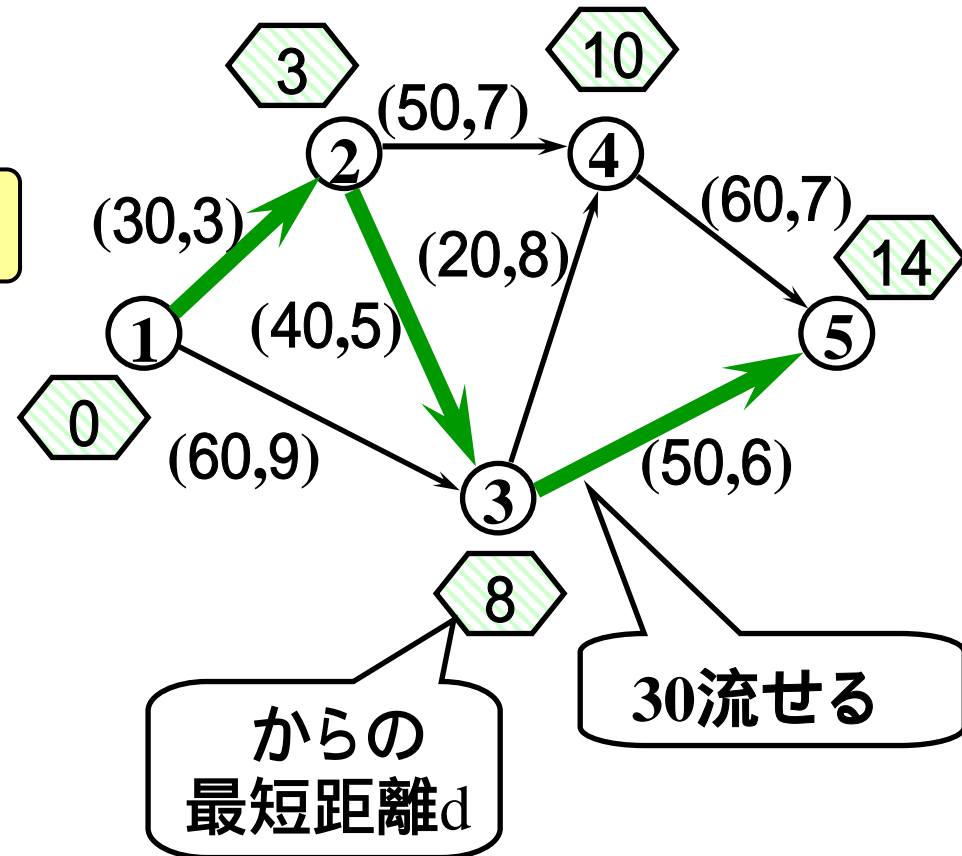
手順1 初期設定



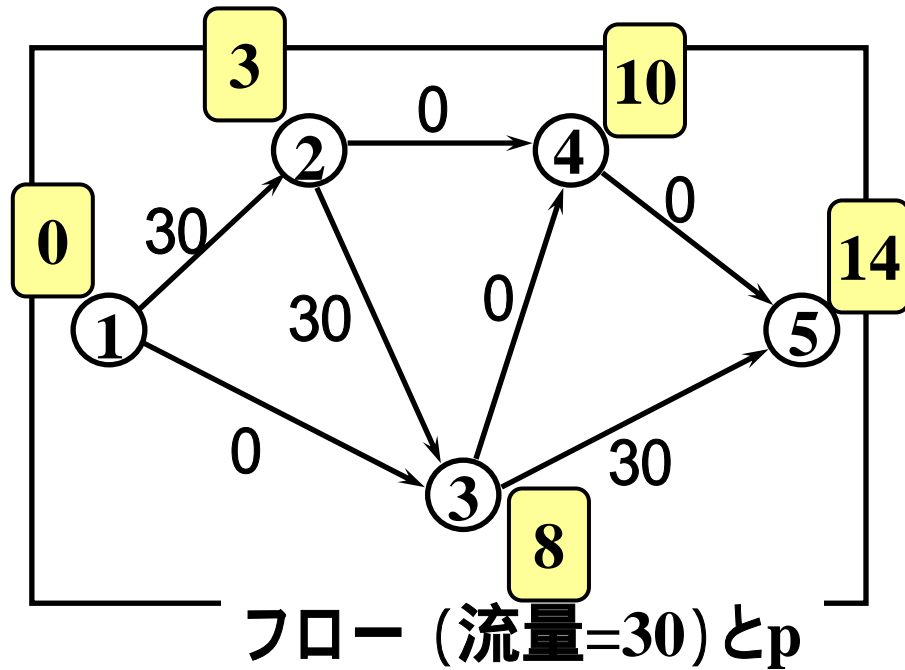
手順2 繰り返し1回目前半



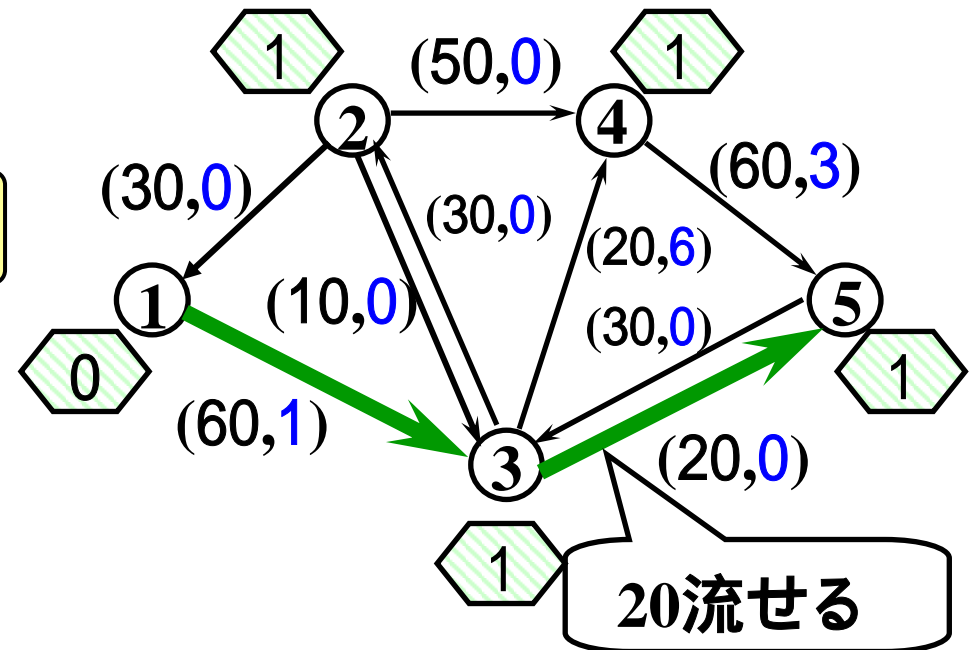
左図のフローとpに対する
改訂残余ネットワーク



手順2 繰り返し1回目後半+2回目前半

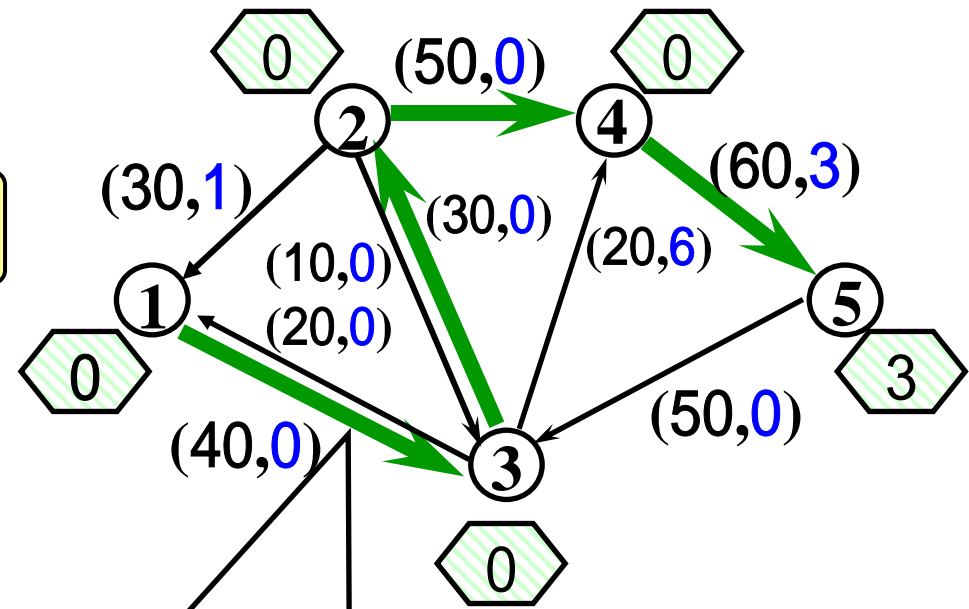
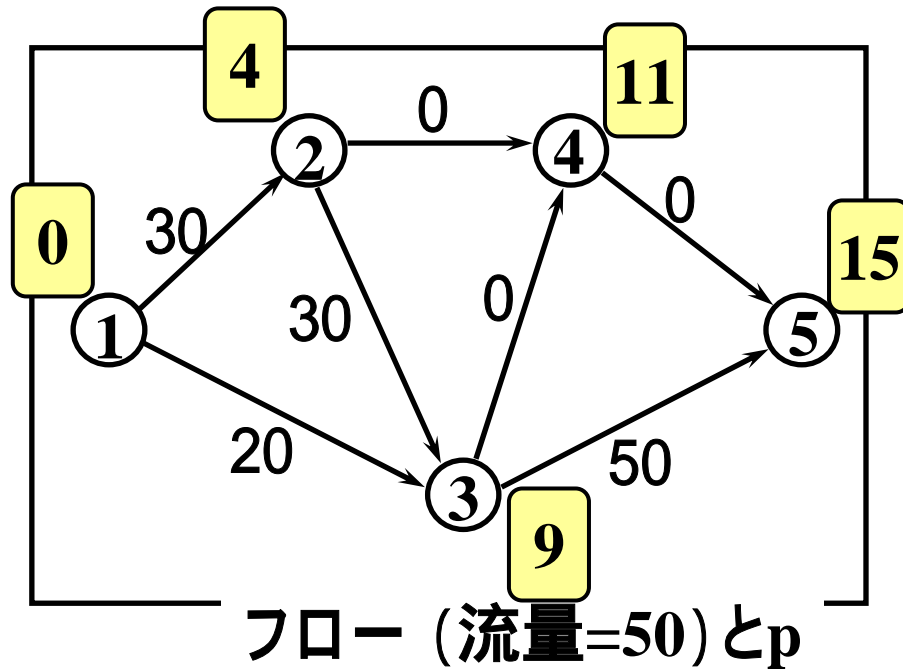


左図のフローと p に対する
改訂残余ネットワーク



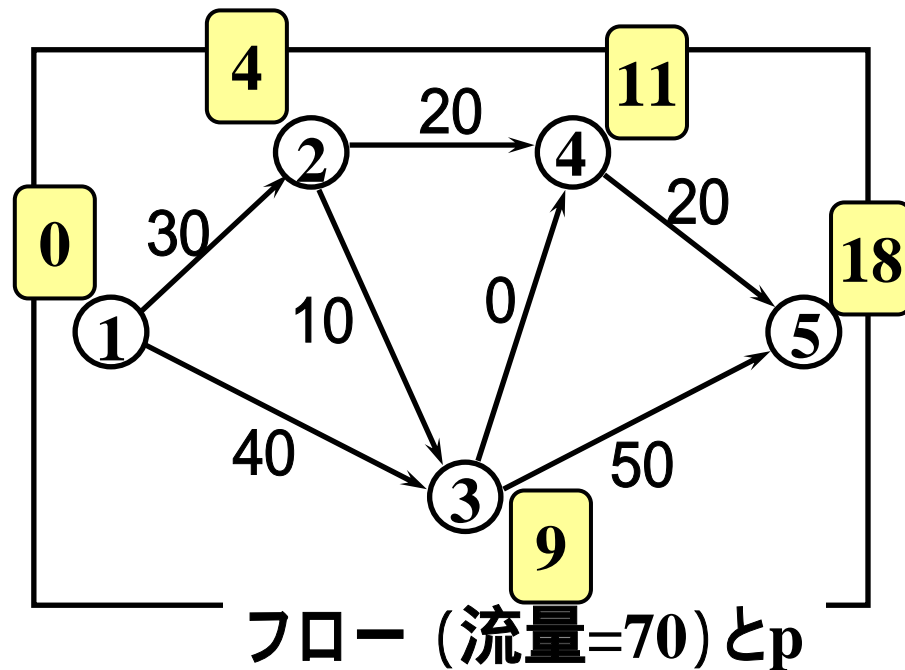
手順2 繰り返し2回目後半+3回目前半

左図のフローとpに対する
改訂残余ネットワーク



30流せるが、20流せば
流量70を満たす

手順2 繰り返し3回目後半+4回目前半



演習8-2

演習8-1において、改訂最短路繰り返し法を用いて最小費用フローを求めてみよう。

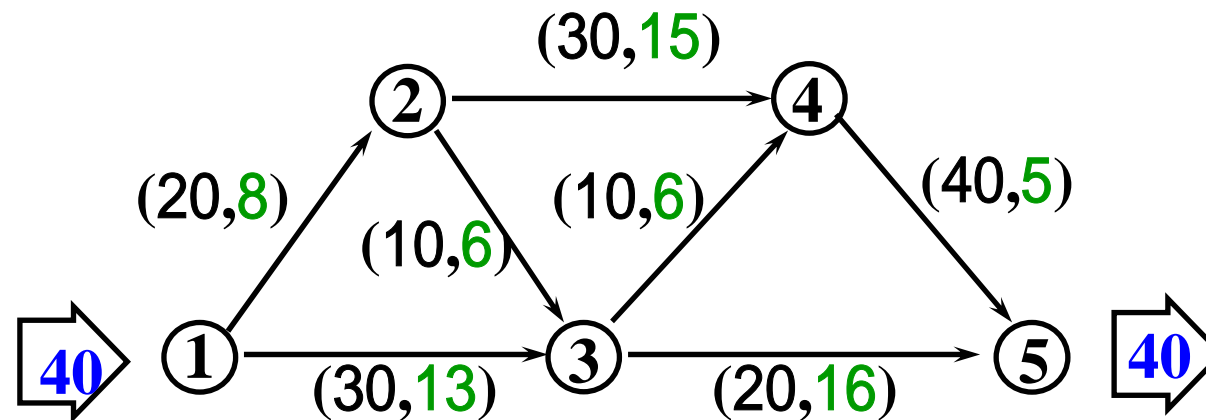


流量が70に到達したので終了

流量70の最小費用フロー

演習8-3

流量40の最小費用フローを求めよ。また、その時の総費用も示せ。



(容量, フロー1単位当たりの費用)

例題 8-4

文教商事では5つの支社へ一人ずつの人員補強を計画している。5人が希望している任地と、その任地へ赴く際に予想される費用は以下のようにまとめられた。

	支社	支社	支社	支社	支社
Aさん	25	30			
Bさん	20		70	35	
Cさん	80	75	90	65	
Dさん				55	40
Eさん				60	50

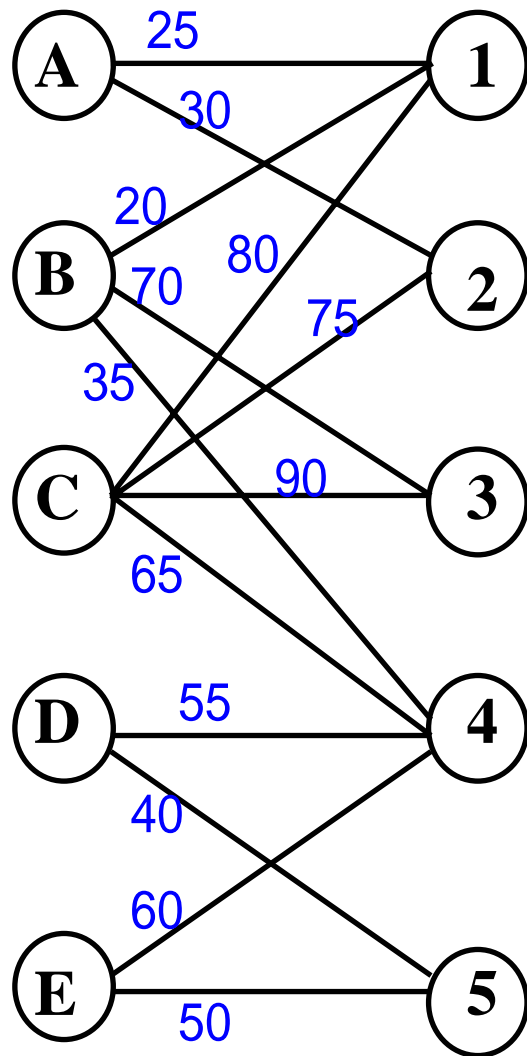
空白は希望
しない支社



さて、誰をどの支社に配属すれば最も費用が安く済むか？

関連問題：5人を各支社に割り当てることはできるか？

割当問題

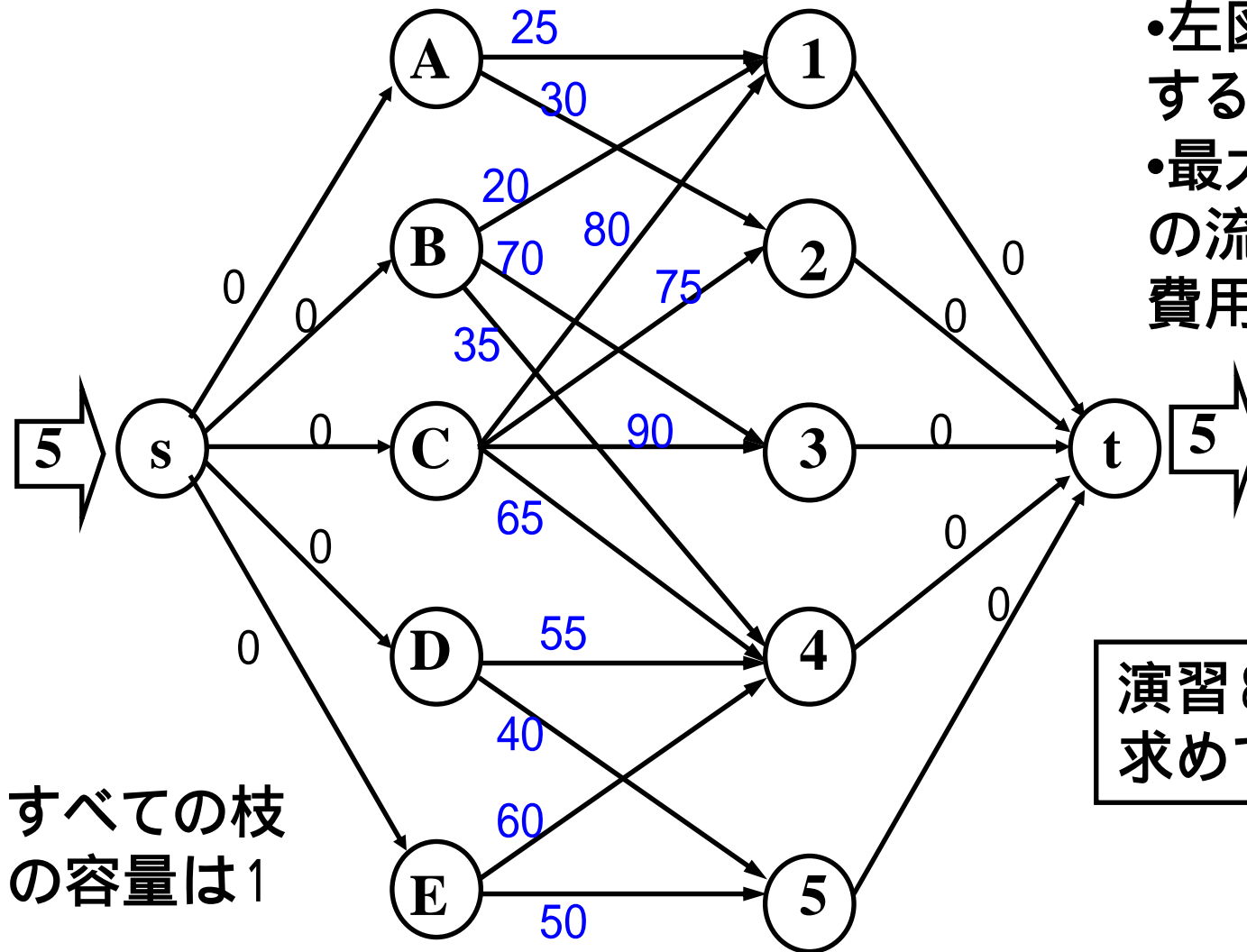


完全マッチングの中で
(最大マッチングの中で)
重みの和が最小のマッチ
ングを求める問題



割当問題の一解法

- 最大マッチング数を求める.
- 左図のように変形する.
- 最大マッチング数の流量を持つ最小費用フローを求める.



演習8-4
求めてみよう!!

演習 8-5

文教建設では資格の必要な4つの仕事のために新規に4人採用した。採用された各ワーカーは資格のランクが異なるので与えられた仕事により給料が異なる。人件費を最小にするには誰にどの仕事を割当てれば良いか？

	仕事	仕事	仕事	仕事
Aさん	45	無資格	無資格	30
Bさん	50	55	15	無資格
Cさん	無資格	60	25	75
Dさん	45	無資格	無資格	35

(単位:万円)

演習 8-6 (応用) 輸送問題

文教サイクルは、3つの工場と4つの販売店を有している。各工場の週間製造台数、工場から販売店への輸送費、各販売店の週間需要は以下の通りである。

輸送費 (千円/1台)	販売店	販売店	販売店	販売店	各工業の週間製造台数
工場A	6	7	3	7	100
工場B	8	3	6	5	250
工場C	5	4	5	6	150
各販売店の週間需要台数	80	160	60	200	

総輸送費を最小にするには、各工場から各販売店へどのように製品を輸送すれば良いか。