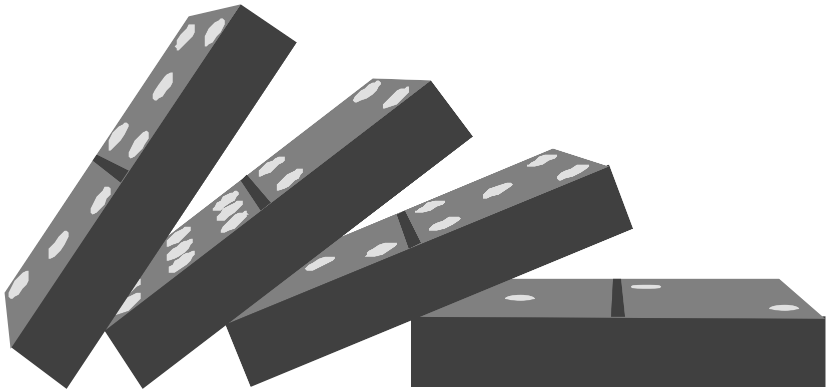
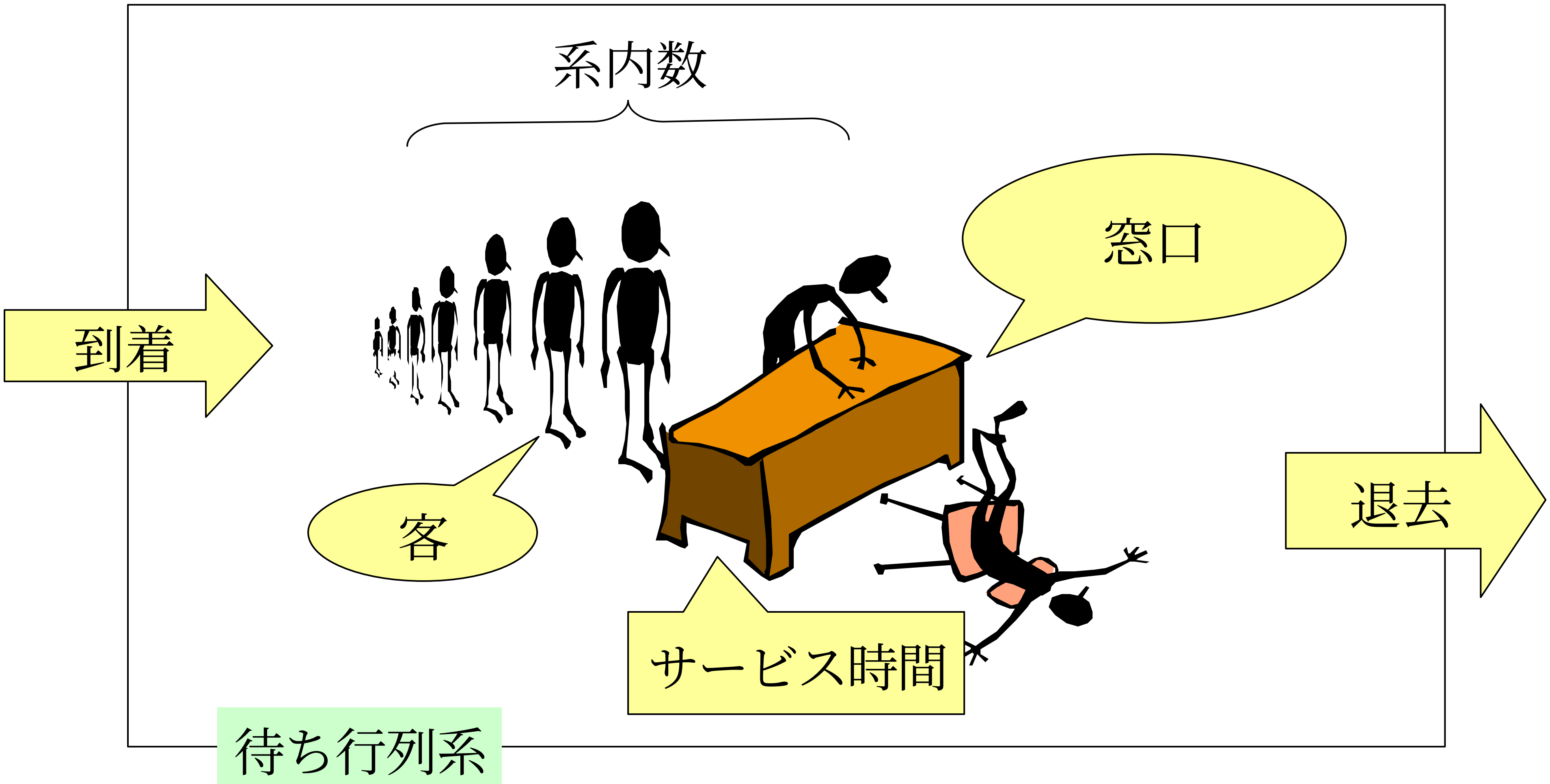


Queueing theory I

待ち行列をシミュレーションする

現実社会では
どのような場面で
発生するだろう?

言葉の定義



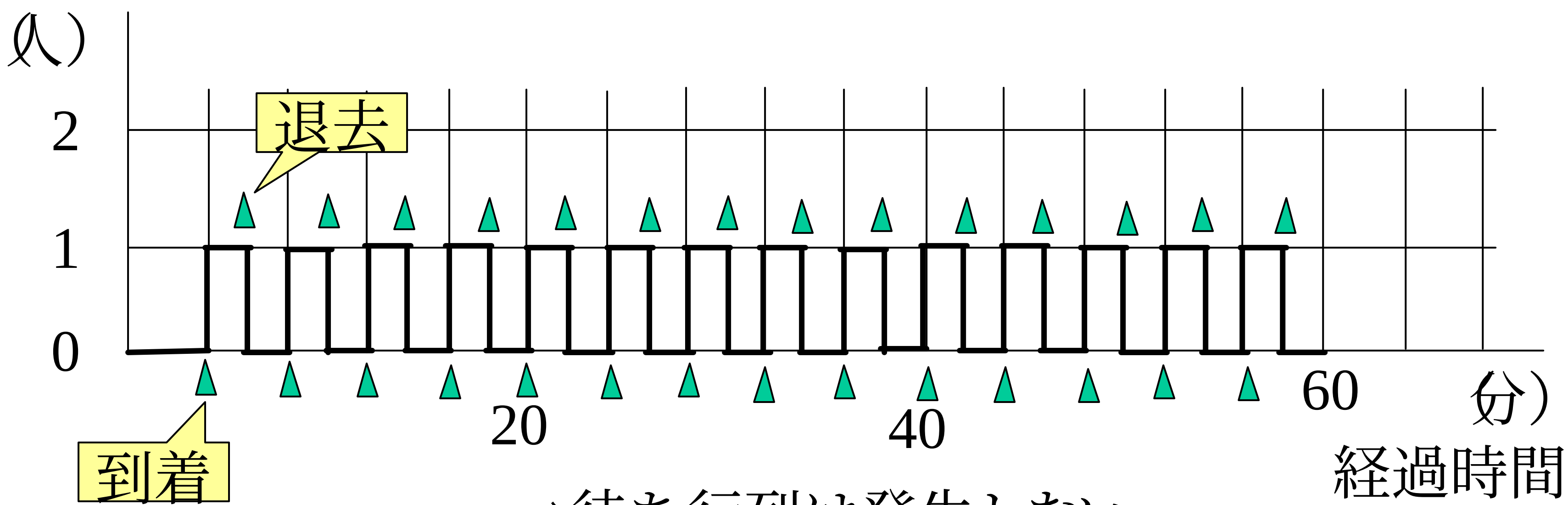
なぜ待ち行列は発生するのか?

- 資源は有限だから!!
  - サービス供給能力が無限なら待ち行列無し
    →現実には有限
- 需給のアンバランス？
  - 例題 :ある窓口
    - 客1人をさばくのに平均2分
    - 客の到着間隔は平均4分
      →待ち行列はできますか?

例題（続き）ばらつきの無い場合

- 客1人をさばくのにちょうど2分
- 客の到着間隔はちょうど4分

窓口の前にいる人数（系内数）



→待ち行列は発生しない

例題（続き）

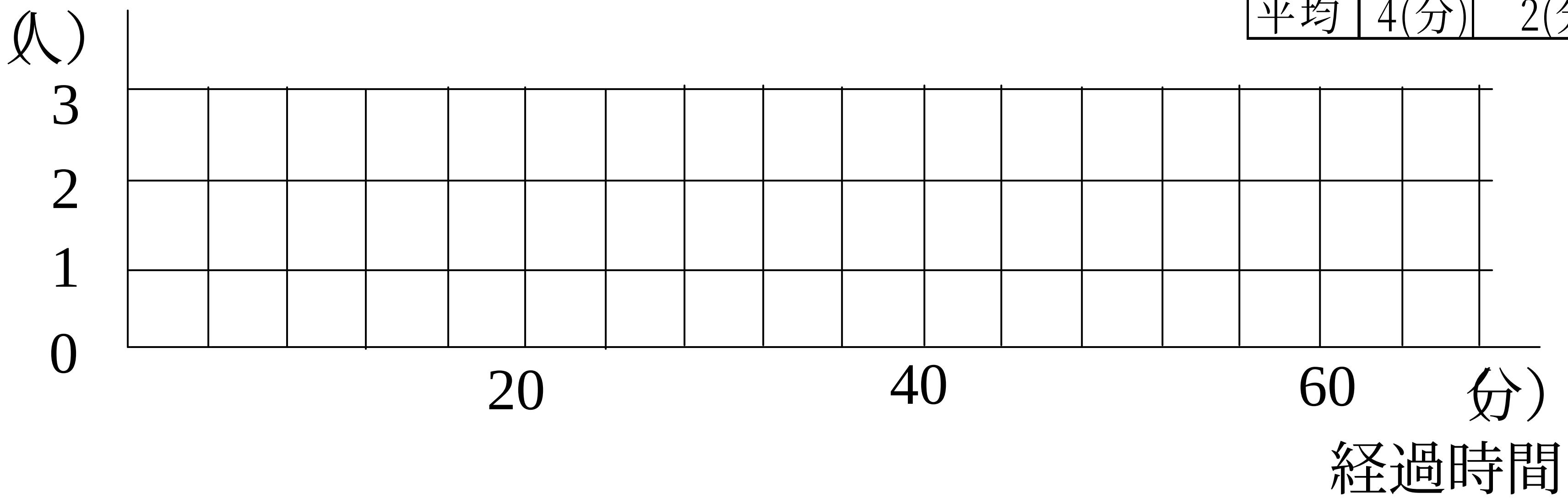
ばらつきの悪戯

- 客1人をさばくのに平均2分
- 客の到着間隔は平均4分

例えば

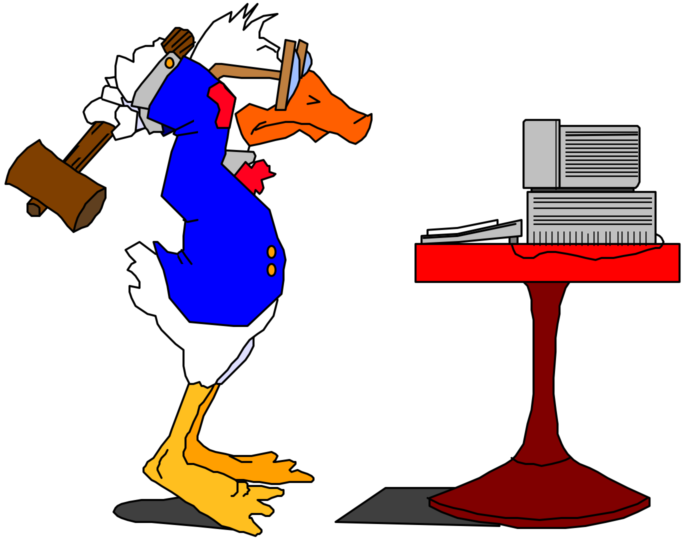
	到着間隔	サービス時間
客1	8	3
客2	2	5
客3	3	2
客4	2	1
客5	2	1
客6	8	2
客7	3	1
客8	4	3
客9	5	1
客10	3	1
平均	4(分)	2(分)

窓口の前にいる人数（系内数）



例題 続き) 待ち行列のデータ

待ち行列の観察結果として知りたいこと
•待ち行列 系内数)の平均 •最大長
•系内滞留平均 •最大時間 など



	到着間隔	サービス時間	到着時間	退去時間	系内滞留時間
客1	8	3			
客2	2	5			
客3	3	2			
客4	2	1			
客5	2	1			
客6	8	2			
客7	3	1			
客8	4	3			
客9	5	1			
客10	3	1			
平均	4(分)	2(分)			

待ち行列理論

- 平均到着間隔＞平均サービス時間
  でも待ち行列ができないとは言えない!!
  →もっと深い洞察が必要
- 通信・OR等の分野で待ち行列を的確に捉える手法が必要になる.

待ち行列理論(queueing theory)の研究

待ち行列のシミュレーション

単位時間内の
到着数

ある待ち行列を観察してわかるもの

– 平均到着間隔(1/λ)⇔平均到着率（λ）
– 平均サービス時間(1/μ) ⇔平均サービス率（μ）

単位時間内の
サービス数

λとμから待ち行列をシミュレーションしてみる

•離散的な再現方法
•連続的な再現方法

待ち行列の様々なデータが得られる

平均到着間隔と到着率の関係

- 平均到着間隔＝ 1/到着率＝1/ λ

  例 ：湘南台駅の切符売場に1時間に20人
  - 到着率は______ (人/時間)
  - 平均到着間隔は________ (時間)
- サービス時間に関しても
  - 平均サービス時間 ＝ 1/サービス率＝1/ μ

待ち行列のシミュレーション方法（1）

乱数を利用する

客の到着間隔	発生確率	対応する乱数
0	0.1	0
1	0.1	1
2	0.1	2
3	0.1	3
4	0.2	4,9
5	0.1	5
6	0.1	6
7	0.1	7
8	0.1	8

サービス時間	発生確率	対応する乱数
0	0.1	00-09
1	0.35	10-44
2	0.3	45-74
3	0.1	75-84
4	0.05	85-89
5	0.05	90-94
6	0.05	95-99

10人の客が
窓口でどのような
待ち行列を作るか
シミュレーション
してみよう

•到着間隔の期待値が4分
•サービス時間の期待値が2分
になるように発生確率を適当に設定した

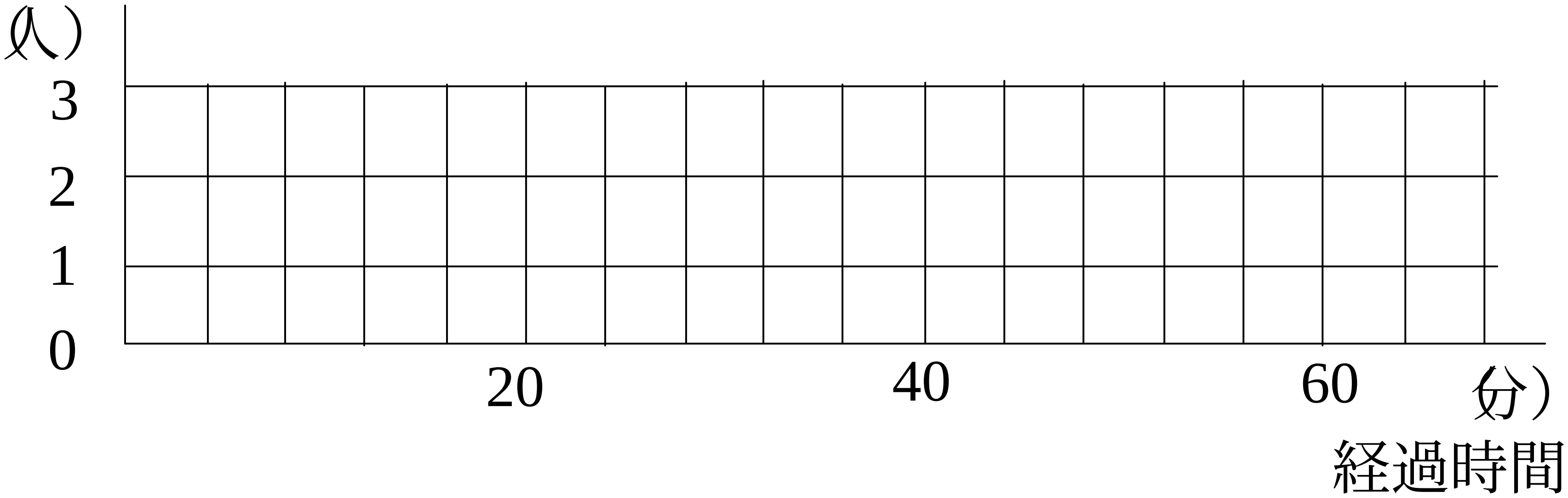
演習1 離散的な待ち行列発生

乱数表を用いて10人の客の動向をシミュレーションしてください.

- 待ち行列の長さの最大長は?
- 一人当たり平均何分待った?

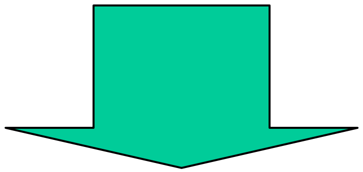
	到着間隔	サービス時間
客1		
客2		
客3		
客4		
客5		
客6		
客7		
客8		
客9		
客10		
平均		

窓口の前にいる人数



離散的なシミュレーションは変じゃない?

- 到着間隔, サービス時間が0分, 1分, …に固定されているのは現実的じゃない.
- 各到着間隔やサービス時間の発生確率は現実に合っているのか?



確率分布の登場
連続的なシミュレーション方法へ!!

“でたらめ”な到着を再現したい

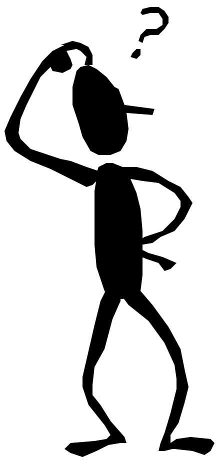
- “でたらめ”な到着とは
  - 無記憶性 :前の客と次の客との関連無し
  - 定常性 :平均的に客の到着は同じ
  - 希少性 :同時に二人以上の客の到着は希

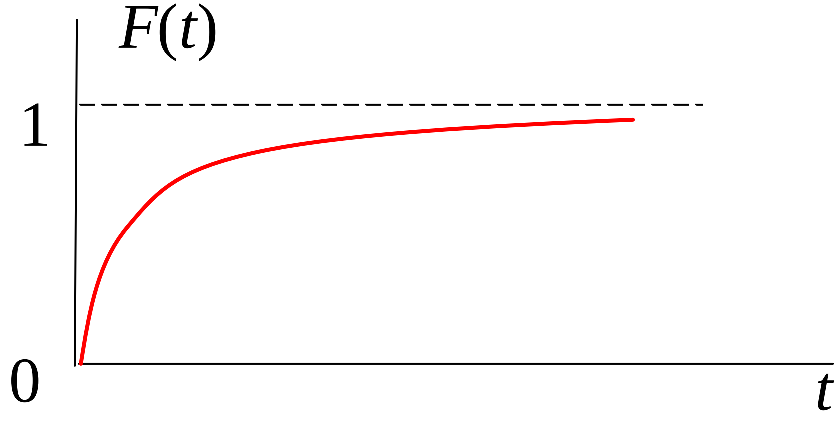
でたらめではない到着とは

- 上記のような性質が無い
- 個々のシミュレーションが必要⇔理論的には扱いにくい

でたらめな到着を観察する

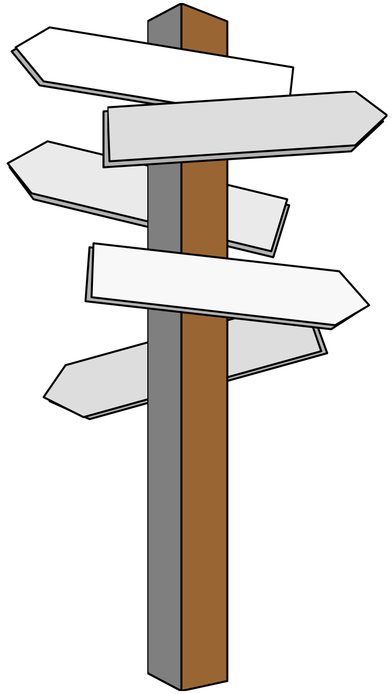
- でたらめな到着を観察すると経験的に客の到着間隔が指数分布に従うことがわかる
- 指数分布：客が間隔t以内で到着する確率$F(t)=1-e^{-\lambda t}$
  - 客の到着率：λ（人/単位時間）
  - e=2.718...（ネイピアの数）





サービス時間を再現したい

- 窓口によりサービス時間の分布は様々
  - でたらめなサービス時間
    - いいかげんなサービス
    - 理論的には扱いやすい
  - 一定なサービス時間
    - ある意味で平等なサービス
  - 独特な分布を持つサービス時間
    - 個々にシミュレーションする必要あり
    - 理論的には扱いにくい場合が多い



でたらめなサービス時間の分布

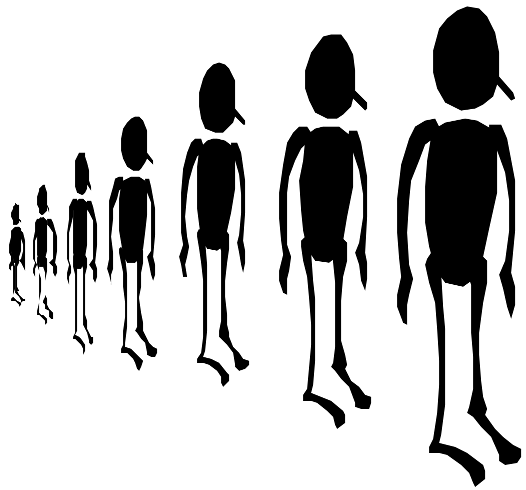
- サービス時間が他の客に依存しない場合は, でたらめな到着間隔と同様, 指数分布に従うことが経験的にわかっている.
- サービス率：μ (人/時間)
- サービス時間がt以内になる確率 $F(t)=1-e^{-\mu t}$

指数分布に従う乱数の生成方法

- [0,1)区間の一様乱数uに対して

$$w = -\frac{1}{l}\log_e(1-u)$$

- wは平均到着率がλの指数分布に従う乱数になる



演習2 :連続的なシミュレーション

ある窓口：

- 平均到着率 λ =10人/時間
- 平均サービス率 μ =15人/時間
- 客の到着間隔もサービス時間もでたらめ

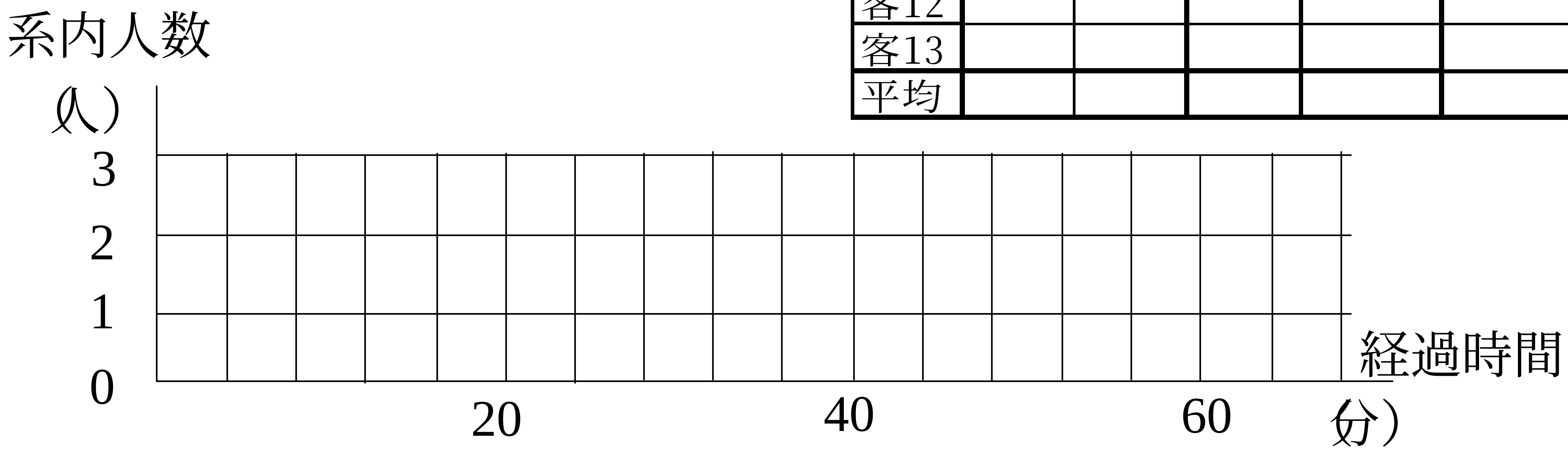
この窓口の1時間の様子のシミュレーションしなさい.

- 最大の系内数は?
- 客の系内滞留時間の最大・平均は？

演習2 作業シート

- 一様乱数は乱数表で発生させる
- 変換式で到着間隔, サービス時間を導出
- 待ち行列の様子を再現する
- 系内滞留時間等のデータを算出する

	一様乱数	到着間隔	一様乱数	サービス時間	系内滞留時間
客1					
客2					
客3					
客4					
客5					
客6					
客7					
客8					
客9					
客10					
客11					
客12					
客13					
平均					



演習3

- 演習2において
  - $\lambda = \mu = 10$の時
  - $\lambda = 10, \mu = 5$の時

  の待ち行列の様子を観察せよ.待ち行列はどうなるだろう?
- 手作業は大変→コンピュータの利用
  - Excelでの自然対数関数：=LN(数値)

乱数によるシミュレーション

- 一様乱数から指数分布に従う乱数を生成すれば, 以下の状況が再現できる.
  - でたらめな客の到着間隔
  - でたらめな窓口でのサービス時間

シミュレーション
実験へ

ただし,

上記の場合は指数分布の式の扱いやすさを利用し
実験ではなく解析により様々な結果が得られる.

待ち行列理論へ

次回は

- シミュレーションではなく解析的に待ち行列の様々なデータを算出してみよう.