



ソルバーの中身を理解する(2)

Integer Programming
整数計画法の基礎

ここで学ぶこと

- ソルバーの中身で行なっていることを知る
- 整数計画問題とその緩和問題の関係
- 整数計画問題を解くアプローチ方法
 - 分枝限定法
 - 切除平面法

整数計画とは (Integer Programming)

似てるよね

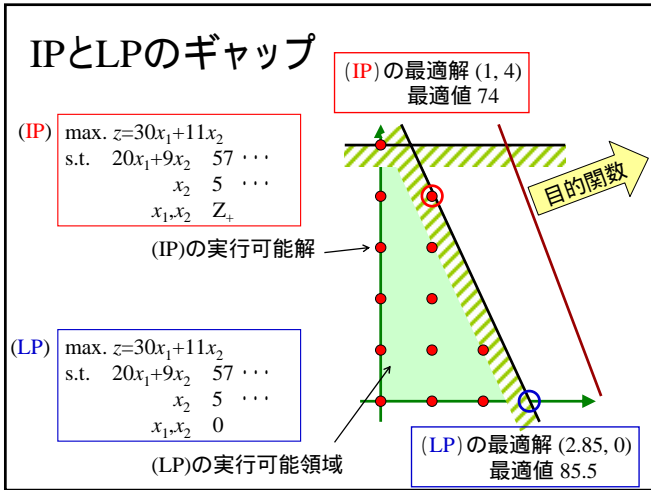


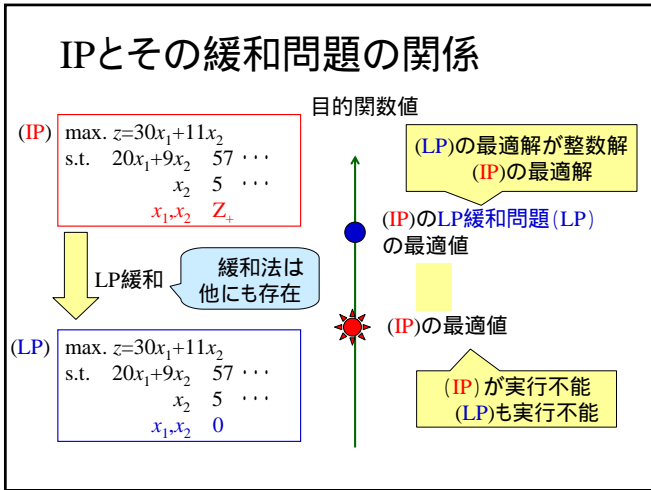
え?

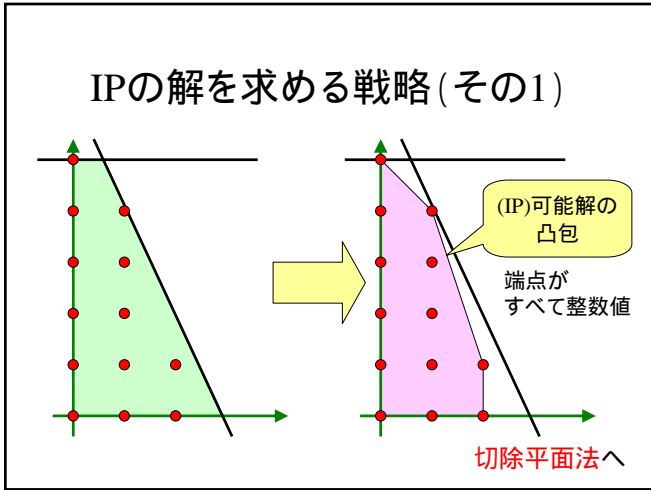
あいびー
省略して「IP」とも呼ぶ

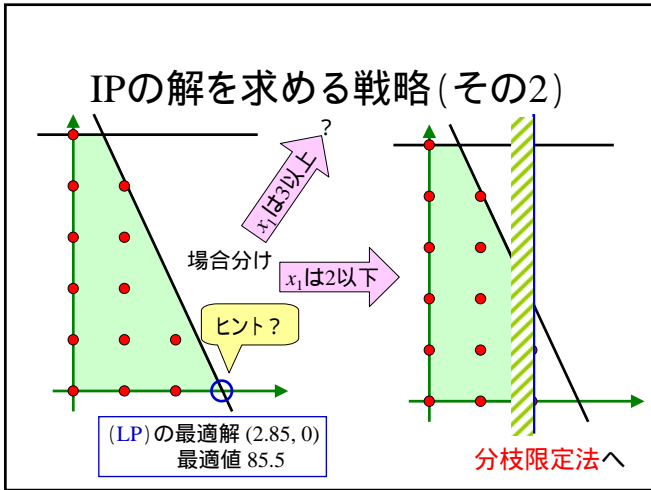
(IP) = (LP) + 各変数は整数の値

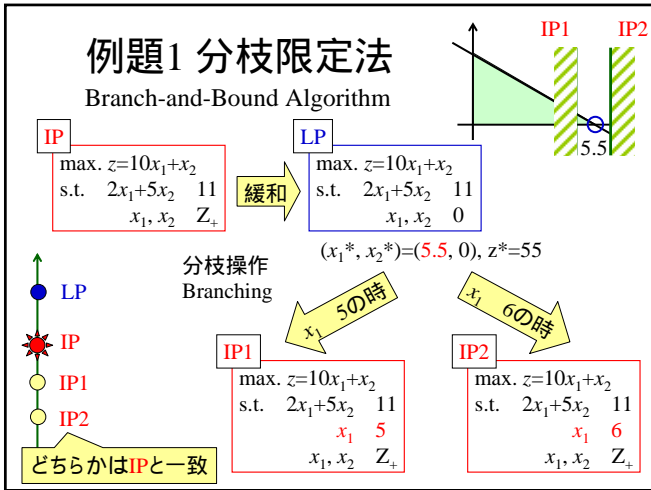
(IP)と(LP)の間には大きなギャップ

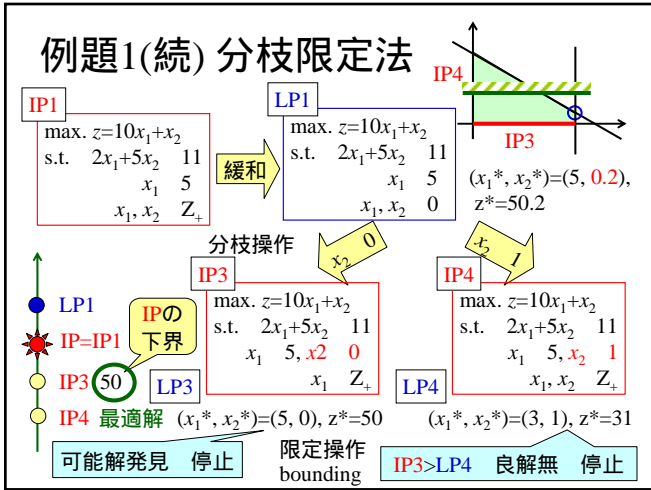




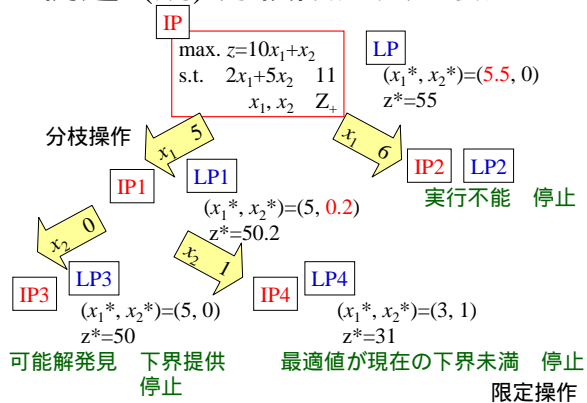








例題1(続) 分枝限定法の動き



分枝限定法

次の子問題の
選択方法は?

緩和問題の
作成法は?

設計方法
は多数有

- (IP)の緩和問題(LP)を解く
- (現在の下界) > z* ?
 - YES! 今の可能解の中に最適解は無い + 停止
 - No! x*が整数解?
 - YES! 暫定解発見 下界更新 + 停止
 - No! 今の可能解の中に最適解があるかも...
分枝操作で子問題作成

子問題が無くなるまで
繰り返し

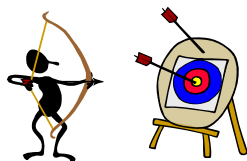
有限回

分枝操作する変数
の選択方法は?

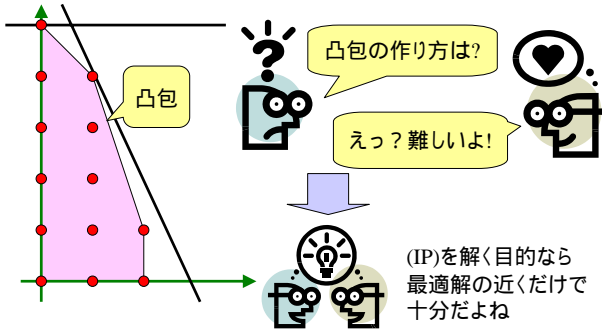
練習1

- 次の(IP)を分枝限定法で解いてみよう
- LPの最適解導出はLINDOを利用しよう

IP
 $\max. z=3x_1+4x_2$
 $\text{s.t. } 2x_1+x_2 \leq 6$
 $2x_1+3x_2 \leq 9$
 $x_1, x_2 \geq 0$



切除平面法



(IP) $\max. z=2x_1+x_2$
 $s.t. \quad 2x_1+5x_2 = 17$
 $3x_1+2x_2 = 5$
 $x_1, x_2 \geq 0$

例題2 切除平面法

初期のシンプレックス表

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
s_1	0	2	5	1	0	17
s_2	0	3	2	0	1	5
z	1	-2	-1	0	0	0

LP緩和

(LP) $\max. z=2x_1+x_2$
 $s.t. \quad 2x_1+5x_2 = 17$
 $3x_1+2x_2 = 5$
 $x_1, x_2 \geq 0$

標準形に変形

$\max. z=2x_1+x_2$
 $s.t. \quad 2x_1+5x_2+s_1 = 17$
 $3x_1+2x_2+s_2 = 5$
 $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

最終段階のシンプレックス表

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
s_1	0	0	11/3	1	-2/3	31/3
x_1	0	1	2/3	0	1/3	10/3
z	1	0	1/3	0	2/3	20/3

スラック変数も整数値

$(x_1^*, x_2^*) = (10/3, 0), z^* = 20/3$

例題2(続) Gomory不等式

最終段階のシンプレックス表

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
s_1	0	0	11/3	1	-2/3	31/3
x_1	0	1	2/3	0	1/3	10/3
z	1	0	1/3	0	2/3	20/3

Chvatal-Gomoryの手続き

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}s_2 = \frac{10}{3}$$

左辺係数を切捨てて整数化

$$x_1 + 0x_2 + 0s_2 \leq \frac{10}{3}$$

定数項を切り下げで整数化

$$x_1 + 0x_2 + 0s_2 \leq 3$$

Chvatal-Gomory不等式
 フバタル=ゴモリー

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}s_2 = \frac{10}{3}$$

$$-) \quad x_1 + 0x_2 + 0s_2 \leq 3$$

$$\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}s_2 \geq \frac{1}{3}$$

Gomory不等式
 ゴモリー

例題2(続) Gomory不等式の性質

Gomory不等式 $x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}s_2 = \frac{10}{3}$ Chvatal-Gomory不等式

$$\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}s_2 \geq \frac{1}{3}$$

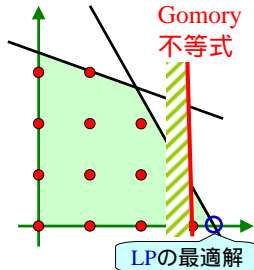


$$x_1 + 0x_2 + 0s_2 \leq 3$$

- (LP)の最適解(10/3, 0)は排除
- (IP)の可能解((LP)の整数解)は排除していない

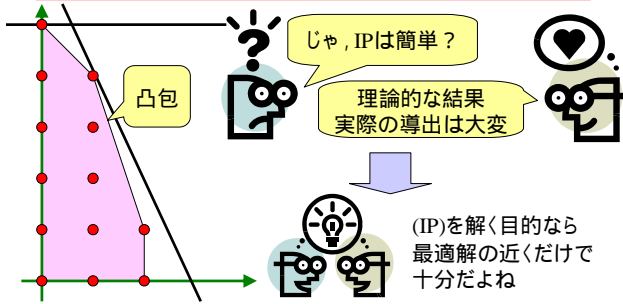
妥当不等式 (valid inequalities) ある点

実行可能解の集合



Chvatalの大発見(1973)

- Gomory-Chvatalの手続きで(IP)のすべての妥当不等式を生成できる!



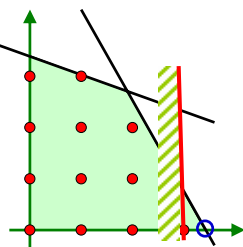
(LP) $\max. z = 2x_1 + x_2$
 s.t. $2x_1 + 5x_2 = 17$
 $3x_1 + 2x_2 = 5$
 $x_1, x_2 = 0$

Gomory不等式挿入

(LP1) $\max. z = \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}s_2$
 s.t. $\frac{11}{3}x_2 + s_1 - \frac{2}{3}s_2 = 17$
 $x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}s_2 = 5$
 $\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}s_2 + \frac{1}{3}t_1 = \frac{1}{3}$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, t_1 = 0$

標準形に変形

$\max. z = \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}s_2$
 s.t. $\frac{11}{3}x_2 + s_1 - \frac{2}{3}s_2 = 17$
 $x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}s_2 = 5$
 $\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}s_2 + s_3 - t_1 = \frac{1}{3}$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, t_1 = 0$



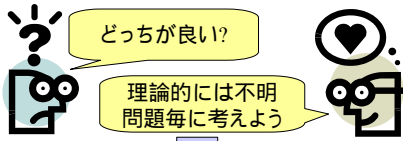
最適解導出

例題2(続) Gomory不等式の 利用法

まとめ:

IPに対する代表的解法

- 分枝限定法
- 切除平面法



問題に構造がある場合は、構造を利用し

- 効果的な分枝方法 + 限定方法を利用
- より強い切除平面を利用

→ 多面体論, 実験的解析などの分野へ

寄り道 LINDO

IPを解いた場合の画面

ステータスwindow

Callout	Value
解の状態	Optimal
繰返し数	48
最適値	44550
整数解での最良値	44550
最も良い上界値	46650
分枝した数	6
計算時間	00:00:00

一覧したら「Close」

LINDO リポートWindow(IP編)

解探索の様子を記述

分枝の様子

時系列

限定の様子

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP 9
OBJECTIVE VALUE = 44418.1836

SET ZA TO >= 11 AT 1, BND= -0.4552E+05 TWIN=-0.4447E+05 20
SET C TO >= 83 AT 2, BND= -0.4574E+05 TWIN=-0.1000E+31 27
SET ZA TO <= 11 AT 3, BND= -0.4574E+05 TWIN=-0.4882E+05 31
SET XA TO <= 2 AT 4, BND= -0.4582E+05 TWIN=-0.4792E+05 36
SET ZB TO <= 0 AT 5, BND= -0.4584E+05 TWIN=-0.4785E+05 38

NEW INTEGER SOLUTION OF 45840.0000 AT BRANCH 5 PIVOT 38
BOUND ON OPTIMUM: 44468.18
DELETE ZB AT LEVEL 5
DELETE XA AT LEVEL 4
DELETE ZA AT LEVEL 3
DELETE C AT LEVEL 2
FLIP ZA TO <= 10 AT 1 WITH BND= -44468.184
SET XA TO <= 2 AT 2, BND= -0.4455E+05 TWIN=-0.4665E+05 47

NEW INTEGER SOLUTION OF 44550.0000 AT BRANCH 6 PIVOT 47
BOUND ON OPTIMUM: 44550.00
DELETE XA AT LEVEL 2
DELETE ZA AT LEVEL 1
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES= 6 PIVOTS= 47
```

LINDO リポートWindow(IP編)

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 44550.00

最適値

最適解

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
A	11.000000	300.000000
B	19.000000	150.000000

省略

ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES

2) 0.000000 0.000000

3) 0.000000 0.000000

省略

繰り返し数

分枝数

NO. ITERATIONS= 48
BRANCHES= 6 DETERM.= 1.000E 0
