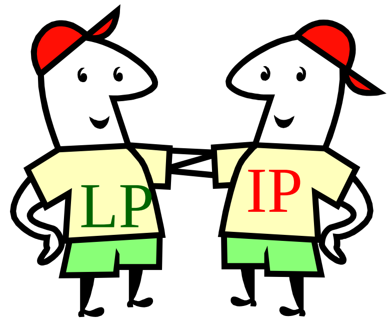
システム工学特講第1



ソルバーの中身を理解する (2)

Integer Programming

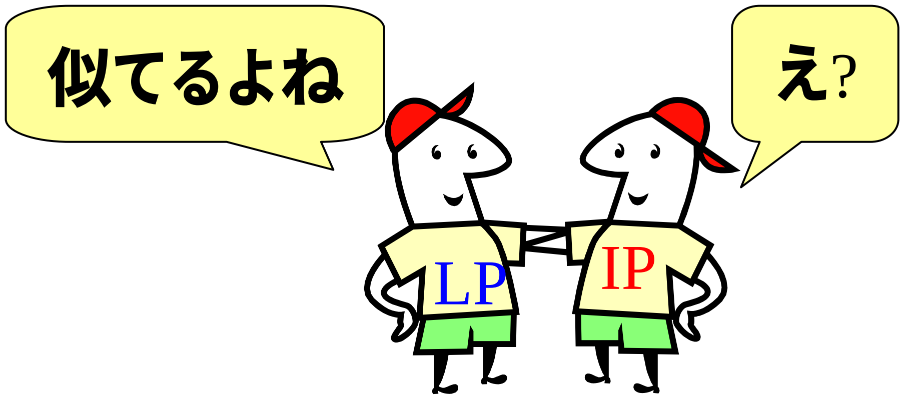
整数計画法の基礎

ここで学ぶこと

- ソルバーの中身で行なっていることを知る
- 整数計画問題とその緩和問題の関係
- 整数計画問題を解くアプローチ方法
  - 分枝限定法
  - 切除平面法

整数計画とは
(Integer Programming)

あいぴー
省略して「IP」とも呼ぶ



(IP)＝(LP)＋各変数は整数の値

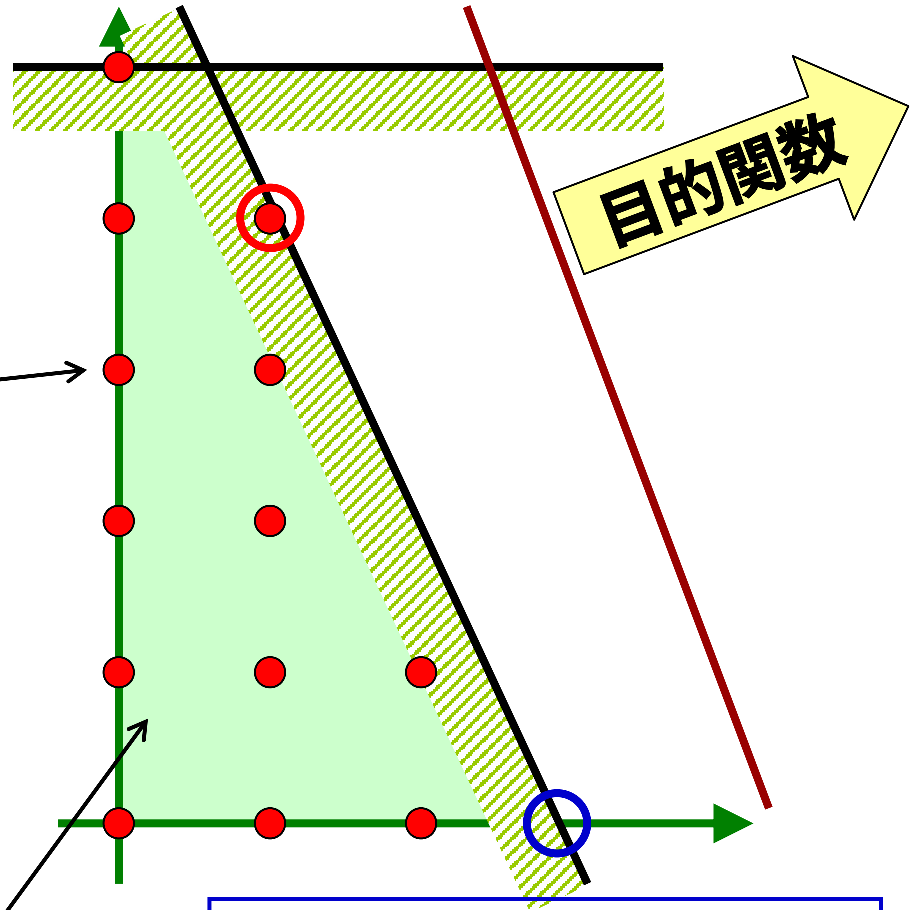
(IP)と(LP)の間には大きなギャップ

IPとLPのギャップ

(IP) の最適解 (1, 4)
最適値 74

(IP)

$$\max.\ z=30x_1+11x_2$$
$$\text{s.t.}\quad 20x_1+9x_2 \leqq 57 \quad \cdots ①$$
$$x_2 \leqq 5 \quad \cdots ②$$
$$x_1, x_2 \in Z_+$$



(IP)の実行可能解

(LP)

$$\max.\ z=30x_1+11x_2$$
$$\text{s.t.}\quad 20x_1+9x_2 \leqq 57 \quad \cdots ①$$
$$x_2 \leqq 5 \quad \cdots ②$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

(LP) の最適解 (2.85, 0)
最適値 85.5

(LP)の実行可能領域

IPとその緩和問題の関係

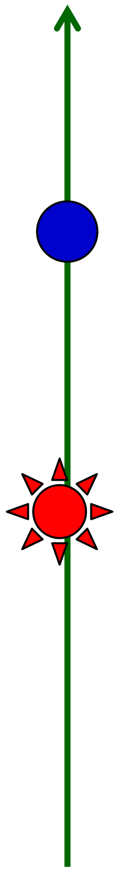
(IP)
$$\begin{aligned} \max.\ & z=30x_1+11x_2 \\ \text{s.t.}\ & 20x_1+9x_2 \leqq 57 \quad \cdots ① \\ & x_2 \leqq 5 \quad \cdots ② \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

LP緩和

※緩和法は他にも存在

(LP)
$$\begin{aligned} \max.\ & z=30x_1+11x_2 \\ \text{s.t.}\ & 20x_1+9x_2 \leqq 57 \quad \cdots ① \\ & x_2 \leqq 5 \quad \cdots ② \\ & x_1, x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

目的関数値



(LP)の最適解が整数解
⇒(IP)の最適解

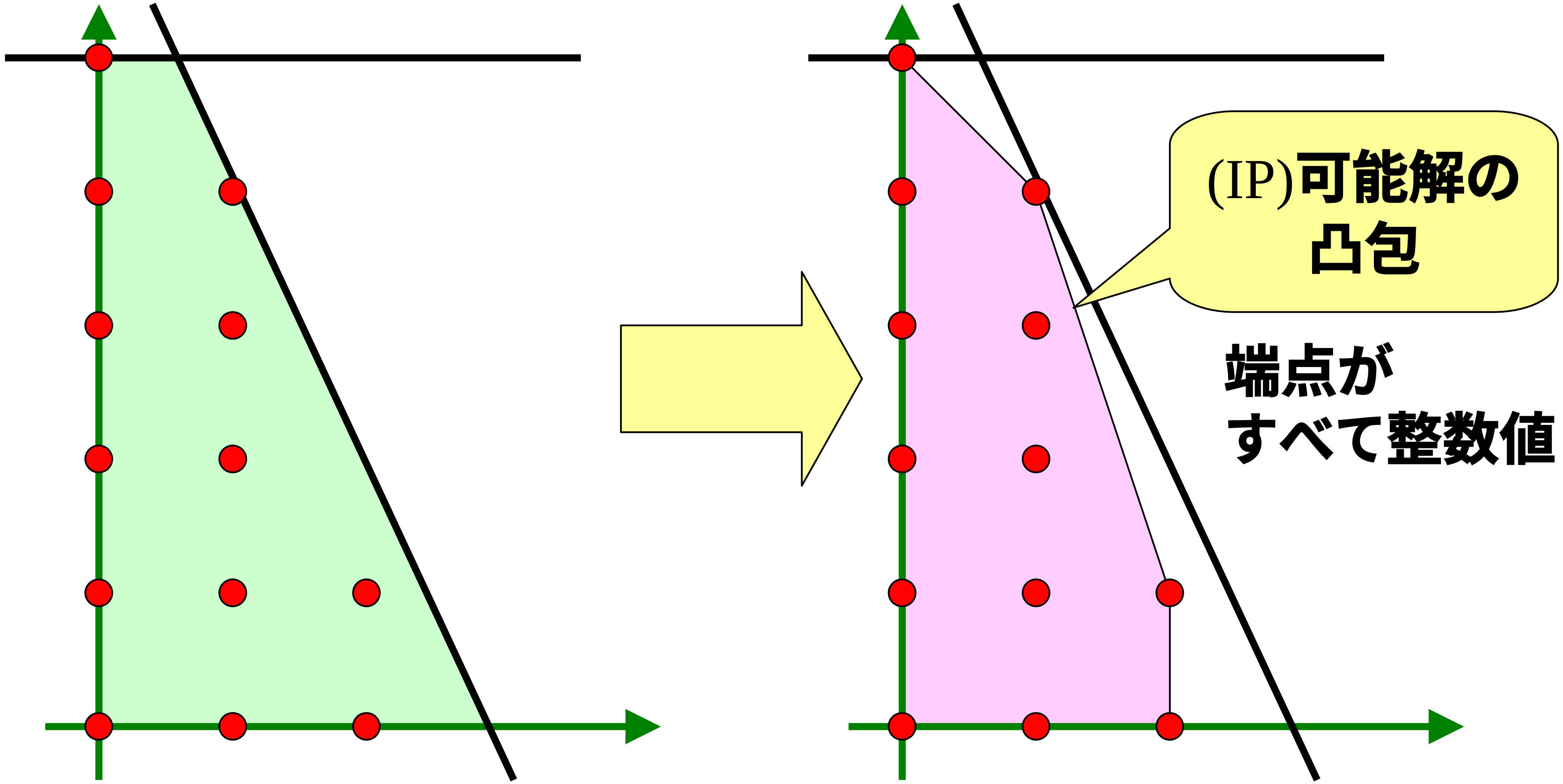
(IP)のLP緩和問題 (LP)
の最適値

≧

(IP)の最適値

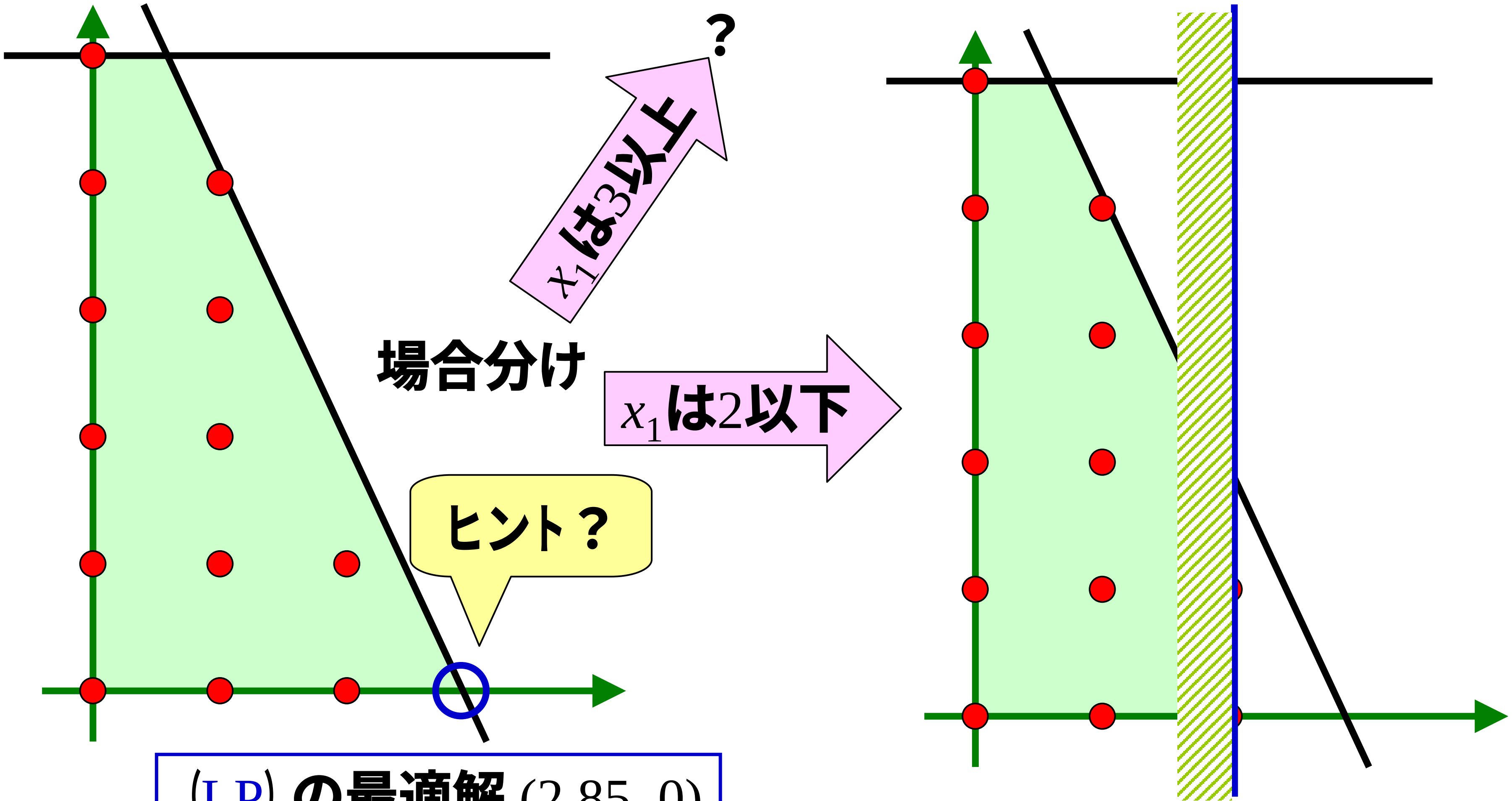
(IP) が実行不能
⇒(LP)も実行不能

IPの解を求める戦略（その1）



⇒**切除平面法**へ

IPの解を求める戦略（その2）

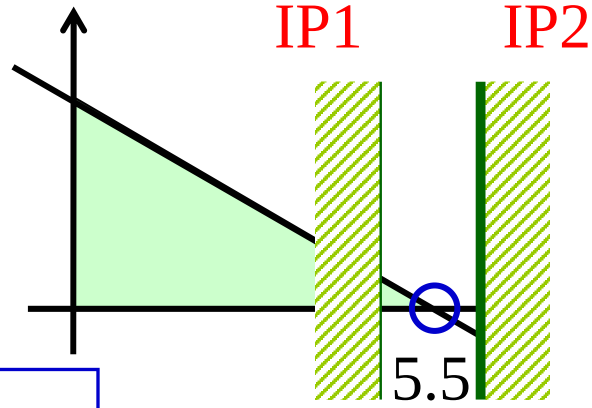


（LP）の最適解 (2.85, 0)
最適値 85.5

⇒分枝限定法へ

例題1 分枝限定法

Branch-and-Bound Algorithm



IP

max. $z=10x_1+x_2$

s.t. $2x_1+5x_2 \leqq 11$

$x_1, x_2 \in Z_+$

緩和

LP

max. $z=10x_1+x_2$

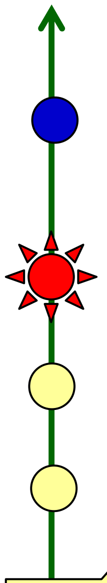
s.t. $2x_1+5x_2 \leqq 11$

$x_1, x_2 \geqq 0$

$(x_1^*, x_2^*)=(5.5, 0)$, $z^*=55$

分枝操作

Branching



どちらかはIPと一致

$x_1 \leqq 5$の時

$x_1 \geqq 6$の時

IP1

max. $z=10x_1+x_2$

s.t. $2x_1+5x_2 \leqq 11$

$x_1 \leqq 5$

$x_1, x_2 \in Z_+$

IP2

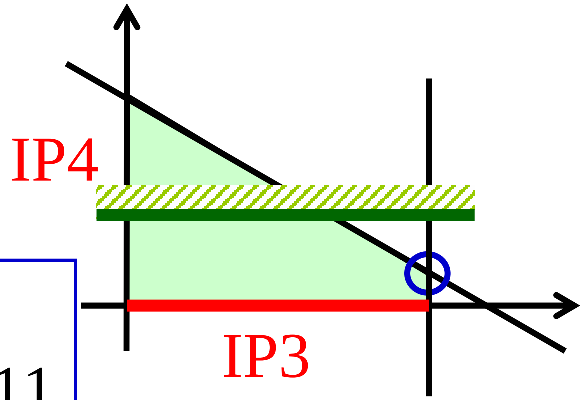
max. $z=10x_1+x_2$

s.t. $2x_1+5x_2 \leqq 11$

$x_1 \geqq 6$

$x_1, x_2 \in Z_+$

例題1(続) 分枝限定法



IP1

max. $z=10x_1+x_2$

s.t. $2x_1+5x_2 \leqq 11$

$x_1 \leqq 5$

$x_1, x_2 \in Z_+$

緩和 ⇒

LP1

max. $z=10x_1+x_2$

s.t. $2x_1+5x_2 \leqq 11$

$x_1 \leqq 5$

$x_1, x_2 \geqq 0$

$(x_1^*, x_2^*)=(5, 0.2)$,

$z^*=50.2$

分枝操作

$x_2 \leqq 0$　　$x_2 \geqq 1$

IP3

max. $z=10x_1+x_2$

s.t. $2x_1+5x_2 \leqq 11$

$x_1 \leqq 5$, $x2 \leqq 0$

$x_1 \in Z_+$

IP4

max. $z=10x_1+x_2$

s.t. $2x_1+5x_2 \leqq 11$

$x_1 \leqq 5$, $x_2 \geqq 1$

$x_1, x_2 \in Z_+$

LP1

IP=IP1

IPの下界

IP3 50

IP4 **最適解**

LP3

$(x_1^*, x_2^*)=(5, 0)$, $z^*=50$

LP4

$(x_1^*, x_2^*)=(3, 1)$, $z^*=31$

可能解発見⇒停止

限定操作

bounding

IP3>LP4⇒良解無⇒停止

例題1(続) 分枝限定法の動き

IP

max. $z=10x_1+x_2$

s.t. $2x_1+5x_2 \leqq 11$

$x_1, x_2 \in Z_+$

LP

$(x_1^*, x_2^*)=(5.5, 0)$

$z^*=55$

分枝操作

$x_1 \leqq 5$

$x_1 \geqq 6$

IP1 LP1

$(x_1^*, x_2^*)=(5, 0.2)$

$z^*=50.2$

IP2 LP2

実行不能⇒停止

$x_2 \leqq 0$

$x_2 \geqq 1$

IP3 LP3

$(x_1^*, x_2^*)=(5, 0)$

$z^*=50$

可能解発見⇒下界提供

⇒停止

IP4 LP4

$(x_1^*, x_2^*)=(3, 1)$

$z^*=31$

最適値が現在の下界未満⇒停止

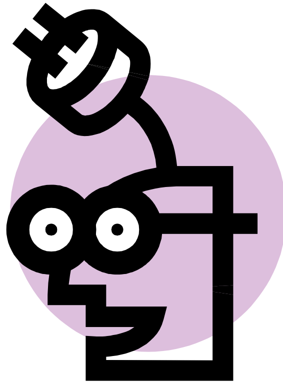
限定操作

分枝限定法

次の子問題の選択方法は?

緩和問題の作成法は?

設計方法は多数有



- (IP)の緩和問題(LP)を解く
- (現在の下界) >z* ?
  - YES!　今の可能解の中に最適解は無い＋停止
  - No!　*x**が整数解?

複数の解が存在する時は?

    - YES! 暫定解発見→下界更新＋停止
    - No!　今の可能解の中に最適解があるかも…
      分枝操作で子問題作成

分子操作する変数の選択方法は?

子問題が無くなるまで繰り返し

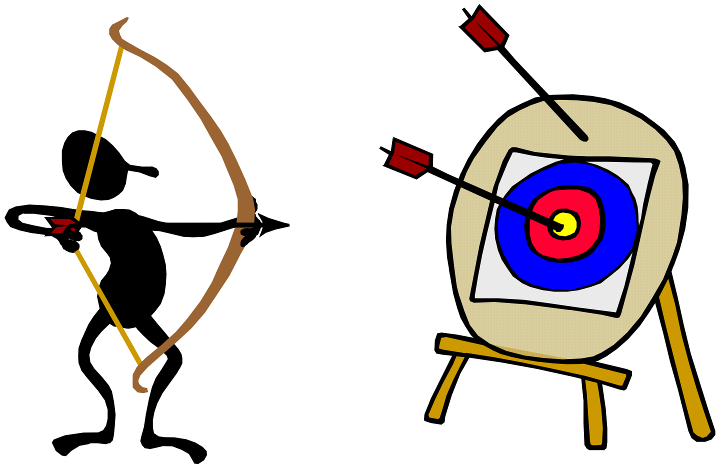
有限回

練習1

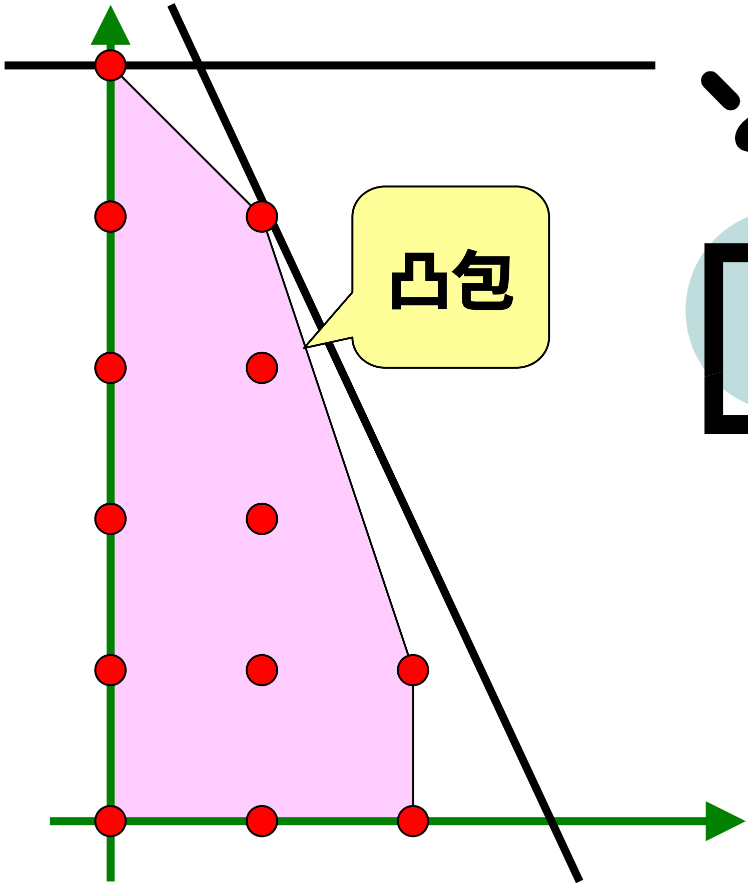
- 次の(IP)を分枝限定法で解いてみよう
- LPの最適解導出はLINDOを利用しよう

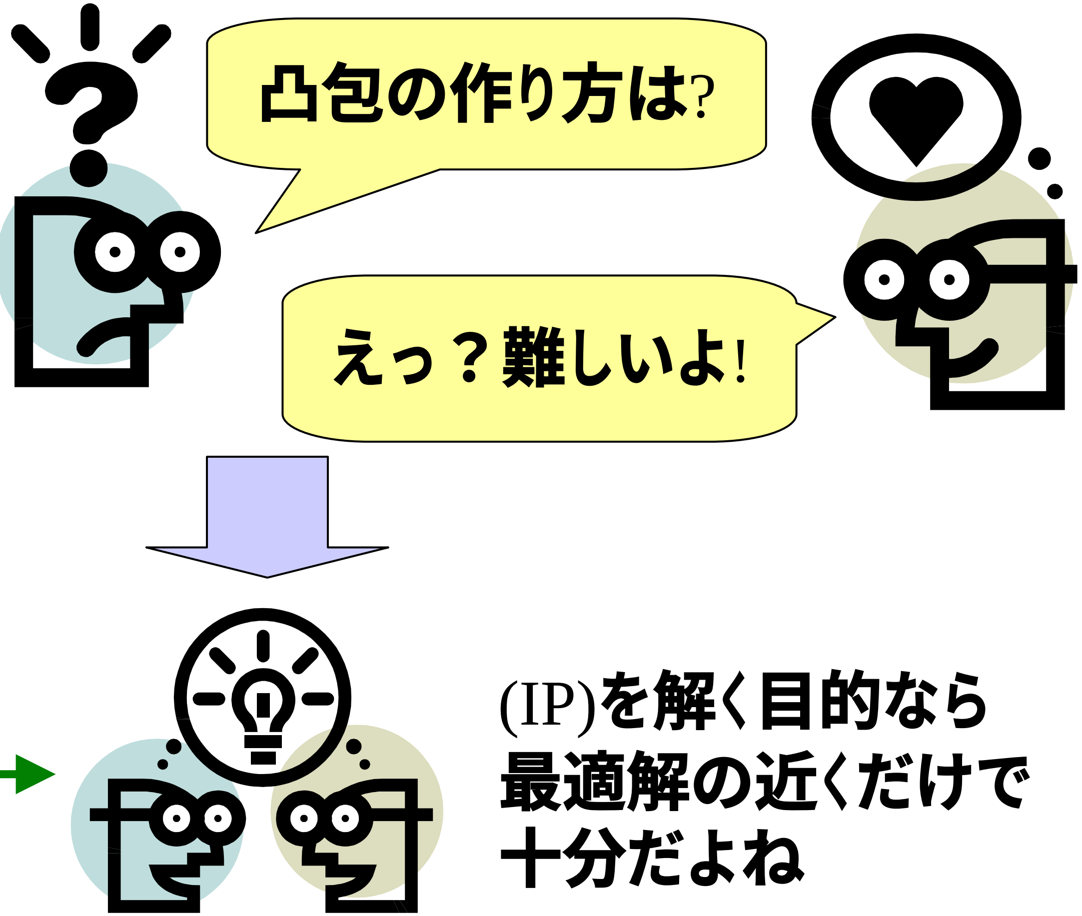
IP

$$
\begin{aligned}
\text{max. } & z=3x_1+4x_2 \\
\text{s.t. } & 2x_1+\ \ x_2 \leqq 6 \\
& 2x_1+3x_2 \leqq 9 \\
& x_1,\ x_2 \in Z_+
\end{aligned}
$$



切除平面法





(IP)を解く目的なら
最適解の近くだけで
十分だよね

例題2 切除平面法

(IP)
$$\begin{aligned} \max.\ & z=2x_1+x_2 \\ \text{s.t.}\ & 2x_1+5x_2 \leqq 17 \\ & 3x_1+2x_2 \leqq 5 \\ & x_1, x_2 \in Z_+ \end{aligned}$$

LP緩和

(LP)
$$\begin{aligned} \max.\ & z=2x_1+x_2 \\ \text{s.t.}\ & 2x_1+5x_2 \leqq 17 \\ & 3x_1+2x_2 \leqq 5 \\ & x_1, x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

標準形に変形

$$\begin{aligned} \max.\ & z=2x_1+x_2 \\ \text{s.t.}\ & 2x_1+5x_2+s_1 \quad =17 \\ & 3x_1+2x_2 \quad +s_2=5 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

※ スラック変数も整数値

初期のシンプレックス表

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
s_1	0	2	5	1	0	17
s_2	0	3	2	0	1	5
z	1	-2	-1	0	0	0

最終段階のシンプレックス表

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
s_1	0	0	11/3	1	-2/3	31/3
x_1	0	1	2/3	0	1/3	10/3
z	1	0	1/3	0	2/3	20/3

$(x_1^*, x_2^*)=(10/3, 0),\ z^*=20/3$

例題2(続) Gomory不等式

最終段階のシンプレックス表

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
s_1	0	0	11/3	1	-2/3	31/3
x_1	0	1	2/3	0	1/3	10/3
z	1	0	1/3	0	2/3	20/3

Chvatal-Gomoryの手続き

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}s_2 = \frac{10}{3}$$

左辺係数を切捨てで整数化

$$x_1 + 0x_2 + 0s_2 \leq \frac{10}{3}$$

定数項を切り下げで整数化

$$\boxed{x_1 + 0x_2 + 0s_2 \leq 3}$$

Chvatal-Gomory不等式

フバタル＝ゴモリー

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}s_2 = \frac{10}{3}$$

$$-)\quad x_1 + 0x_2 + 0s_2 \leq 3$$

$$\boxed{\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}s_2 \geq \frac{1}{3}}$$

Gomory不等式

ゴモリー

例題2(続) Gomory不等式の性質

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}s_2 = \frac{10}{3}$$

Gomory不等式

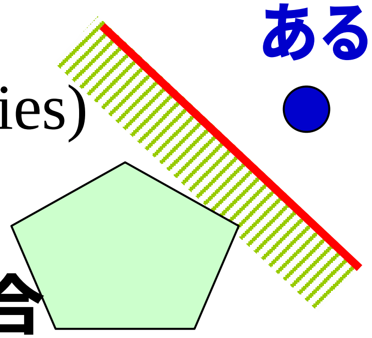
$$\boxed{\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}s_2 \geq \frac{1}{3}}$$

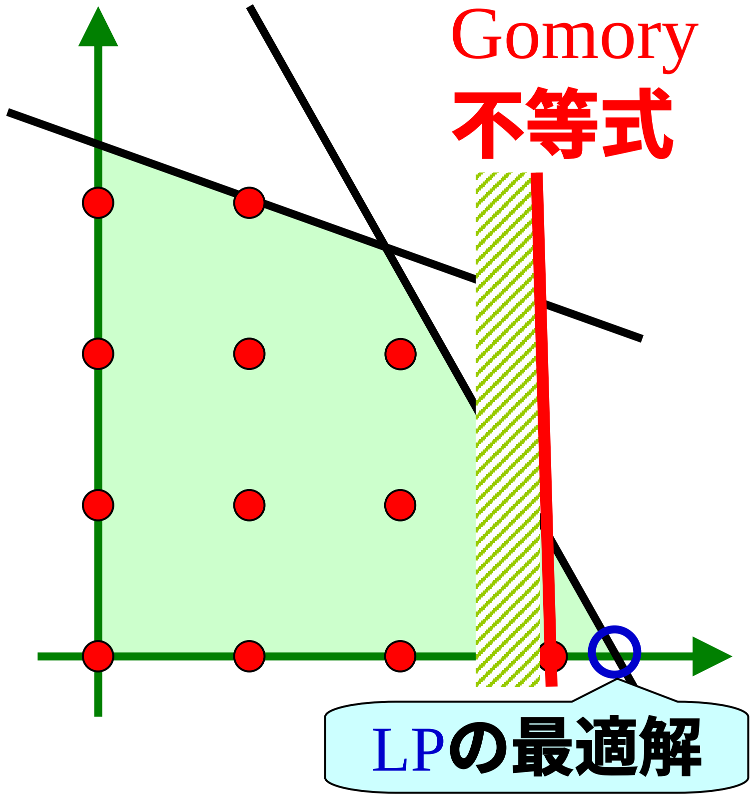
⟺

Chvatal-Gomory不等式

$$\boxed{x_1 + 0x_2 + 0s_2 \leq 3}$$

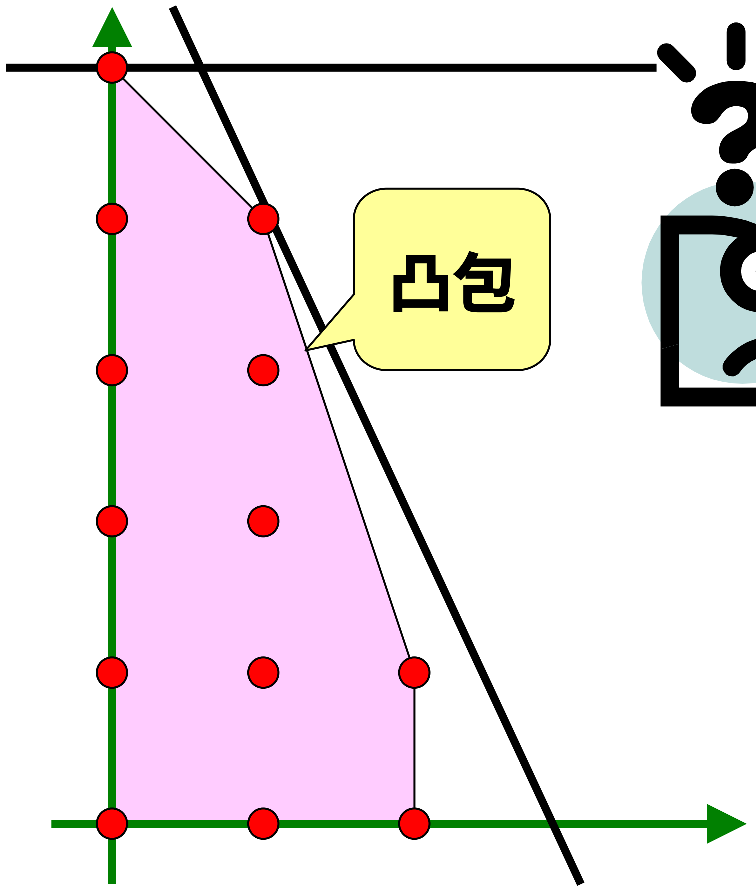
- (LP)の最適解(10/3, 0)は排除
- (IP)の可能解（(LP)の整数解）は排除していない

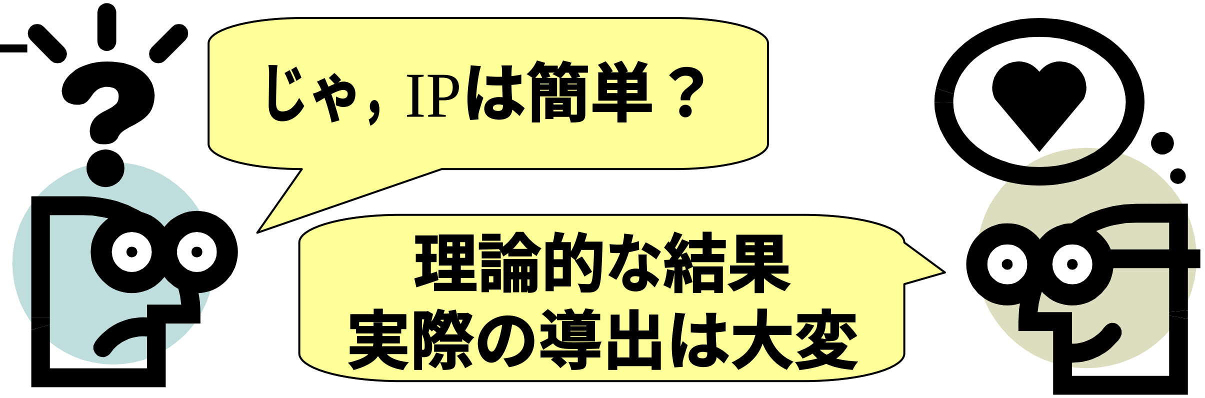


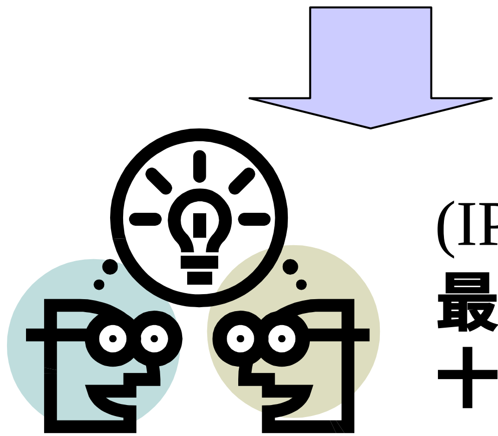


Chvatalの大発見(1973)

- Gomory-Chvatalの手続きで(IP)のすべての妥当不等式を生成できる!







(IP)を解く目的なら
最適解の近くだけで
十分だよね

例題2(続) Gomory不等式の利用法

(LP)

$$\begin{aligned} \max.\ & z=2x_1+x_2 \\ \text{s.t.}\ & 2x_1+5x_2 \leqq 17 \\ & 3x_1+2x_2 \leqq 5 \\ & x_1, x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

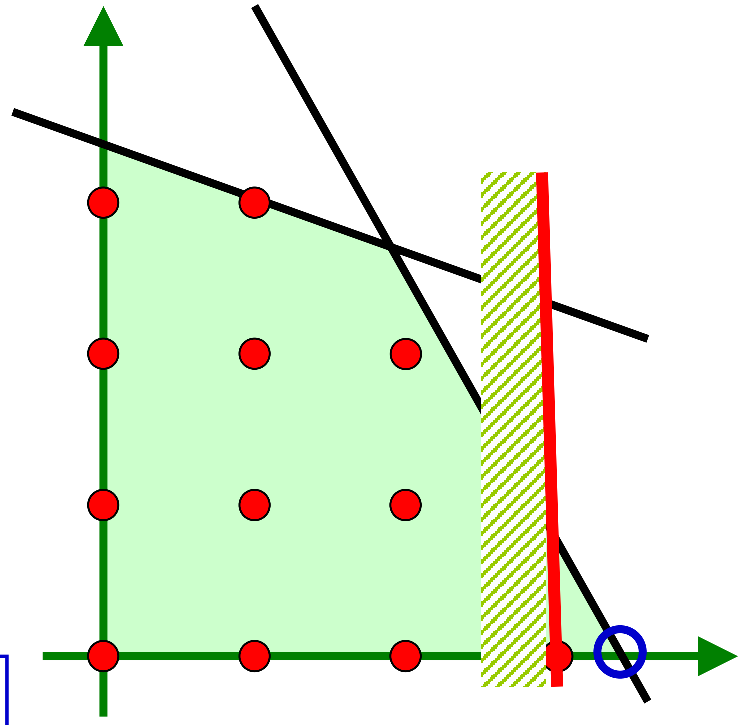
Gomory不等式挿入

(LP1)

$$\begin{aligned} \max.\ z= & \ 1/3x_2 + 2/3s_2 \\ \text{s.t.}\ & 11/3x_2 + s_1 - 2/3s_2 = 17 \\ & x_1 + 2/3x_2 \quad 1/3s_2 = 5 \\ & 2/3x_2 + 1/3s_2 \geqq 1/3 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

標準形に変形

$$\begin{aligned} \max.\ z= & \ 1/3x_2 + 2/3s_2 \\ \text{s.t.}\ & 11/3x_2 + s_1 - 2/3s_2 = 17 \\ & x_1 + 2/3x_2 \quad 1/3s_2 = 5 \\ & 2/3x_2 + 1/3s_2 + s_3 - t_1 = 1/3 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, t_1 \geqq 0 \end{aligned}$$



最適解導出

例題2(続) 切除平面法

(cut algorithm)
(cutting plane -)

(LP1)の最適なシンプレックス表

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	定数項
s_1	0	0	0	1	-5/2	11/6	17/2
x_1	0	1	0	0	0	1/3	3
x_2	0	0	1	0	1/2	-1/2	1/2
z	1	0	0	0	1/2	1/6	13/2

$$x_2 + \frac{1}{2}s_2 - \frac{1}{2}s_3 = \frac{1}{2}$$

Gomory不等式

追加

$$\frac{1}{2}s_2 + \frac{1}{2}s_3 \geq \frac{1}{2}$$

(LP2)

max. $z = 1/2s_2 + 1/6s_3$

s.t. $s_1 - 5/2s_2 + 11/6s_3 = 17/2$

$x_1 + 1/3s_3 = 3$

$x_2 + 1/2s_2 + 1/6s_3 = 1/2$

$1/2s_2 + 1/2s_3 \geqq 1/2$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geqq 0$

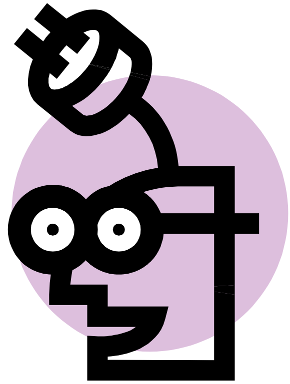
繰り返し

Gomoryの分数カット法

切除平面法

緩和問題の
作成法は?

設計方法
は多数有



- 緩和問題を解く
- 最適解は整数値?
  - YES!→(IP)の最適解⇒停止
  - NO! 妥当不等式を作成
    →緩和問題に挿入

小数解の
選択方法は?

妥当不等式の
作成方法は?

うまく設計すれば
有限回で最適解発見

早いの?

繰り返し

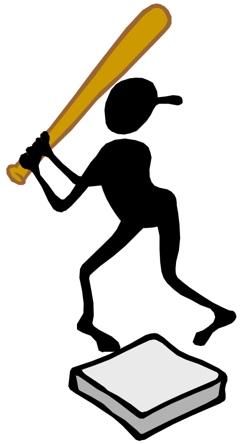
※MIPの場合，有限性は未だ謎

練習2 切除平面法

切除平面法で以下の整数計画問題を解いてみよう

IP

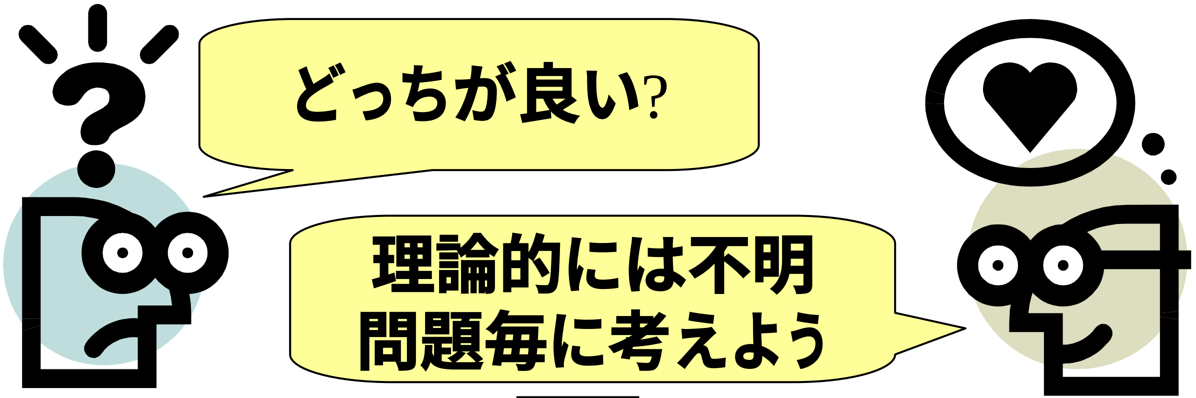
$$
\begin{aligned}
\text{max. } & z = 8x_1 + 5x_2 \\
\text{s.t. } & x_1 + x_2 \leqq 6 \\
& 9x_1 + 5x_2 \leqq 45 \\
& x_1, x_2 \in \mathrm{Z}_+
\end{aligned}
$$



LPはシンプレックス法で，
少し面倒だけど…

まとめ：
IPに対する代表的解法

- **分枝限定法**
- **切除平面法**



問題に構造がある場合は，構造を利用し

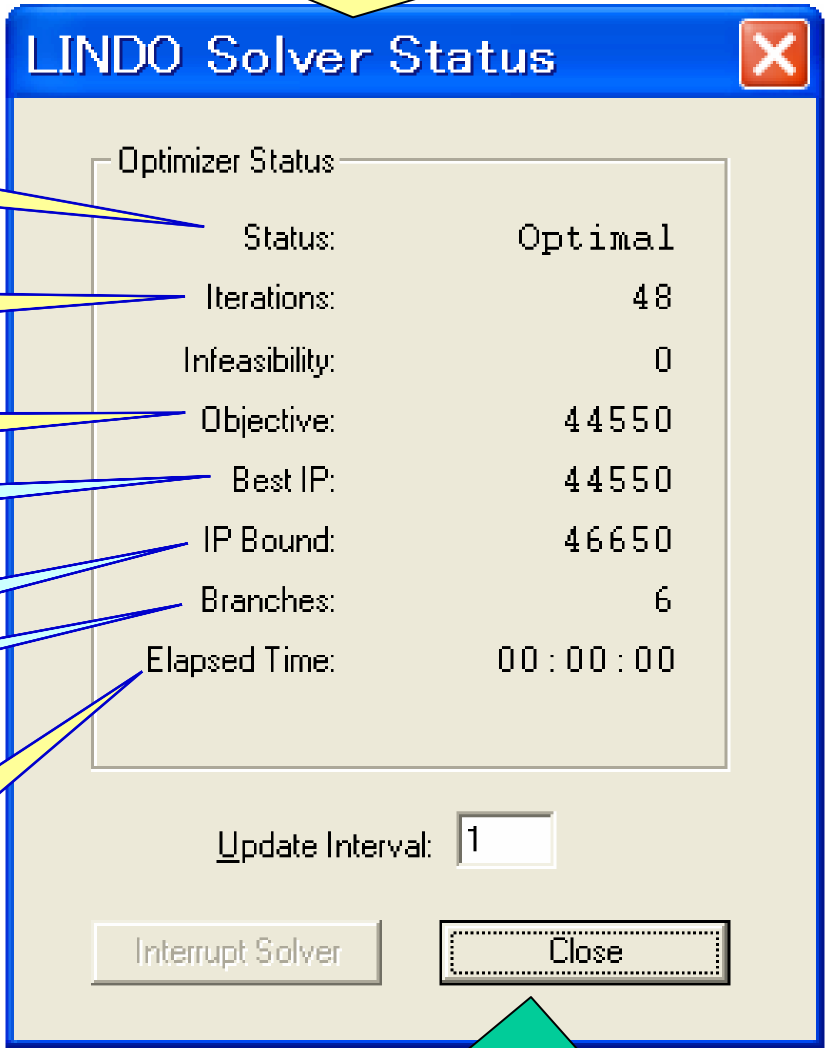
- 効果的な分枝方法＋限定方法を利用
- より強い切除平面を利用

⇒ 多面体論，実験的解析などの分野へ

寄り道 LINDO

IPを解いた場合の画面

ステータスwindow



解の状態

繰返し数

最適値

整数解での最良値

最も良い上界値

分枝した数

計算時間

一覧したら「Close」

LINDO リポートWindow(IP編)

解探索の様子を記述

分枝の様子

時系列

限定の様子

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      9
 OBJECTIVE VALUE =   44418.1836

 SET       ZA TO >=    11 AT    1, BND= -0.4552E+05 TWIN=-0.4447E+05     20
 SET        C TO >=    83 AT    2, BND= -0.4574E+05 TWIN=-0.1000E+31     27
 SET       ZA TO <=    11 AT    3, BND= -0.4574E+05 TWIN=-0.4882E+05     31
 SET       XA TO <=     2 AT    4, BND= -0.4582E+05 TWIN=-0.4792E+05     36
 SET       ZB TO <=     0 AT    5, BND= -0.4584E+05 TWIN=-0.4785E+05     38

 NEW INTEGER SOLUTION OF    45840.0000     AT BRANCH      5 PIVOT      38
 BOUND ON OPTIMUM:  44468.18
 DELETE       ZB AT LEVEL     5
 DELETE       XA AT LEVEL     4
 DELETE       ZA AT LEVEL     3
 DELETE        C AT LEVEL     2
 FLIP       ZA TO <=       10 AT    1 WITH BND=   -44468.184
 SET       XA TO <=     2 AT    2, BND= -0.4455E+05 TWIN=-0.4665E+05     47

 NEW INTEGER SOLUTION OF    44550.0000     AT BRANCH      6 PIVOT      47
 BOUND ON OPTIMUM:  44550.00
 DELETE       XA AT LEVEL     2
 DELETE       ZA AT LEVEL     1
 ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=     6 PIVOTS=      47
```

LINDO リポートWindow(IP編)

```
LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
 RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      44550.00

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        A        11.000000        300.000000
        B        19.000000        150.000000


     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)         0.000000          0.000000
      3)         0.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=      48
 BRANCHES=    6 DETERM.=  1.000E    0
```

最適値

最適解

省略

省略

繰り返し数

分枝数