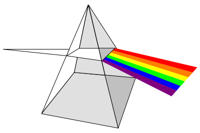
システム工学特講第1

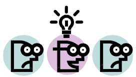


Mathematical Programming

最適化手法の王様
数理計画法

ここで学ぶこと

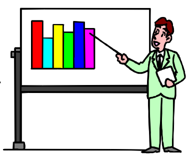
- 数理計画とは
- 数理モデル化と表現方法（定式化）
- 数理計画問題の分類



数理計画とは
Mathematical Programming

与えられた**制約式**のもとで，
ある**関数を最大化**する応用数学の問題
（最小化）

・数理計画＝数理計画問題
（ー problem）
・数理計画問題とそれを解く手法
全般を「**数理計画法**」とよぶ．

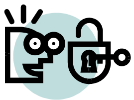


数理計画と問題解決

数理計画（問題）

与えられた**制約式のもと**で，
ある**関数を最大（最小）にする**

比較



問題解決の例：経営の問題

与えられた**資源内**で
利益を最大（費用・リスクを最小）にする

⇒数理計画は数理的な問題解決の中心的な技法として定着

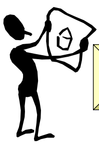
例題1　数式での表現

3種類の原液M1,M2,M3から，
2つの粉末製品P,Qを製造

	製品P 1(kg)	製品Q 1(kg)	使用可能量
原液A	15(kl)	11(kl)	1650(kl/日)
原液B	10(kl)	14(kl)	1400(kl/日)
原液C	9(kl)	20(kl)	1800(kl/日)
利益	5(万円)	4(万円)	

利益が最大になる製品P,Qの1日の生産量は？
問題を数理モデル化しなさい．

数理モデル作成　2つの段階



数理モデル化　　**定式化** formulation

問題理解 ⇒ **問題表現**

観察力・言語理解力

システムとしての把握

- 構成要素は？
  - コントロール可能な要素
  - コントロールできない要素
- 相互関係は？
- コントロール結果の評価方法は？

変数として表現
例：x_1,x_2

定数として表現

数式として表現
例：等式，不等式

関数として表現

例題1(続) 定式化してみよう

- コントロールできる要素：製品P,Qの生産量
  →製品Pの生産量をx_1, 製品Qの生産量をx_2とおく.
- コントロールの制約：原液A,B,Cの使用可能量
- コントロール結果の評価：利益

- 制約を表す不等式は？
- 利益を表す関数は?

数理計画問題の書き方

目的関数 Objective function

最大化
(最小化の時はminimize)

maximize $z=5x_1+4x_2$
subject to $15x_1+11x_2 \leqq 1650$
$10x_1+14x_2 \leqq 1400$
$9x_1+20x_2 \leqq 1800$
$x_1 \geqq 0$
$x_2 \geqq 0$

又は制約条件式
subject to:〜の条件の下で

制約式 Constraints

省略表記

max. $z=5x_1+4x_2$
s.t. $15x_1+11x_2 \leqq 1650$
$10x_1+14x_2 \leqq 1400$
$9x_1+20x_2 \leqq 1800$
$x_1, x_2 \geqq 0$

目的関数の$z=$ も
省略される時あり

用語：実行可能解と最適解

optimal solution

最適解：最適値を達成する実行可能解

max. $z=5x_1+4x_2$
s.t. $15x_1+11x_2 \leqq 1650$
$10x_1+14x_2 \leqq 1400$
$9x_1+20x_2 \leqq 1800$
$x_1,x_2 \geqq 0$

最適値：目的関数の最大値

optimal value

feasible solution

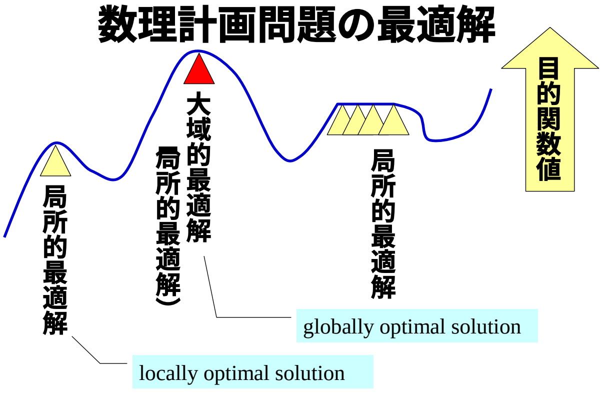
実行可能解：制約式を満たす(x_1,x_2)

feasible region

実行可能領域:実行可能解の集合

※実行可能解が存在しない場合もある→実行不能な問題
※実行可能でも最適解が存在しない場合がある→例題2

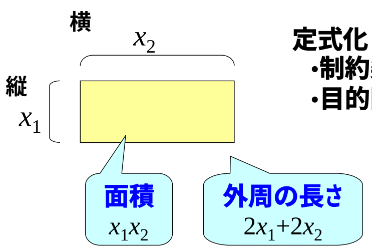
数理計画問題の最適解



※最適解が複数存在する場合もある→通常1つだけ求めればよい

例題2

面積が4以上で，外周の長さ最小の長方形は?

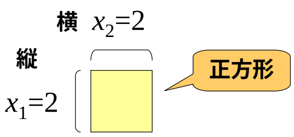


定式化してみよう
- 制約条件は?
- 目的関数は?

例題2 解答例

$$\begin{aligned} &\text{min. } z=2x_1+2x_2 \\ &\text{s.t. } \quad x_1x_2 \geqq 4 \\ &\qquad\quad x_1, x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

- 最適解は $x_1=2$, $x_2=2$
- 最適値は 8



Q. 面積が4以上で縦の長さ最小の長方形は?

$$\begin{aligned} &\text{min. } z=x_1 \\ &\text{s.t. } \quad x_1x_2 \geqq 4 \\ &\qquad\quad x_1, x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

限りなく0に近い値?
⇒最適解はない

最適解が存在する･しない

実行可能領域が存在 ⇔ 実行可能領域が空

最適値は有限

最適値が発散

実行可能解がない
↓
最適解無し

最適解存在

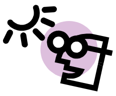
最適解無し

目的関数値を
いくらでも
大きくできる

最適解無し

複数存在
も有

例題2
後半の場合



非有界
unbounded

実行不能
infeasible

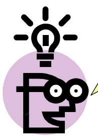
実行可能解の存在判定

実行可能性問題 feasibility problem

実行可能解が存在するのかを判定する問題

解法：いつでも値が0になる関数を目的関数にする
⇒実行可能解があれば，最適値は0

例



実行可能性の判定
も最適化問題なんだ

max. $z=\mathbf{0}x_1+\mathbf{0}x_2$
s.t. $15x_1+11x_2 \leqq 1650$
$10x_1+14x_2 \leqq 1400$
$9x_1+20x_2 \leqq 1800$
$x_1, x_2 \geqq 0$

練習 生産計画

- 2つの液体製品P,Qは機械A,Bを用いて加工される
- 利益が最大になる1週間の製品P,Qの加工量は？

	液体P 1ml	液体Q 1ml	使用可能時間
機械A	3(h)	1(h)	45(h/週)
機械B	1(h)	2(h)	40(h/週)
利益	6(万円)	5(万円)	

⇨ 定式化してみよう

練習 解答例

練習を定式化

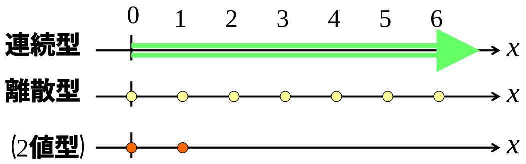
x_1：液体Pの生産量
x_2：液体Qの生産量

$$
\begin{aligned}
&\text{max. } z=6x_1+5x_2\\
&\text{s.t.}\quad 3x_1+\ x_2 \leqq 45\\
&\qquad\quad x_1+2x_2 \leqq 40\\
&\qquad\quad x_1,\ x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

定式化の分類法（1）

利用する変数が取れる値の型で分類

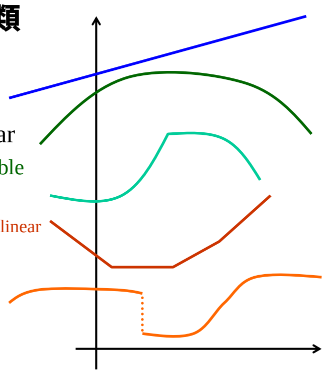
- **連続型** continuous ⇒ 例：実数 real
- **離散型** discrete ⇒ 例：整数 integer（**整数計画**）
  - 2**値型** binary ⇒ 例：0または1（0-1**整数計画**）



定式化の分類法（2）

使用関数の種類で分類

- **連続関数**
  - **線形関数** linear
  - **非線形関数** nonlinear
    - **微分可能** differentiable
    - **微分不能** non-
      - **区分線形** piecewise linear
- **非連続**
- **凸関数** convex
- **凹関数** concave

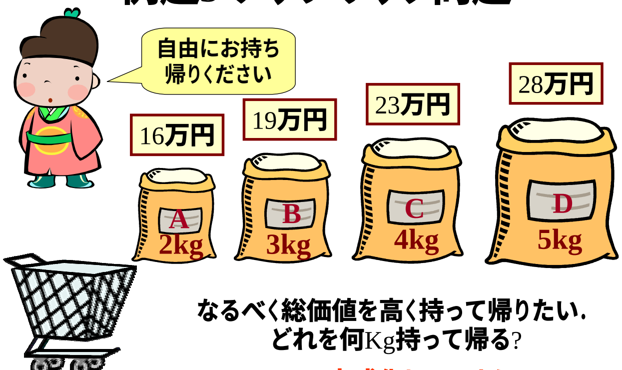


分類後の主な問題名

変数型	目的関数	条件式	問題名	+Programming	略称
連続型	線形	線形	線形計画	Linear	LP
	2次関数	線形	2次計画	Quadratic	QP
	凸関数	凸関数	凸計画	Convex	CP
	非線形	非線形	非線形計画	Nonlinear	NLP
離散型	ー	ー	整数計画	Integer	IP
	凸	凸	離散凸計画	Discrete Convex	
2値型	ー	ー	0-1整数計画	Binary Integer	BIP
混合	ー	ー	混合整数計画	Mixed Integer	MIP

※ 凸計画の等式制約は線形

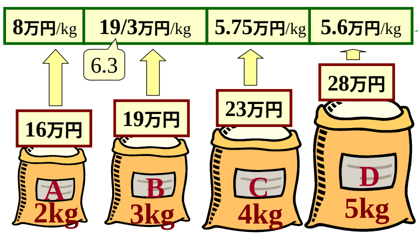
例題3 ナップサック問題



なるべく総価値を高く持って帰りたい.
どれを何Kg持って帰る?

重量制限:7kg

⇒定式化してみよう



単位価値額

例題3 (続) 分割可の時

変数:積む量

x_1 kg　x_2 kg　x_3 kg　x_4 kg

線形計画

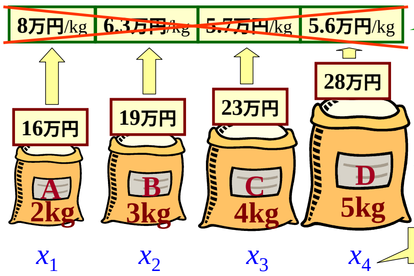
max. $z=8x_1+19/3x_2+5.75x_3+5.6x_4$

s.t. $x_1+x_2+x_3+x_4 \leqq 7$

$x_1 \leqq 2,\ x_2 \leqq 3,\ x_3 \leqq 4,\ x_4 \leqq 5,$

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqq 0$

例題3 (続) 分割不可の時



~~単位価値額~~

x_1 x_2 x_3 x_4

2値 (0-1) 変数

積む時：$x=1$

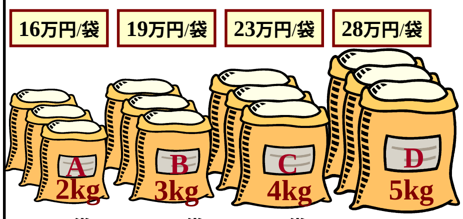
積まない時：$x=0$

0-1整数計画

$$
\begin{aligned}
&\text{max. } z=16x_1+19x_2+23x_3+28x_4\\
&\text{s.t.} \quad 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4 \leqq 7\\
&\qquad\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

記号∈ 元として含まれる

例題3 (続) 分割不可 複数可の時



x_1 袋 x_2 袋 x_3 袋 x_4 袋

変数：いくつ積む?

整数計画

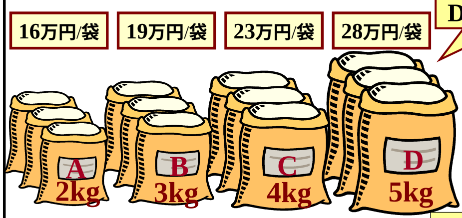
$$
\begin{aligned}
&\text{max. } z=16x_1+19x_2+23x_3+28x_4\\
&\text{s.t.} \quad 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4 \leqq 7\\
&\qquad\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathrm{Z}_+
\end{aligned}
$$

記号 Z_+ 非負整数の集合

(参考) R：実数 Z_{++}：正の整数

例題3 (続) 分割一部可 複数可の時

Dのみ分割可



x_1 袋 x_2 袋 x_3 袋 x_4 袋

変数：何袋分積む?

変数：何袋積む?

混合整数計画

$$
\begin{aligned}
&\text{max. } z=16x_1+19x_2+23x_3+28x_4\\
&\text{s.t.} \quad 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4 \leqq 7\\
&\qquad\quad x_1, x_2, x_3 \in \mathrm{Z}_+,\ x_4 \geqq 0
\end{aligned}
$$

例題3 (続) 分割不可の時(別表現1)

2kg,3kg,4kg,5kg　カートの重量制限 (kg)

対象の粉を順に増やす

	0	1	2	3	4	5	6	7
なし	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	16	16	16	16	16	16
	0	0	16	19	19	35	35	35
	0	0	16	19	23	35	39	42
	0	0	16	19	23	35	39	**44**

積む　積まない　+0　+16　+19　+23　+28

16万,19万,23万,28万

例題3 (続) 動的計画法

カートの重量制限

	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	16	19	19	35	35	35
4kg	0	0	16	19	23	35	39	42

+23

粉がk種類，カートの制限重量がαkgの時の最適値

$$f(k, \alpha) = \begin{cases} f(k-1, \alpha) & \text{制限重量}\alpha\text{が粉}k\text{の重み以下のとき} \\ \max\{f(k-1, \alpha),\ (k\text{の価値}) + f(k-1, \alpha-(k\text{の重み}))\} \end{cases}$$

粉kを積まない　粉kを積む

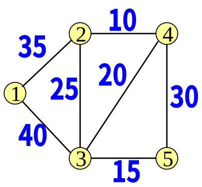
比較して，価値の高い方を採用　**再帰方程式**

⇨ **動的計画法** Dynamic Programming (DP)

例題4 ガス管配置

5軒の家にガスを供給したい

設置費用が最小になるガス管の設置方法は?



定式化してみよう

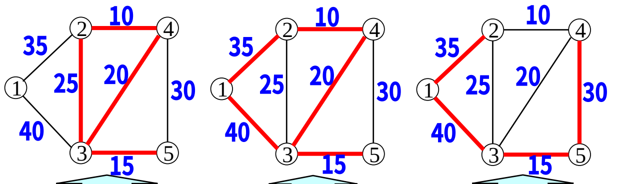
目的 設置費用合計→最小
制約 5軒にガスを供給

ガス管が繋がっている＋5軒を張っている

枝:設置可能路線
数字:設置費用

例題4 (続) 最適解でない例

なぜ最適でないのか？



条件を満たしていない　自明な無駄がある　他に良いプランがある

実行不能

改善策

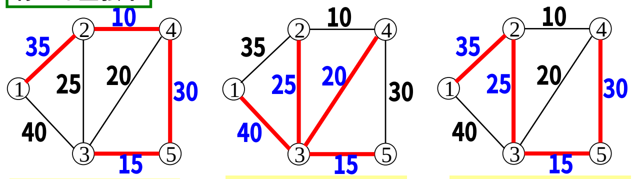
閉路は無駄
×閉路上の最大重み枝

非連結部分を繋げる
○最小重み枝

例題4 (続) 実行可能解が持つ性質

閉路は無駄 ⇒ 閉路の無いグラフ＝**木**
全点を結ぶ ⇒ **全張** (spanning;スパンする)
} **全張木** spanning tree

様々な全張木



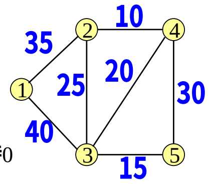
35+10+30+15=90　40+25+20+15=100　35+25+30+15=105

問題の本質 重み和最小の全張木 (**最小木**) を見つけよ
⇔ **最小木問題**
Minimum spanning tree problem

例題4 (続) 最小木問題の定式化

解きたい問題

目的 利用枝の重みの和→最小
制約 利用枝は全点を結ぶ
　　　利用枝に閉路がない



使用変数

x_{ij}:枝 (i,j) を利用する時1, 利用しない時0

目的関数

min. $z=35x_{12}+40x_{13}+25x_{23}+10x_{24}+15x_{35}+30x_{45}$

制約条件式は?

例題4（続）「閉路がない」の表現

閉路がない ↔ 閉路がある

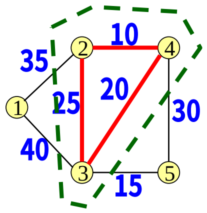
（部分点集合内での使用枝数）＜（部分点集合の大きさ）

（部分点集合内での使用枝数）＝（部分点集合の大きさ）

（部分点集合内での使用枝数）≦（部分点集合の大きさ）－1

例 点部分集合 {②,③,④} に対して

$x_{23}+x_{24}+x_{34} \leqq 2$



例題4（続） 定式化

min. $z=35x_{12}+40x_{13}+25x_{23}+10x_{24}+15x_{35}+30x_{45}$

s.t. $x_{12}+x_{13}+x_{23}+x_{24}+x_{35}+x_{45}=4$

（使用枝本数）≦（部分集合の大きさ）－1

$x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{35}, x_{45} \in \{0,1\}$

全部分集合に対して

部分集合は $2^{(点数)}$ 個存在

定式化は可能だが
サイズ大で実際には扱えない

⇒ 使用枝の組合せを決める問題

⇒ **組合せ最適化問題** combinatorial optimization problem
離散最適化問題 discrete optimization problem

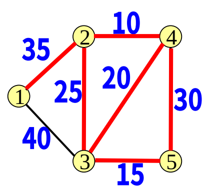
定式化を利用しない

最小木の見つけ方：アイディア(1)

閉路⇒最大重みの枝を消去

⇩ 実現方法例

重みの小さい順に枝を選択し
閉路になる時は選ばない
全点がつながったら終了



クラスカル法
(Kruskal)

定式化を利用しない

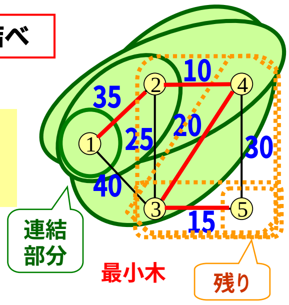
最小木の見つけ方：アイディア(2)

非連結⇒最小重みの枝で結べ

⇩ 実現方法例

1点から連結部分を1点ずつ
最小重みの枝で増やす
全点が連結になったら終了

プリム法
(Prim)



最小木問題に対する解法の計算量

n:グラフの点数
m:グラフの枝数

クラスカル法

- 閉路の発見に集合の併合操作 $O(m+n\log n)$
- データ構造の改造で $O(m\,\alpha(m,n))+O(m\log n)$

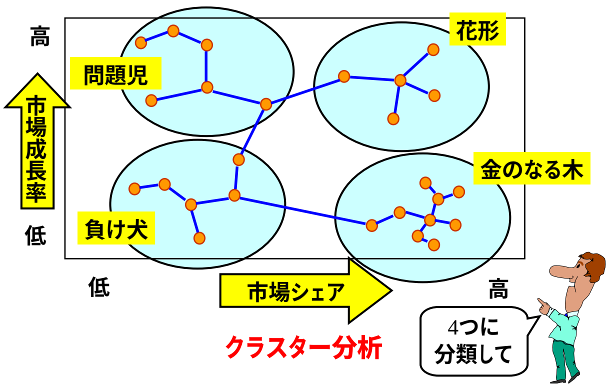
Ackermann逆関数

プリム法

- $O(n^2)$ ⇒Fibonacciヒープの利用 $O(m+n\log n)$
- 改良 $O(m\,\beta(m,n))$ ⇒さらに改良$O(m\log\beta(m,n))$

O(m) 線形時間解法はあるか? ◎存在確認
◎平面グラフ

最小木問題の利用例



クラスター分析

演習1 定式化せよ

施設配置問題

（建設費）＋（配送費）を最小にしたい．
どこに倉庫を建設し，
どのように配送すればよいか．
この問題を定式化せよ．

倉庫候補地

③ 店 1

① 2

②

ヒント

コントロールできるもの

$0 \leqq x_{ij} \leqq 1$

倉庫iから店jへの配送量⇒0〜1の値

倉庫iを建設する･しない⇒2値

$y_i \in \{0,1\}$

- 倉庫iの建設費用 f_i (i=1,2)
- 倉庫iと店j間の配送費用 c_{ij} (i=1,2;j=1,2,3)
- 各店の需要は1．分割配送可能．

さて今後の展開は

- 計算機で数理計画問題を解く
  - ソルバーの利用法

寄り道 組合せ最適化

◎組み合わせる（動詞）

意味が違う

×組み合わせ最適化
×組合わせ最適化
×組合最適化