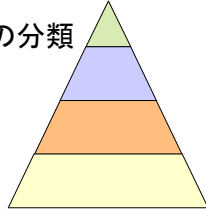


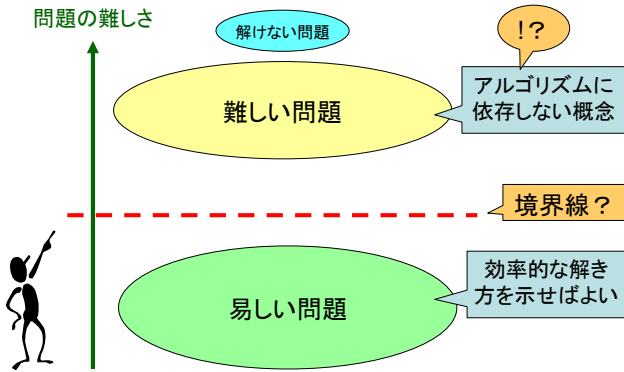
易しい問題・解きにくい問題

直面する問題の難しさの分類



ここで学ぶこと

問題の難しさ



効率よく解けた ⇔ (まだ)解けない

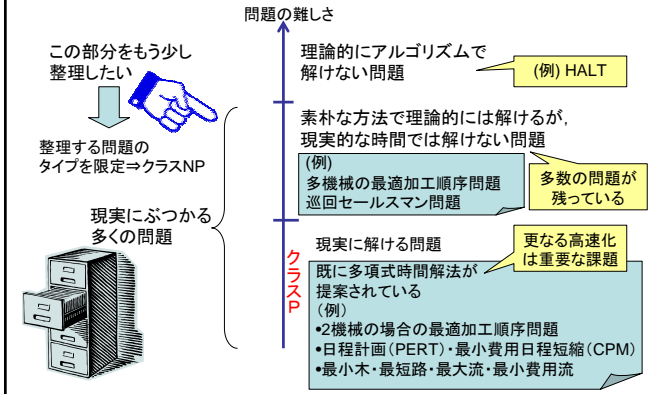
n 製品の最適加工順序問題の場合

機械数	2機械	多機械
主な解法	ジョンソン法	分枝限定法など
最悪計算量	$O(n \log_2 n)$	$O(n!)$
$n=1$ 万, 1億演算/秒の時	0.002秒	6×10^{35634} 宇宙年

他の問題の場合はどう?

• 効率の良い方法は見つかっていない
• いつかは見つかる?

クラスPに(まだ)属さない問題達



寄り道 解けない問題 HALT

有限な文字列 有限な文字列 ⇒ Pもxも同じ

- 入力: プログラムPとデータx
- 質問: プログラムPにデータxを与えた時に有限時間で停止しますか?

仮定: HALTを解くアルゴリズムQが存在

⇒ アルゴリズムQでは、Qの正当性を計れないことを証明 (対角線論法)

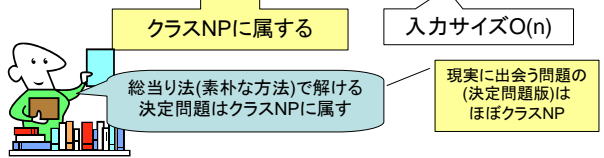


Nondeterministic Polynomial-time Solvable

クラスNP

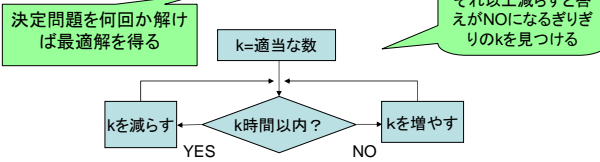
- 答えがYESである証拠が多項式時間で確認できる**決定問題** (入力サイズの)
- 例: (決定問題) 22時間以内に終了する加工順序はある?

-(証拠)加工順序を1つ示す (22時間以内で終了するかは製品数(n)程度で確認可能)

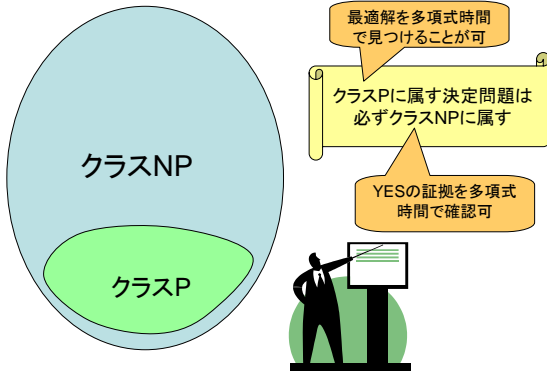


決定問題

- **決定問題**: YES/NOで答える問題
 - (最適化問題)
最適加工順序を求めよ
 - (決定問題)
22時間以内に終了する加工順序はある?
- **最適化問題** ← (変換可能) → 決定問題



クラスPとクラスNP



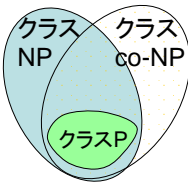
寄り道: クラス co-NP

- クラスNP: Yesの証拠を多項式時間で確認可
- ⇕
- Noの証拠を多項式時間で確認可 ⇒ クラスco-NP

2002年までco-NPに属していた問題

Agrawal達: PRIME in P(2002) クラスPだよ!

整数nは素数ですか?(PRIME)
Yes 素数です: どう確認する?
No 合成数です: 多項式時間で確認可能



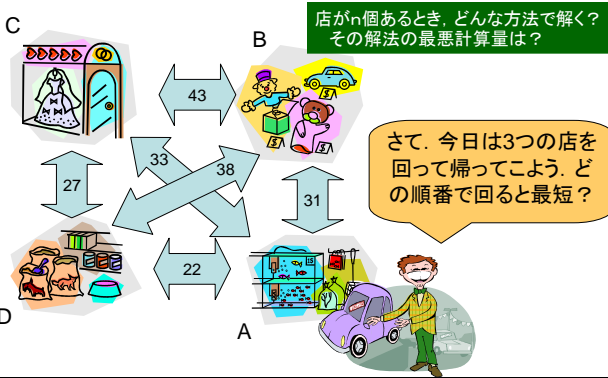
(まだ)クラスPではないクラスNPの問題たち

- 配送便の配達経路. 最短の配達経路は?
 >巡回セールスマン問題
- 限られた積載量. 利益最大積荷選択方法は?
 >ナップサック問題
- ある県の営業区域. 平等な区域割りは?
 >集合分割問題

他にも多数の問題がある



巡回セールスマン問題
traveling salesman problem (TSP)



ナップサック問題

- 貨物船で以下の在庫を輸出し利益を得たい
- 貨物船の最大積載重量: 100t
- 在庫管理の都合上, 輸出する製品は在庫すべてを積む

製品名	小麦	米	大豆	コーン	澱粉
在庫量 (t)	30	45	35	10	50
利益見込	25	15	30	10	20

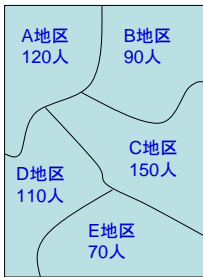
在庫すべてを輸出した場合

Q. 総利益を最大にするには, 何を積む?

製品数がn個の時, どのような解法で解く?
その解法の最悪計算量は?



集合分割問題



- 5地区を3人の営業マンが担当する
- 1地区は1人だけで担当
- 隣接しない地区を1人が併せて担当することはできない
- 3人の負担をなるべく平等にする担当地区の割当を考えてくれ！



地区数がn個の時、
どんな解法で解く？
その解法の最悪計算量は？

クラスNPでの大発見

Cook博士の発見(1971年)の大雑把な解釈

クラスNPに属する**すべての問題**はTSP(の決定問題)に簡単に(多項式時間の時間で)変形可能



TSPはクラスNPに属する問題の中で**最も難しい**

TSPに対して多項式時間解法があれば、クラスNPに属する問題はすべて多項式時間で解ける

更なる事実(Karp博士)

TSP ⇔ ナップサック問題

TSP ⇔ 集合分割問題

⋮
両者は同じ位難しい

TSP ⇔ 充足可能性問題

TSPの仲間たち

NP完全問題

※ Cookの定理は、全問題の充足可能性問題への帰着を証明

帰着可能性

問題Aの答えQ

Aを解くのは面倒



問題Aの複雑さ

∧

変形の手間

+

問題Bの複雑さ

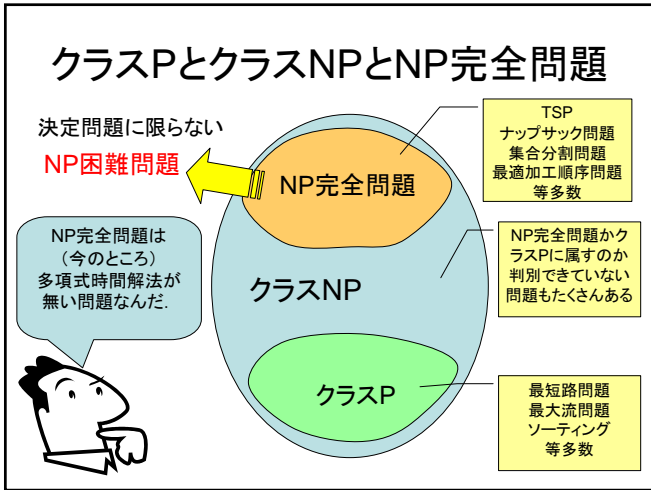
問題Aを変形すると問題Bになる

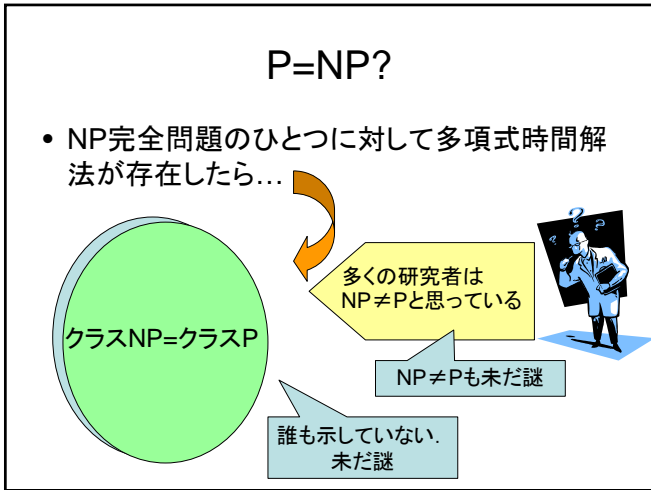
問題Bの答えf(Q)

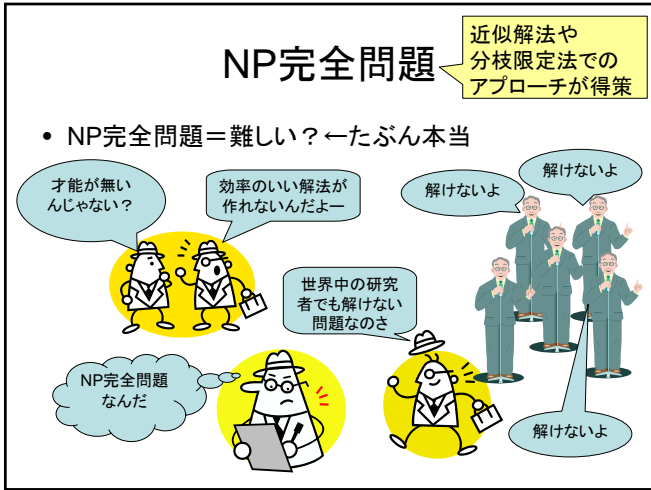


Bを解けばいいよ

Cook博士の仕事: NP完全問題の存在性を示した
Karp博士の仕事: NP完全問題の仲間たちを見つけた







まとめ

- 問題の難しさには階層がある
 - 解けない問題
 - クラスNP
 - クラスP
- クラスNPの中にも難しさの階層がある
 - NP完全問題
- 問題への解法を考える際は、まず問題の難しさのレベルに気を配るべき