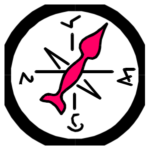
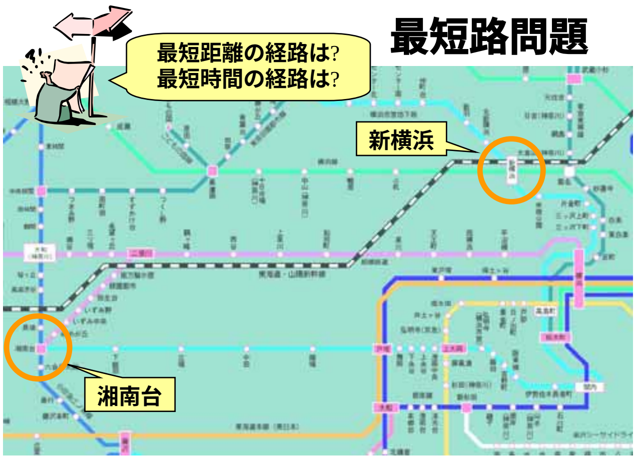
システム工学特講第1



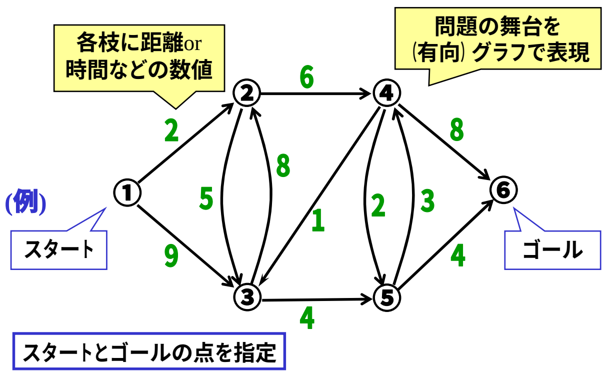
Shortest Path Problem

双対問題の利用例

最短路問題

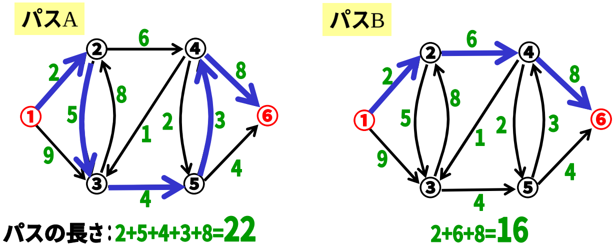


最短路問題のネットワーク表現



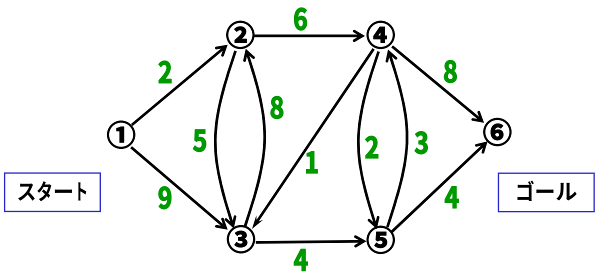
パス (経路) とその長さ

パス(経路): ある点とある点を結ぶ枝の列 (向きに注意!)



- スタートとゴールを結ぶパスは多数
- その中で長さが最短のパス＝最短路
- 最短路を見つける問題: 最短路問題

例題1 最短路を求めよ



最短路問題を定式化してみよう

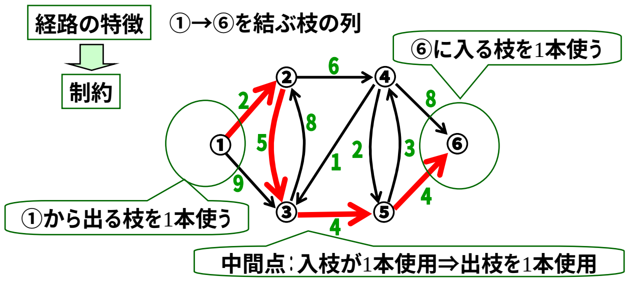
例題1(続) 定式化の準備

決めたいこと　どの枝を通るか

変数　$x_{ij} \in \{0,1\}$: 枝(i,j)を通る $x_{ij}=1$; 通らない $x_{ij}=0$

経路の特徴　①→⑥を結ぶ枝の列

制約



例題1(続) 最短路問題の定式化

$$\min.\ 2x_{12}+9x_{13}+5x_{23}+6x_{24}+8x_{32}+4x_{35}+x_{43}+2x_{45}+8x_{46}+3x_{54}+4x_{56}$$

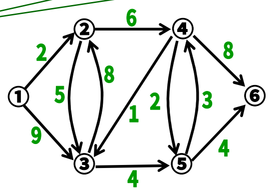
$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & x_{12}+x_{13}=1\\
& x_{12}+x_{32}=x_{23}+x_{24}\\
& x_{13}+x_{23}+x_{43}=x_{32}+x_{35}\\
& x_{24}+x_{54}=x_{43}+x_{45}+x_{46}\\
& x_{35}+x_{45}=x_{54}+x_{56}\\
& x_{46}+x_{56}=1
\end{aligned}$$

全枝(i,j)に対して$x_{ij}\in\{0,1\}$

①から出る枝を1本使う

中間点：入枝が1本使用
⇒出枝を1本使用

⑥に入る枝を1本使う



例題1(続) 数式表現の整理

最短路問題 (IP)

$$\begin{array}{l}
\min.\ 2x_{12}+9x_{13}+5x_{23}+6x_{24}+8x_{32}+4x_{35}+x_{43}+2x_{45}+8x_{46}+3x_{54}+4x_{56}\\
\text{s.t.}\ -x_{12}-x_{13}=-1\\
\quad +x_{12}-x_{23}-x_{24}+x_{32}=0\\
\quad +x_{13}+x_{23}-x_{32}-x_{35}+x_{43}=0\\
\quad +x_{24}-x_{43}-x_{45}-x_{46}+x_{54}=0\\
\quad +x_{35}+x_{45}-x_{54}-x_{56}=0\\
\quad +x_{46}+x_{56}=1
\end{array}$$

全枝(i,j)に対して~~$x_{ij}\in\{0,1\}$~~ $x_{ij}\geqq 0$

LP緩和

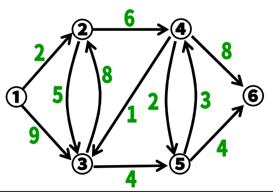
線形計画問題(P)

演習：(P)の双対問題を作ってみよう
相補性条件を導いてみよう

寄り道 ネットワークのデータ表現

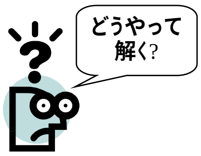
	a_{12}	a_{13}	a_{23}	a_{24}	a_{32}	a_{35}	a_{43}	a_{45}	a_{46}	a_{54}	a_{56}
①	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
②	-1	0	1	1	-1	0	0	0	0	0	0
③	0	-1	-1	0	1	1	-1	0	0	0	0
④	0	0	0	-1	0	0	1	1	1	-1	0
⑤	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	1	1
⑥	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1

接続行列
(incidence matrix)



双対問題(D)

双対変数:
p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6



$$
\begin{aligned}
\max.\ & -p_1+p_6 \\
\text{s.t.}\ & p_2-p_1\le 2 \\
& p_3-p_1\le 9 \\
& p_3-p_2\le 5 \\
& p_4-p_2\le 6 \\
& p_2-p_3\le 8 \\
& p_5-p_3\le 4 \\
& p_3-p_4\le 1 \\
& p_5-p_4\le 2 \\
& p_6-p_4\le 8 \\
& p_4-p_5\le 3 \\
& p_6-p_5\le 4
\end{aligned}
$$

仮定
$p_1=0$

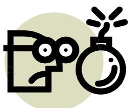
$$
\begin{aligned}
\max.\ & p_6 \\
\text{s.t.}\ & p_2\le p_1+2 \\
& p_3\le p_1+9 \\
& p_3\le p_2+5 \\
& p_4\le p_2+6 \\
& p_2\le p_3+8 \\
& p_5\le p_3+4 \\
& p_3\le p_4+1 \\
& p_5\le p_4+2 \\
& p_6\le p_4+8 \\
& p_4\le p_5+3 \\
& p_6\le p_5+4 \\
& p_1=0
\end{aligned}
$$

(D)の解き方:アイディア

$$
\begin{aligned}
\max.\ & p_6 \\
\text{s.t.}\ & p_2\le p_1+2 \\
& p_3\le p_1+9 \\
& p_3\le p_2+5 \\
& p_4\le p_2+6 \\
& p_2\le p_3+8 \\
& p_5\le p_3+4 \\
& p_3\le p_4+1 \\
& p_5\le p_4+2 \\
& p_6\le p_4+8 \\
& p_4\le p_5+3 \\
& p_6\le p_5+4 \\
& p_1=0
\end{aligned}
$$

ベルマン方程式(Bellman's equation)

$p_1=0$
$p_2=\min\{p_1+2,\ p_3+8\}$
$p_3=\min\{p_1+9,\ p_2+5,\ p_4+1\}$
$p_4=\min\{p_2+6,\ p_5+3\}$
$p_5=\min\{p_3+4,\ p_4+2\}$
$p_6=\min\{p_4+8,\ p_5+4\}$



この方程式って解けるの?

ベルマン方程式の解き方

$p_1=0$
$p_2=\min\{p_1+2,\ p_3+8\}$
$p_3=\min\{p_1+9,\ p_2+5,\ p_4+1\}$
$p_4=\min\{p_2+6,\ p_5+3\}$
$p_5=\min\{p_3+4,\ p_4+2\}$
$p_6=\min\{p_4+8,\ p_5+4\}$

無変化で終了

	初期解	改定1	改定2	改定3	改定4	改定5	改定6
p_1	0	0	0	0	0	0	0
p_2	∞	2	2	2	2	2	2
p_3	∞	9	7	7	7	7	7
p_4	∞	∞	8	8	8	8	8
p_5	∞	∞	13	11	10	10	10
p_6	∞	∞	∞	16	15	14	14

(D)の最適解

動的計画法の利用
ベルマン-フォード法
計算量:O(mn)

n:**点数**
m:**枝数**

(D)の解⇒(P)の解

相補性条件

$$(2-p_2+p_1)x_{12}=0$$
$$(9-p_3+p_1)x_{13}=0$$
$$(5-p_3+p_2)x_{23}=0$$
$$(6-p_4+p_2)x_{24}=0$$
$$(8-p_2+p_3)x_{32}=0$$
$$(4-p_5+p_3)x_{35}=0$$
$$(1-p_3+p_4)x_{43}=0$$
$$(2-p_5+p_4)x_{45}=0$$
$$(8-p_6+p_4)x_{46}=0$$
$$(3-p_4+p_5)x_{54}=0$$
$$(4-p_6+p_5)x_{56}=0$$

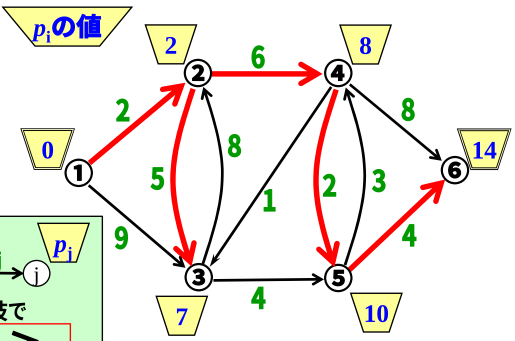
	解
p_1	0
p_2	2
p_3	7
p_4	8
p_5	10
p_6	14

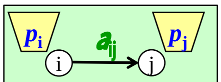
$$(0)x_{12}=0$$
$$(2)x_{13}=0$$
$$(0)x_{23}=0$$
$$(0)x_{24}=0$$
$$(13)x_{32}=0$$
$$(1)x_{35}=0$$
$$(2)x_{43}=0$$
$$(0)x_{45}=0$$
$$(2)x_{46}=0$$
$$(5)x_{54}=0$$
$$(0)x_{56}=0$$

$$x_{12}=1,\quad x_{23}=1,\quad x_{24}=1,\quad x_{45}=1,\quad x_{56}=1$$

例題1(続) (P)の最適解

$$x_{12}=1,\quad x_{23}=1,\quad x_{24}=1,\quad x_{45}=1,\quad x_{56}=1$$





すべての枝で

$\boxed{p_i+a_{ij} \geqq p_j}$

が成立

確認してみよう

(IP)と(P)とその双対問題(D)

最短路問題(IP)の最適値

一致　　完全単模性(Totally Unimodularity)

ネットワーク型の制約は整数最適解を持つ

LP緩和問題(P)の最適値

一致　双対定理

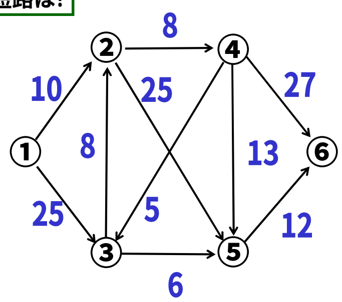
(P)の双対問題(D)の最適値

この部分を高速に解くのが重要

- 整数計画
- 多面体論

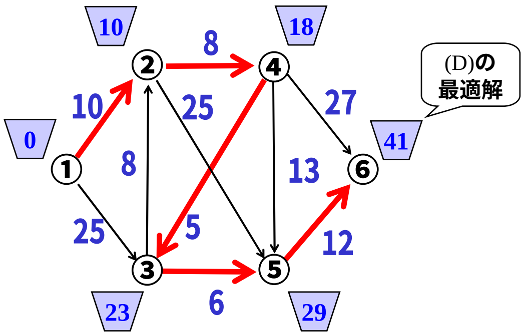
練習1 ベルマン-フォード法

①⇒⑥の最短路は?



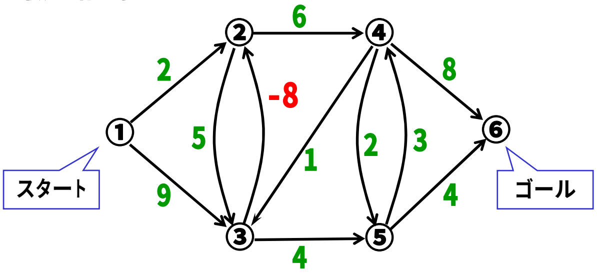
練習1 解答例

①を根とした最短路木



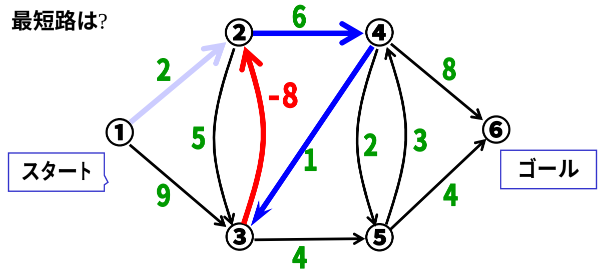
例題2 負の長さがある場合

最短路を求めよ



例題2(続) 負閉路の存在

最短路は?

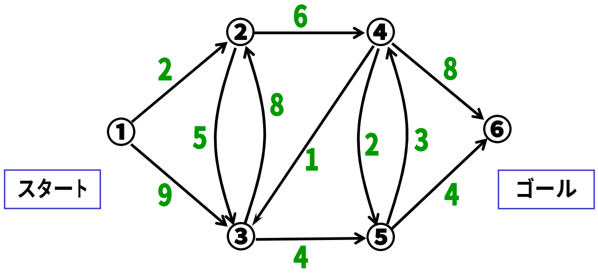


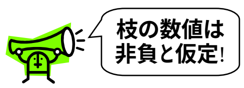
ベルマン-フォード法を適用⇒停止しない
(最短路が存在しない)

⇩

枝数回の繰り返しで停止させる (負閉路or最短路の発見)

例題3 負の長さの枝が無いとき



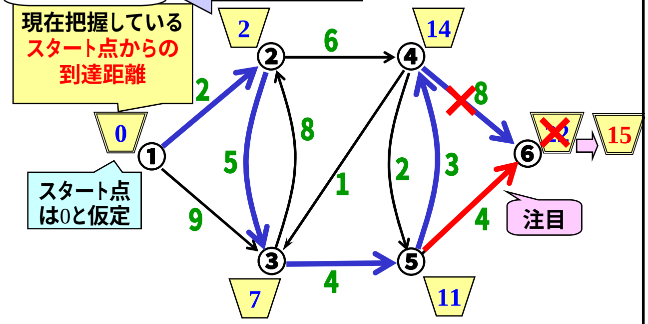


例題3(続) 最短路ではないパス

ポテンシャル

双対問題の解候補

なぜ最短路ではない?



最短路を見つけた⇔ポテンシャルはどういう状況を満足している?

最短路とポテンシャル

2 ②—6→④ 14

2+6<14

最短路を見つけていない

一般的に書くと

p ○—a→○ q

ある枝で p+a<q が成立

最短路を見つけていない証拠

⇔

下の性質を満たすポテンシャルの見つければいいんだ．どうやって？

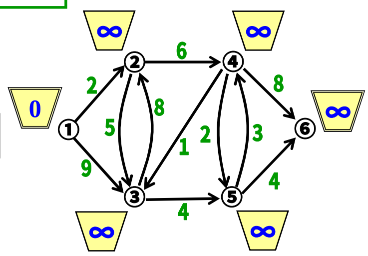
すべての枝で p+a≧q が成立

最短路でない証拠が存在しない

最短路を見つけた！

例題3(続) 性質を満たす ポテンシャルの見つけ方(1)

準備：
- スタートのポテンシャルを0
- 残りの点のポテンシャルは∞
- 全点が未確定．



性質を満たすよう ポテンシャルを順に更新

ダイクストラ法
Dijkstra

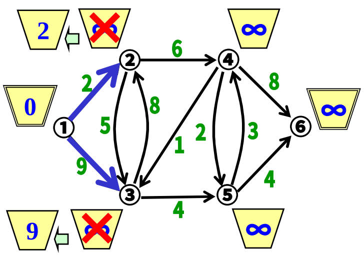
例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方 (1)

手順：全点が確定するまで以下を繰り返す

① ポテンシャル最小未確定点の選択

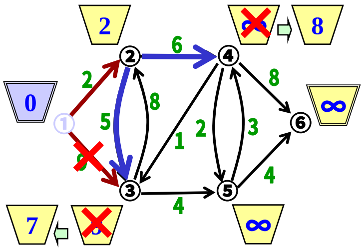
② ポテンシャル更新

③ 点を確定



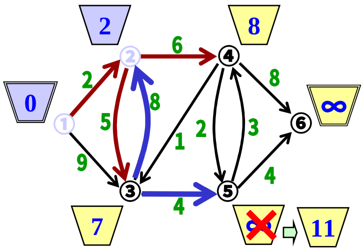
例題3(続) 性質を満たす**ポテンシャルの見つけ方** (2)

① ポテンシャル最小未確定点の選択
② ポテンシャル更新
③ 点を確定



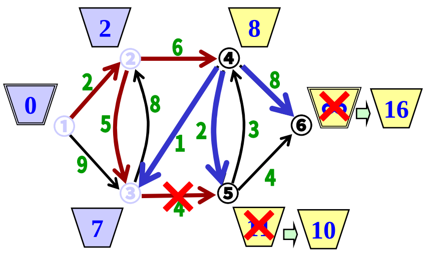
例題3(続) 性質を満たす**ポテンシャルの見つけ方** (3)

① ポテンシャル最小未確定点の選択
② ポテンシャル更新
③ 点を確定



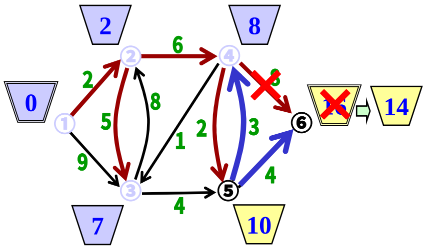
例題3(続) 性質を満たす**ポテンシャルの見つけ方** (4)

① ポテンシャル最小未確定点の選択
② ポテンシャル更新
③ 点を確定



例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方 (5)

① ポテンシャル最小未確定点の選択
② ポテンシャル更新
③ 点を確定

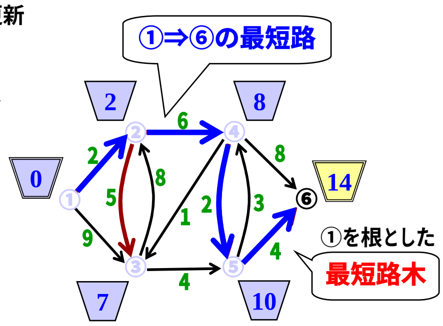


例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方 (6)

① ポテンシャル最小未確定点の選択
② ポテンシャル更新
③ 点を確定

⇩

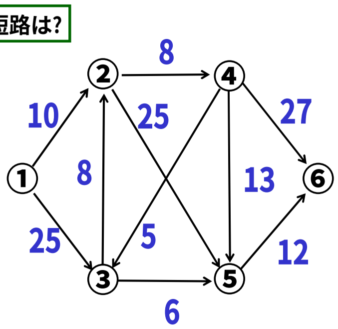
全点が確定し終了



最適なポテンシャルが見つかった ⇨ 最短路も見つかった

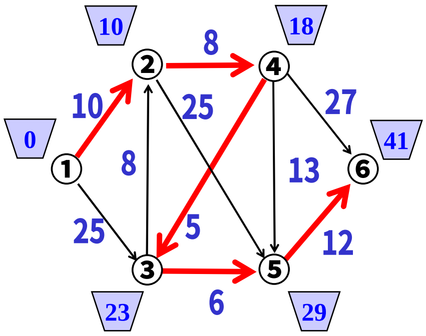
練習2 ダイクストラ法

①⇒⑥の最短路は?



練習2 解答例

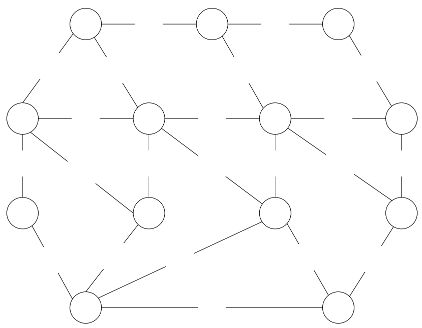
①を根とした最短路木



練習3 無向グラフの最短路

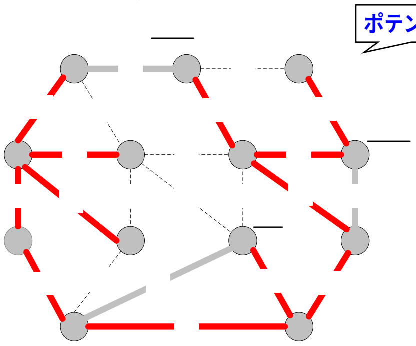
- Eを根とした最短路木は?
- E⇒Hの最短路は?

両方向の枝があると考える



練習3 解答例

ポテンシャル



Eを根とした最短路木

ダイクストラ法の高速実現法

ポテンシャル最小の点を高速に発見

– 未確定点を配列でなくリスト構造で保持
（走査する点数を減らす）

– 未確定点をポテンシャルの値順に整列
→整列アルゴリズムの知識が必要

フィボナッチヒープ

効率的実装

O(m+$n$log$n$)

基本的なアルゴリズム+
データ構造の知識は
不可欠

まとめ：最短路問題

- 1始点-1終点間
- 1始点-全点間
- 全点-1終点間
- 全点間

特殊な問題

専用の高速解法があるかどうかは未解決

利用

中心的なタイプ
主な解法：
ダイクストラ法

枝の数値が
非負の時のみ
利用可能

影響

Floyd-Warshall法
Johnsonの繰り返し法

まとめ：問題を解く戦略を練る

求めたい！ 難

(P)の最適解 ← ベルマン-フォード法 ← (D)の最適解 難

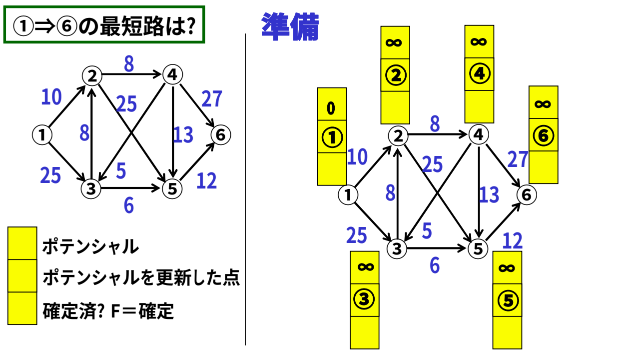
易 (P)の実行可能解

(D)の実行可能解 易

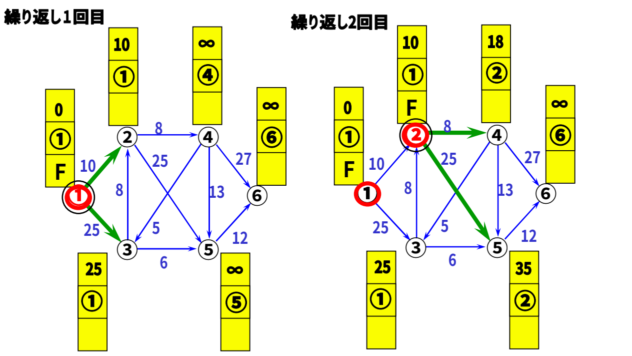
全部揃うと最適解

相補性条件

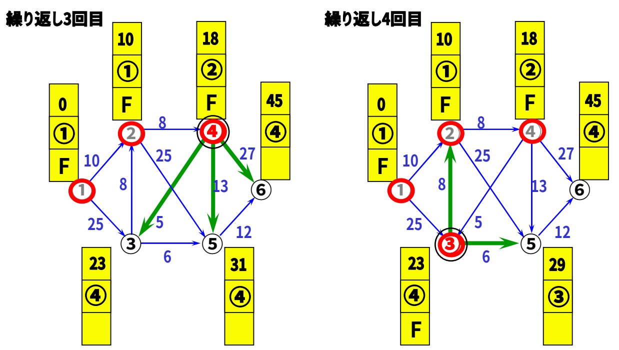
練習2 解答例詳細



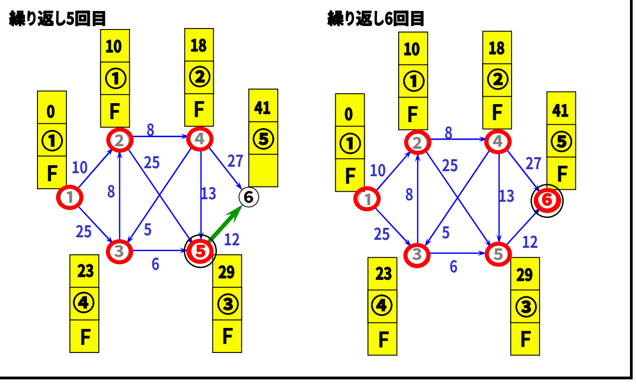
練習2 ポテンシャルの更新



練習2 ポテンシャルの更新(2)



練習2 ポテンシャルの更新(3)



練習2 解答例 まとめ