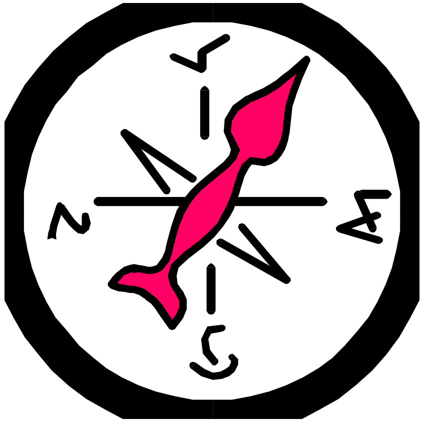
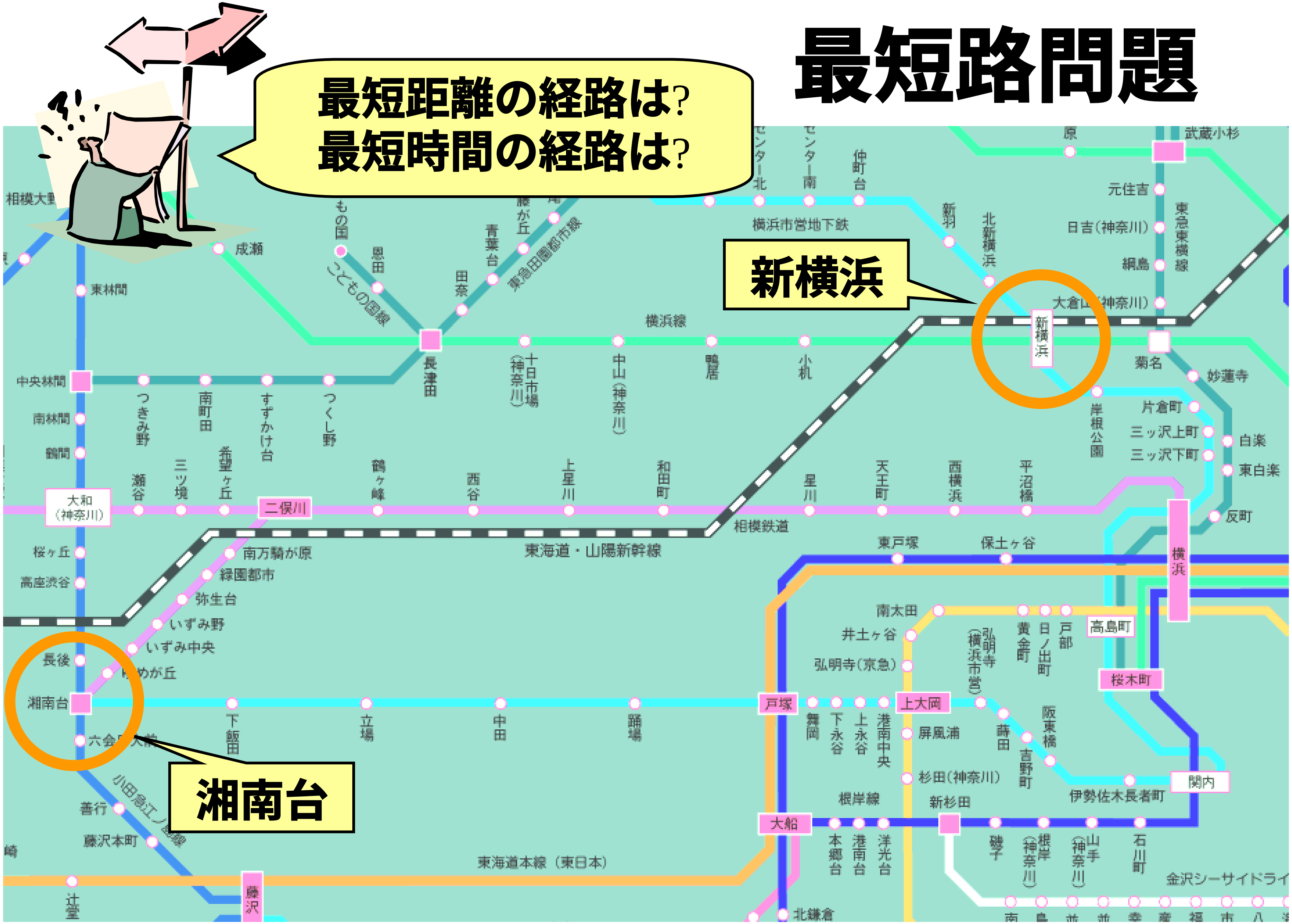
システム工学特講第1



Shortest Path Problem

双対問題の利用例

最短路問題

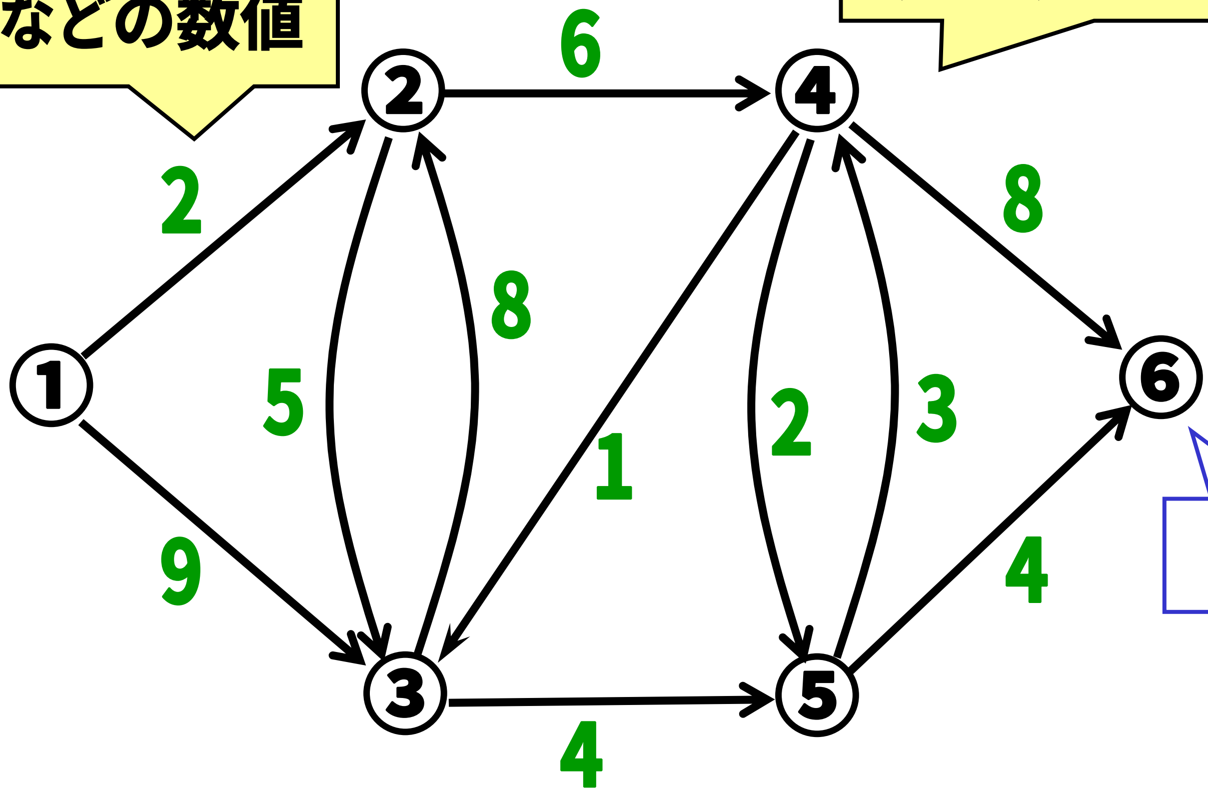

最短距離の経路は?
最短時間の経路は?
新横浜
湘南台
横浜市営地下鉄
横浜線
東急田園都市線
こどもの国線
相模鉄道
東海道・山陽新幹線
小田急江ノ島線
東海道本線（東日本）
根岸線
東急東横線
金沢シーサイドライン

最短路問題のネットワーク表現

各枝に距離or
時間などの数値

問題の舞台を
(有向) グラフで表現

(例)



スタート

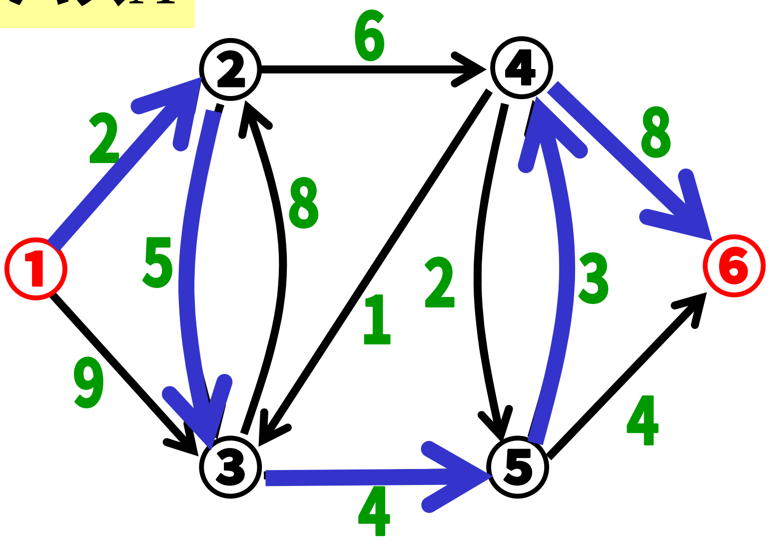
ゴール

スタートとゴールの点を指定

パス（経路）とその長さ

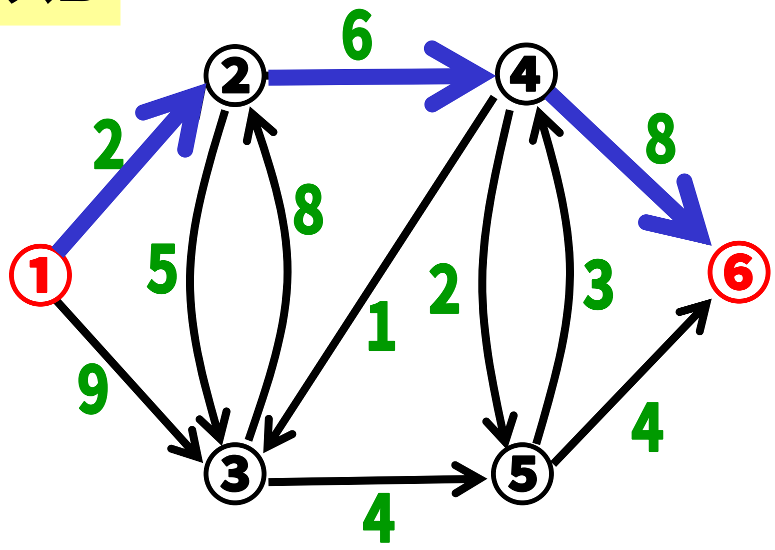
パス(経路)：ある点とある点を結ぶ枝の列（向きに注意!）

パスA



パスの長さ：2+5+4+3+8=**22**

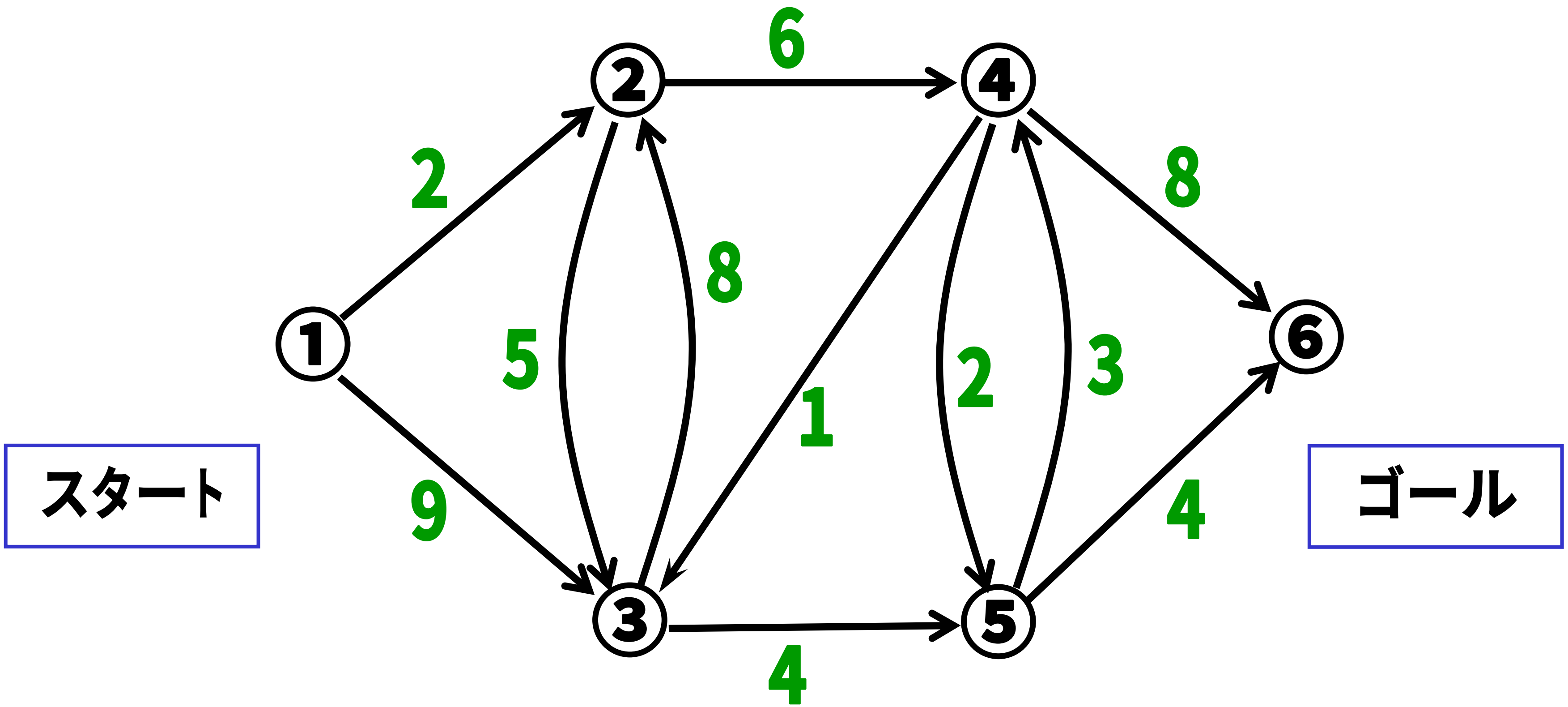
パスB



2+6+8=**16**

- スタートとゴールを結ぶパスは多数
- その中で長さが最短のパス＝**最短路**
- 最短路を見つける問題：**最短路問題**

例題1 最短路を求めよ



最短路問題を定式化してみよう

例題1(続) 定式化の準備

決めたいこと　どの枝を通るか

↓

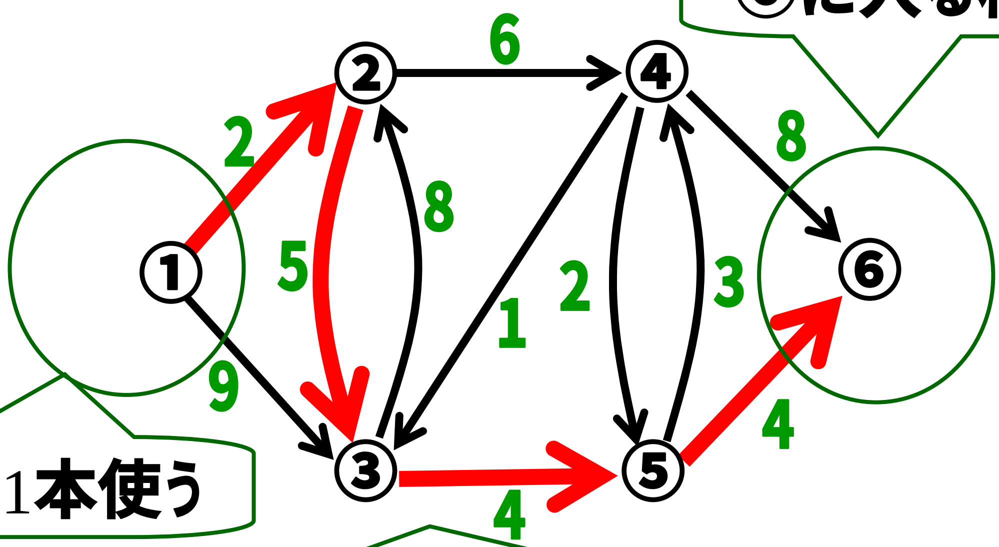
変数　$x_{ij} \in \{0,1\}$:枝(i,j)を通る$x_{ij}=1$; 通らない$x_{ij}=0$

経路の特徴　①→⑥を結ぶ枝の列

↓

制約

⑥に入る枝を1本使う



①から出る枝を1本使う

中間点：入枝が1本使用⇒出枝を1本使用

例題1(続) 最短路問題の定式化

$$\min.\ 2x_{12}+9x_{13}+5x_{23}+6x_{24}+8x_{32}+4x_{35}+x_{43}+2x_{45}+8x_{46}+3x_{54}+4x_{56}$$

s.t.

$$x_{12}+x_{13}=1$$

①から出る枝を1本使う

$$x_{12}+x_{32}=x_{23}+x_{24}$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{43}=x_{32}+x_{35}$$

中間点：入枝が1本使用
⇒出枝を1本使用

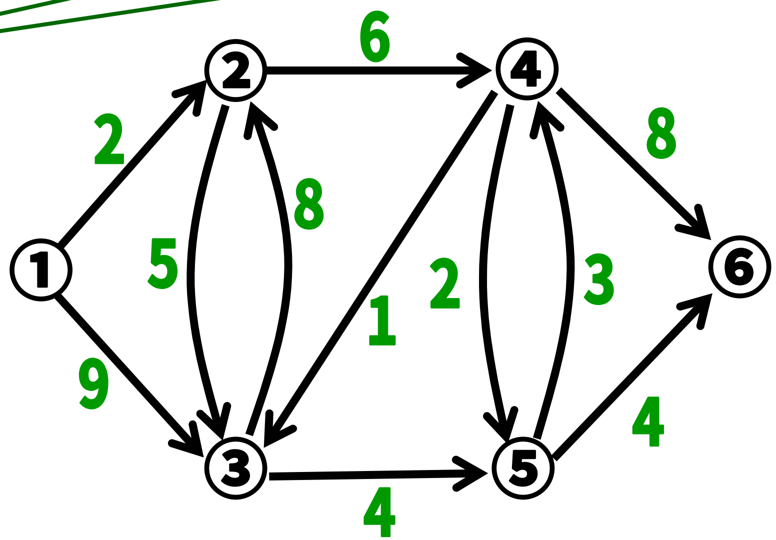
$$x_{24}+x_{54}=x_{43}+x_{45}+x_{46}$$

$$x_{35}+x_{45}=x_{54}+x_{56}$$

$$x_{46}+x_{56}=1$$

⑥に入る枝を1本使う

全枝(i,j)に対して$x_{ij}\in\{0,1\}$



例題1(続) 数式表現の整理

最短路問題 (IP)

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
\min. & 2x_{12} & +9x_{13} & +5x_{23} & +6x_{24} & +8x_{32} & +4x_{35} & +x_{43} & +2x_{45} & +8x_{46} & +3x_{54} & +4x_{56} & & \\
\text{s.t.} & -x_{12} & -x_{13} & & & & & & & & & & & =-1 \\
 & +x_{12} & & -x_{23} & -x_{24} & +x_{32} & & & & & & & & =0 \\
 & & +x_{13} & +x_{23} & & -x_{32} & -x_{35} & +x_{43} & & & & & & =0 \\
 & & & & +x_{24} & & & -x_{43} & -x_{45} & -x_{46} & +x_{54} & & & =0 \\
 & & & & & & +x_{35} & & +x_{45} & & -x_{54} & -x_{56} & & =0 \\
 & & & & & & & & & +x_{46} & & +x_{56} & & =1
\end{array}
$$

全枝(i,j)に対して $\cancel{x_{ij} \in \{0,1\}}$ 　　$x_{ij} \geqq 0$

LP緩和

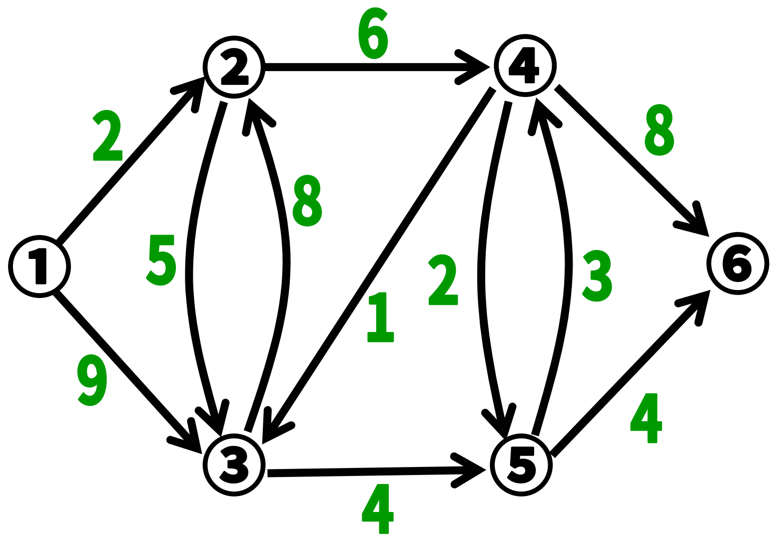
線形計画問題(P)

演習：(P)の双対問題を作ってみよう
相補性条件を導いてみよう

寄り道 ネットワークのデータ表現

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccccccc} a_{12} & a_{13} & a_{23} & a_{24} & a_{32} & a_{35} & a_{43} & a_{45} & a_{46} & a_{54} & a_{56} \end{array} \\
\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \\ ⑥ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

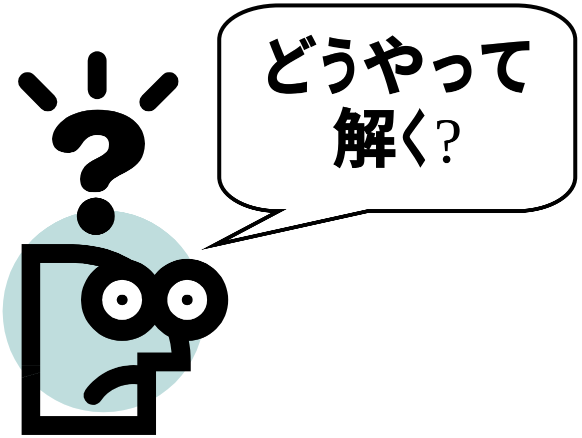
接続行列
(incidence matrix)



双対問題(D)

双対変数:

$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$



$$
\begin{array}{ll}
\max. & -p_1 + p_6 \\
\text{s.t.} & p_2 - p_1 \leq 2 \\
& p_3 - p_1 \leq 9 \\
& p_3 - p_2 \leq 5 \\
& p_4 - p_2 \leq 6 \\
& p_2 - p_3 \leq 8 \\
& p_5 - p_3 \leq 4 \\
& p_3 - p_4 \leq 1 \\
& p_5 - p_4 \leq 2 \\
& p_6 - p_4 \leq 8 \\
& p_4 - p_5 \leq 3 \\
& p_6 - p_5 \leq 4
\end{array}
$$

仮定

$p_1=0$

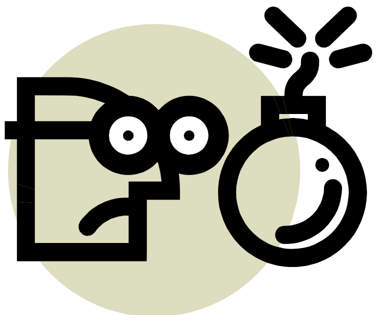
$$
\begin{array}{ll}
\max. & p_6 \\
\text{s.t.} & p_2 \leq p_1 + 2 \\
& p_3 \leq p_1 + 9 \\
& p_3 \leq p_2 + 5 \\
& p_4 \leq p_2 + 6 \\
& p_2 \leq p_3 + 8 \\
& p_5 \leq p_3 + 4 \\
& p_3 \leq p_4 + 1 \\
& p_5 \leq p_4 + 2 \\
& p_6 \leq p_4 + 8 \\
& p_4 \leq p_5 + 3 \\
& p_6 \leq p_5 + 4 \\
& p_1 = 0
\end{array}
$$

(D)の解き方:アイディア

$$\begin{aligned}
&\max.\ p_6\\
&\text{s.t.}\quad p_2 \le p_1 + 2\\
&\qquad p_3 \le p_1 + 9\\
&\qquad p_3 \le p_2 + 5\\
&\qquad p_4 \le p_2 + 6\\
&\qquad p_2 \le p_3 + 8\\
&\qquad p_5 \le p_3 + 4\\
&\qquad p_3 \le p_4 + 1\\
&\qquad p_5 \le p_4 + 2\\
&\qquad p_6 \le p_4 + 8\\
&\qquad p_4 \le p_5 + 3\\
&\qquad p_6 \le p_5 + 4\\
&\qquad p_1 = 0
\end{aligned}$$

ベルマン方程式(Bellman’s equation)

$$\begin{aligned}
&p_1 = 0\\
&p_2 = \min\{p_1 + 2, p_3 + 8\}\\
&p_3 = \min\{p_1 + 9, p_2 + 5, p_4 + 1\}\\
&p_4 = \min\{p_2 + 6, p_5 + 3\}\\
&p_5 = \min\{p_3 + 4, p_4 + 2\}\\
&p_6 = \min\{p_4 + 8, p_5 + 4\}
\end{aligned}$$



この方程式って解けるの?

ベルマン方程式の解き方

無変化で終了

$p_1=0$

$p_2=\min\{p_1+2, p_3+8\}$

$p_3=\min\{p_1+9, p_2+5, p_4+1\}$

$p_4=\min\{p_2+6, p_5+3\}$

$p_5=\min\{p_3+4, p_4+2\}$

$p_6=\min\{p_4+8, p_5+4\}$

	初期解	改定1	改定2	改定3	改定4	改定5	改定6
p_1	0	0	0	0	0	0	0
p_2	∞	2	2	2	2	2	2
p_3	∞	9	7	7	7	7	7
p_4	∞	∞	8	8	8	8	8
p_5	∞	∞	13	11	10	10	10
p_6	∞	∞	∞	16	15	14	14

(D)の最適解

動的計画法の利用
ベルマン-フォード法

計算量：O(mn)

n:点数
m:枝数

(D)の解⇒(P)の解

相補性条件

$$(2-p_2+p_1)x_{12}=0$$
$$(9-p_3+p_1)x_{13}=0$$
$$(5-p_3+p_2)x_{23}=0$$
$$(6-p_4+p_2)x_{24}=0$$
$$(8-p_2+p_3)x_{32}=0$$
$$(4-p_5+p_3)x_{35}=0$$
$$(1-p_3+p_4)x_{43}=0$$
$$(2-p_5+p_4)x_{45}=0$$
$$(8-p_6+p_4)x_{46}=0$$
$$(3-p_4+p_5)x_{54}=0$$
$$(4-p_6+p_5)x_{56}=0$$

⇒

	解
p_1	0
p_2	2
p_3	7
p_4	8
p_5	10
p_6	14

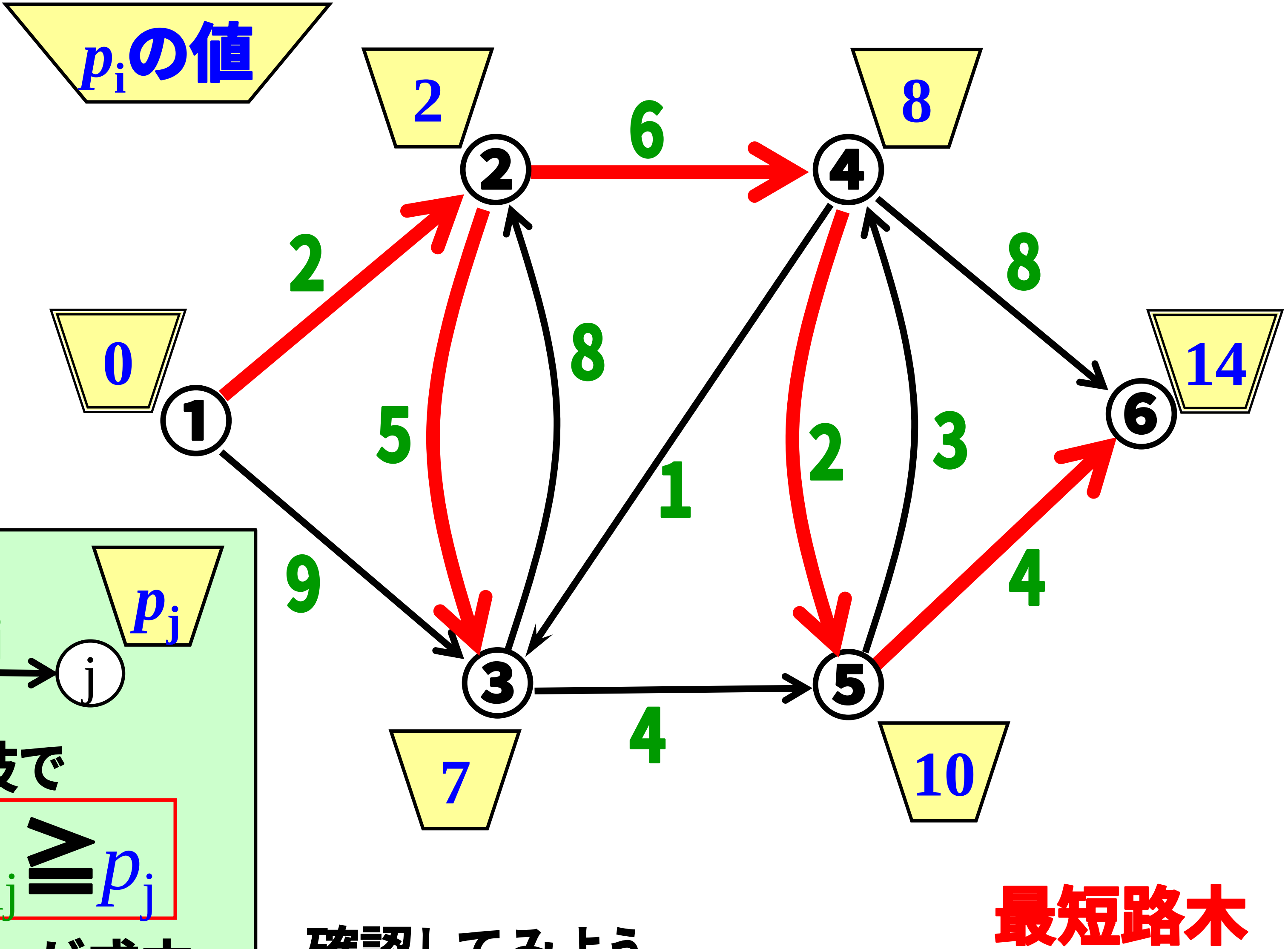
$$(0)x_{12}=0$$
$$(2)x_{13}=0$$
$$(0)x_{23}=0$$
$$(0)x_{24}=0$$
$$(13)x_{32}=0$$
$$(1)x_{35}=0$$
$$(2)x_{43}=0$$
$$(0)x_{45}=0$$
$$(2)x_{46}=0$$
$$(5)x_{54}=0$$
$$(0)x_{56}=0$$

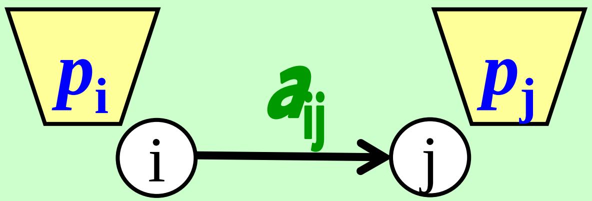
⇒

$$x_{12}=1$$
$$x_{23}=1$$
$$x_{24}=1$$
$$x_{45}=1$$
$$x_{56}=1$$

例題1(続) (P)の最適解

$x_{12}=1$
$x_{23}=1$
$x_{24}=1$
$x_{45}=1$
$x_{56}=1$





すべての枝で

$$\boxed{p_i + a_{ij} \geqq p_j}$$

が成立

確認してみよう

(IP)と(P)とその双対問題(D)

最短路問題(IP)**の最適値**

完全単模性(Totally Unimodularity)

ネットワーク型の制約は
整数最適解を持つ

一致

LP**緩和問題**(P)**の最適値**

一致 **双対定理**

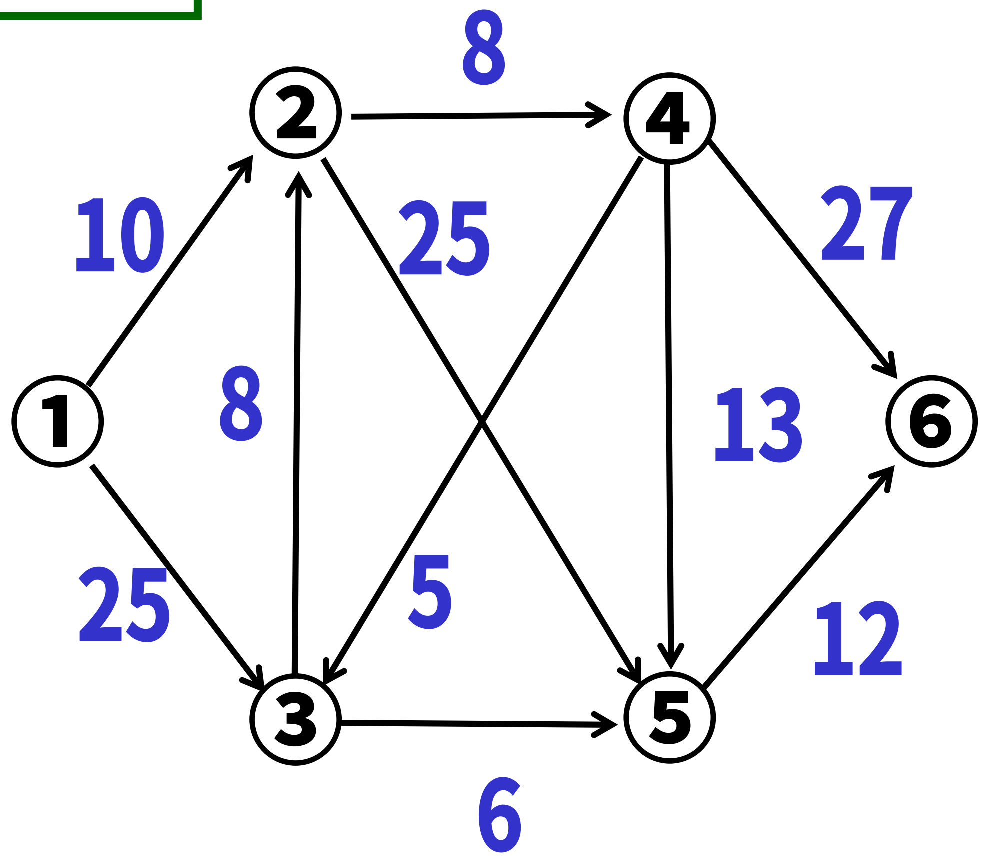
(P)**の双対問題**(D)**の最適値**

この部分を高速に解くのが重要

- **整数計画**
- **多面体論**

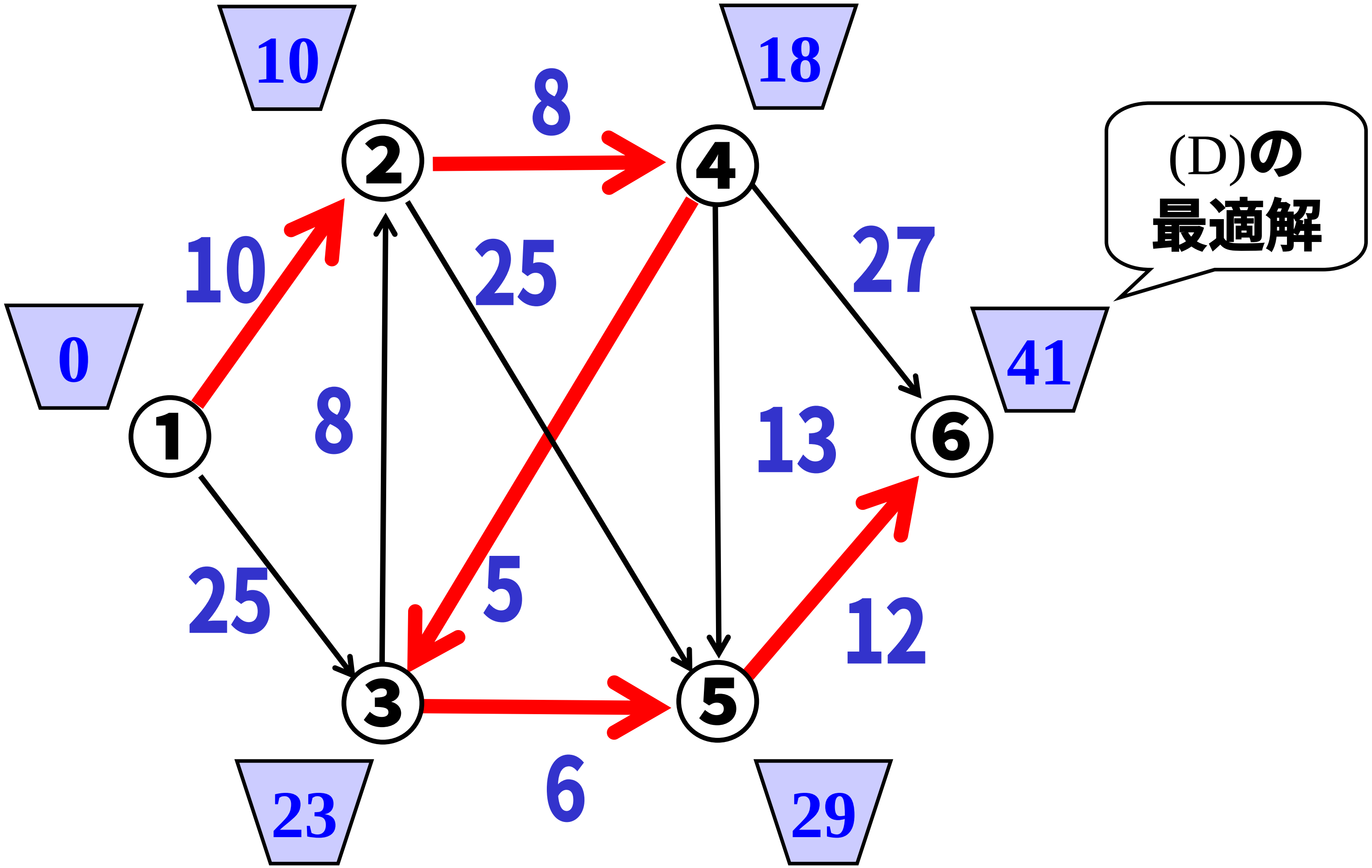
練習1 ベルマン-フォード法

①⇒⑥の最短路は?



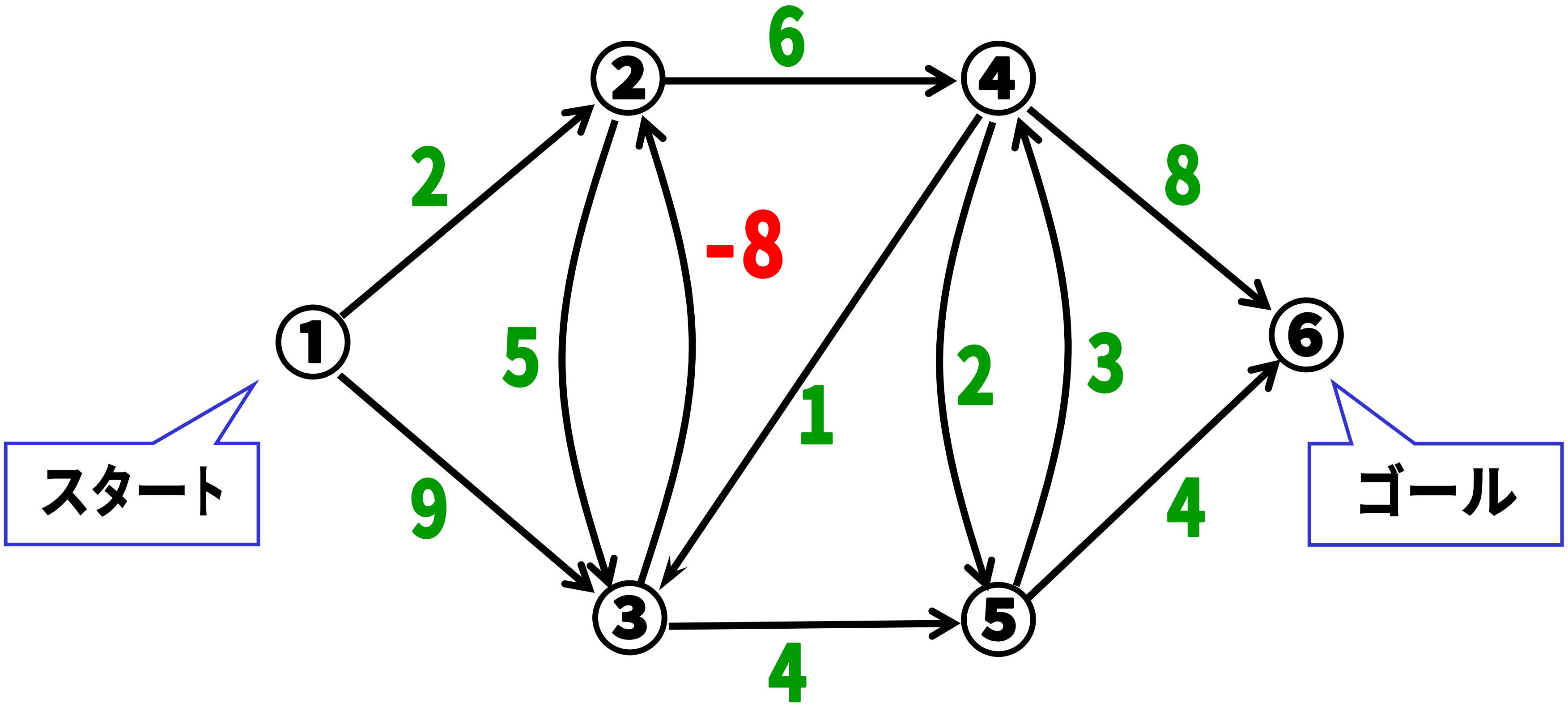
練習1 解答例

①を根とした最短路木



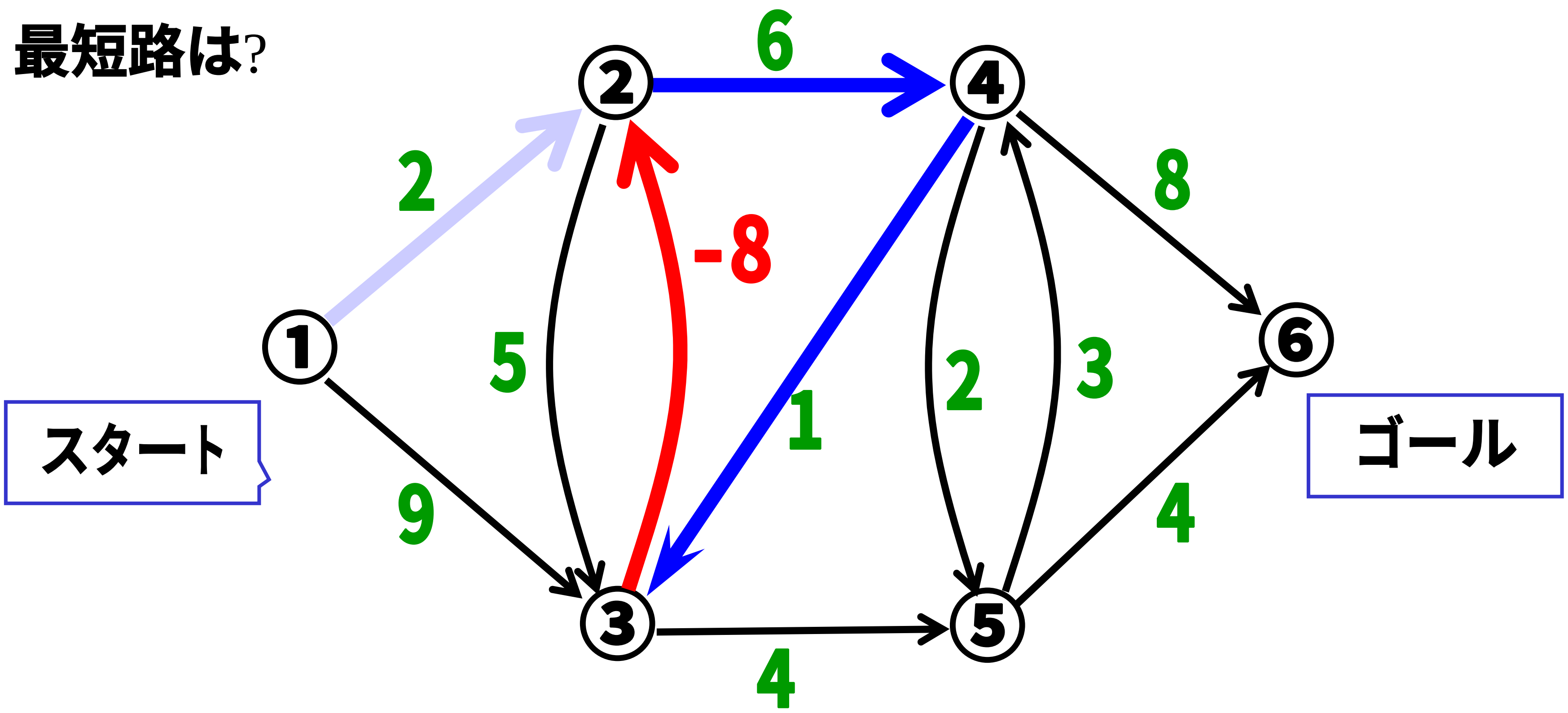
例題2 負の長さがある場合

最短路を求めよ



例題2(続) 負閉路の存在

最短路は?



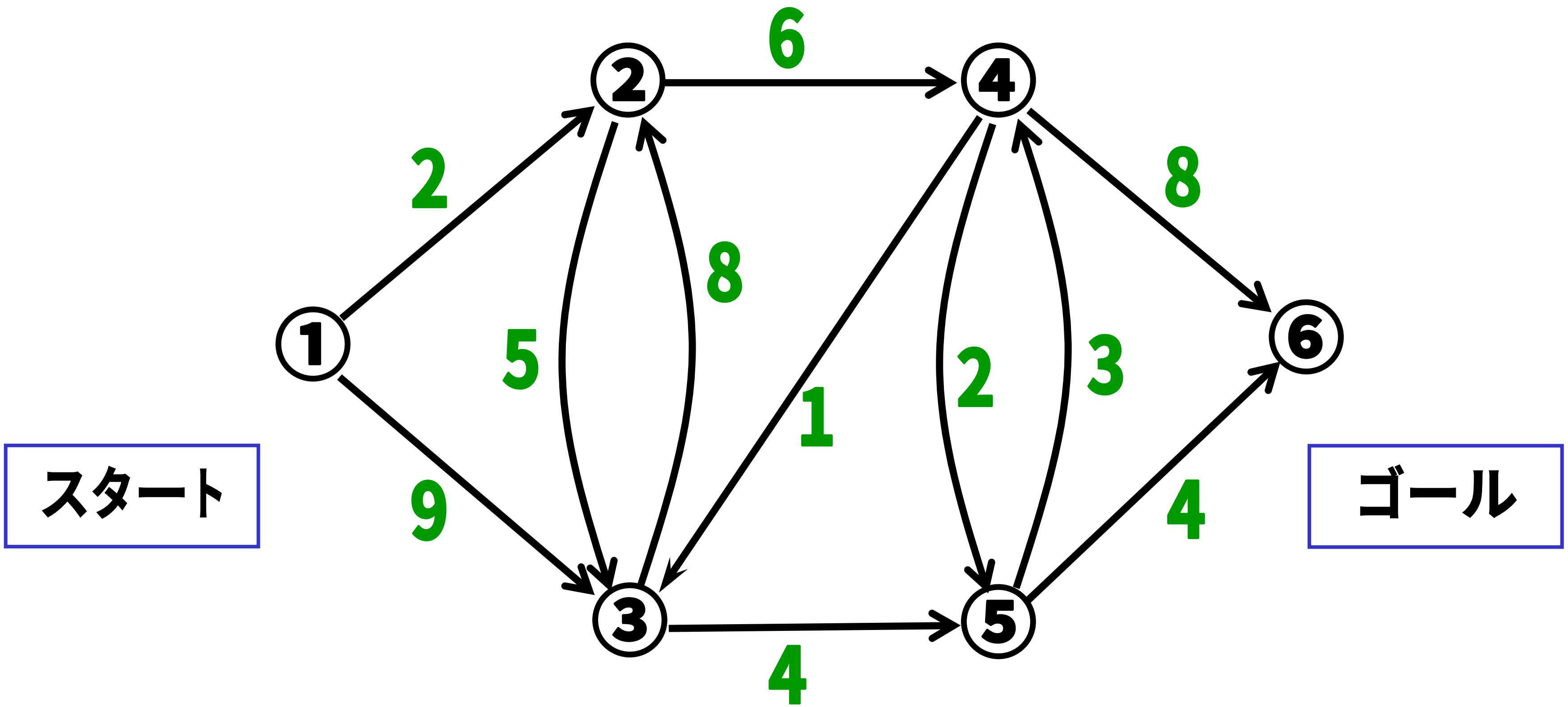
ベルマン-フォード法を適用⇒停止しない

(最短路が存在しない)

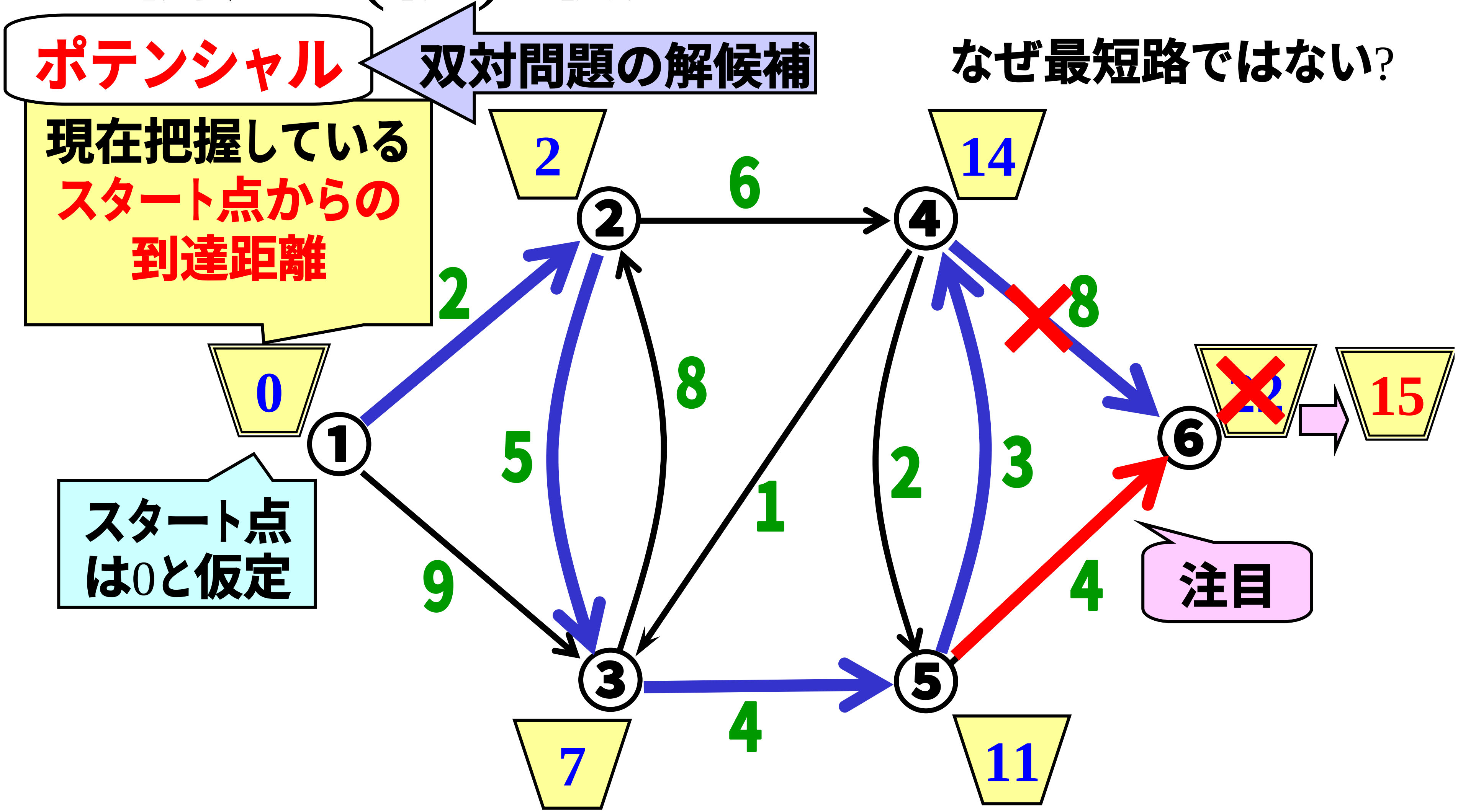
⇩

枝数回の繰り返しで停止させる (負閉路or最短路の発見)

例題3 負の長さの枝が無いとき

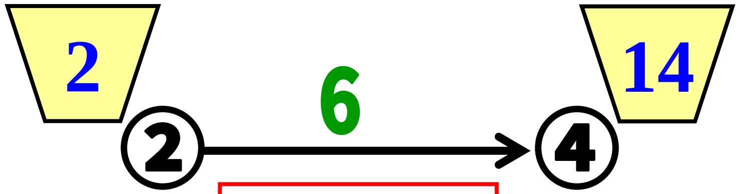


例題3(続) 最短路ではないパス



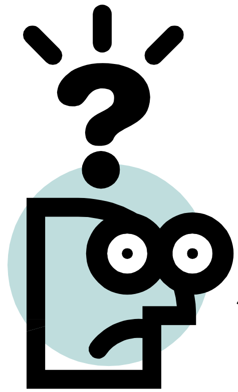
最短路を見つけた⇔ポテンシャルはどういう状況を満足している？

最短路とポテンシャル



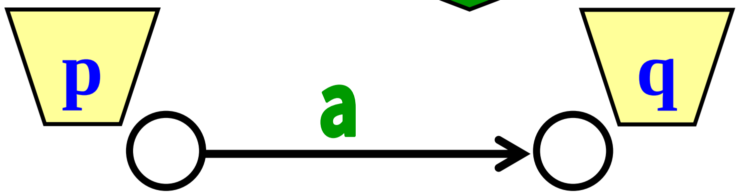
$2+6<14$

最短路を見つけていない



下の性質を満たす
ポテンシャルの見
つければいいんだ.
どうやって？

一般的に書くと



ある枝で $p+a<q$ が成立

最短路を見つけていない
証拠

⇔

すべての枝で

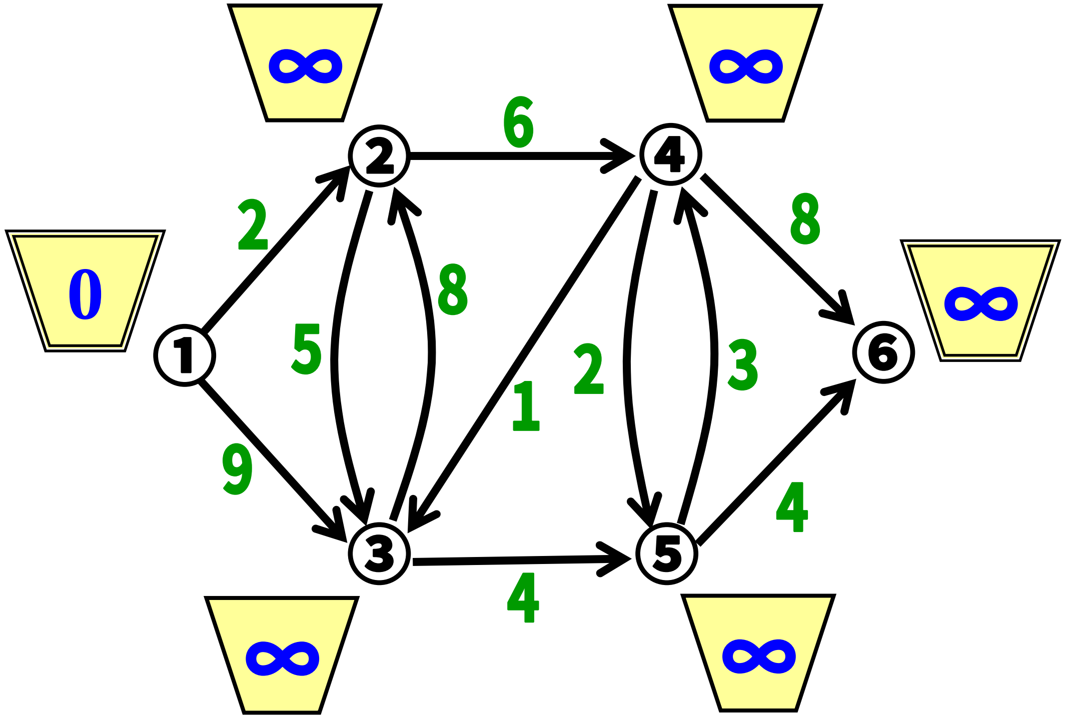
$p+a \geq q$ が成立

最短路でない証拠が存在しない

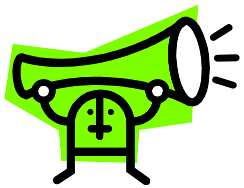
最短路を見つけた！

例題3(続) 性質を満たす ポテンシャルの見つけ方(1)

準備:
- スタートのポテンシャルを0
- 残りの点のポテンシャルは∞
- 全点が未確定.



性質を満たすよう
ポテンシャルを順に更新



ダイクストラ法
Dijkstra

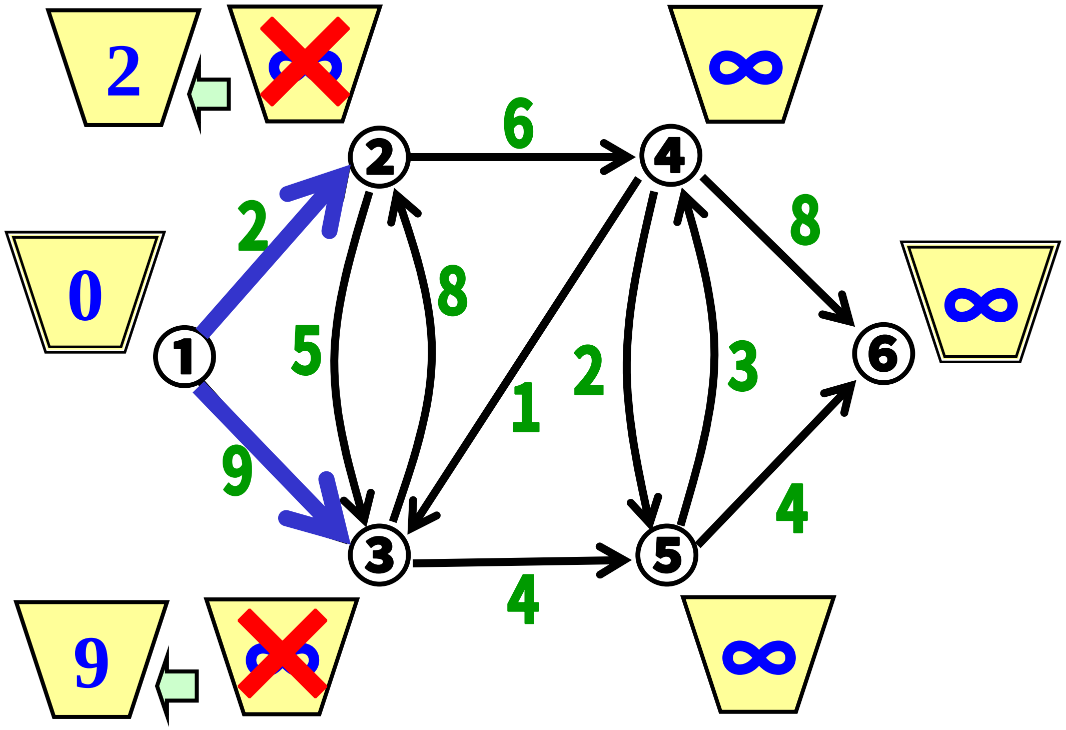
例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方 (1)

手順：全点が確定するまで以下を繰り返す

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

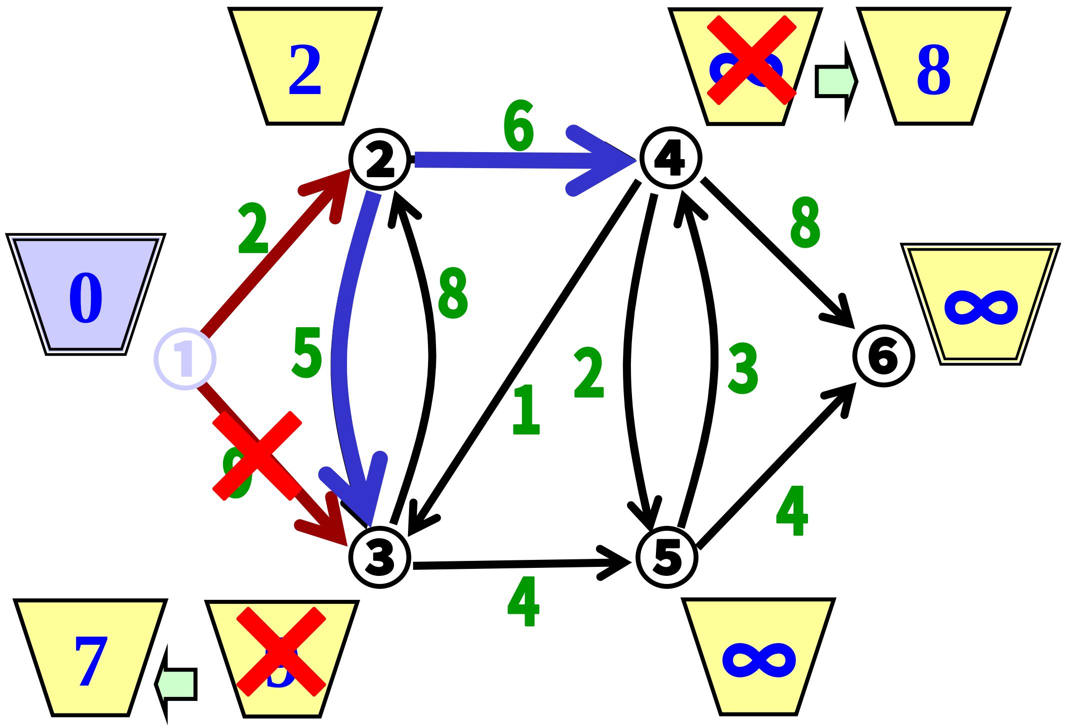


例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方 (2)

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

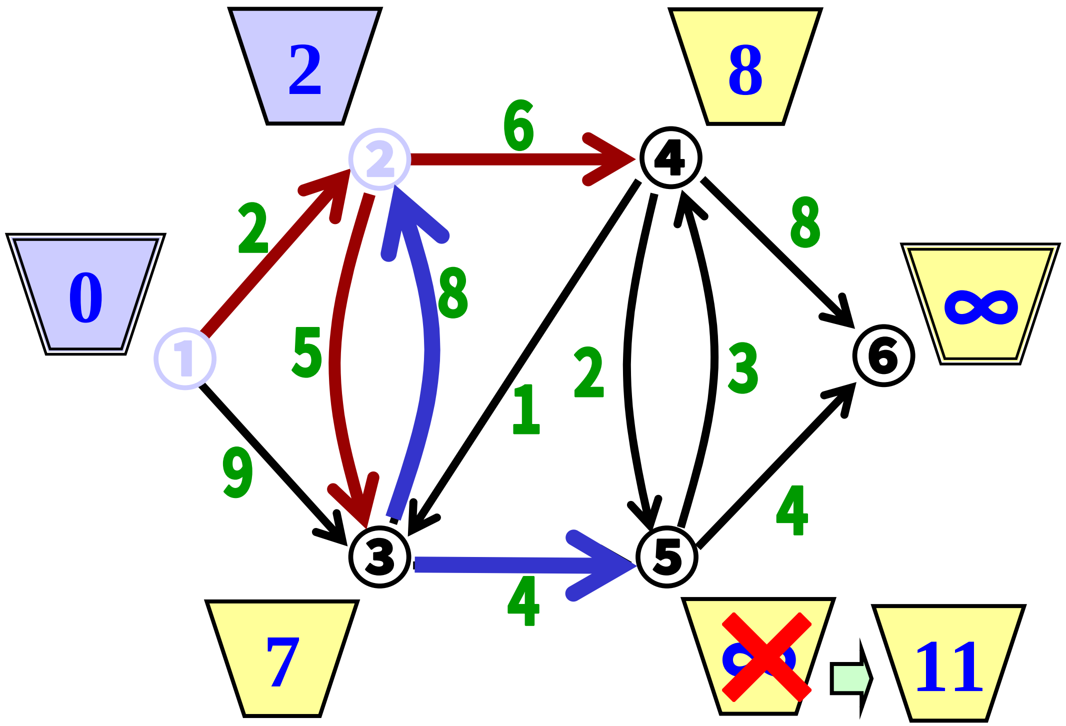


例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方 (3)

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

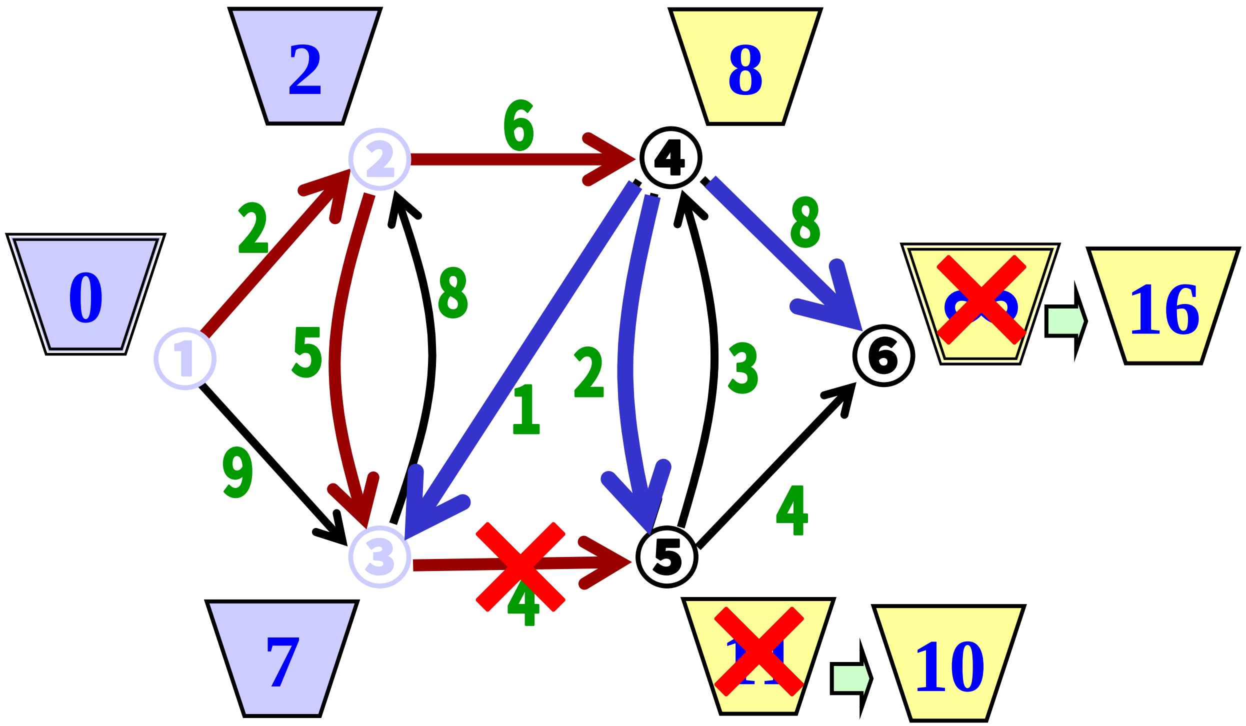


例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方 (4)

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

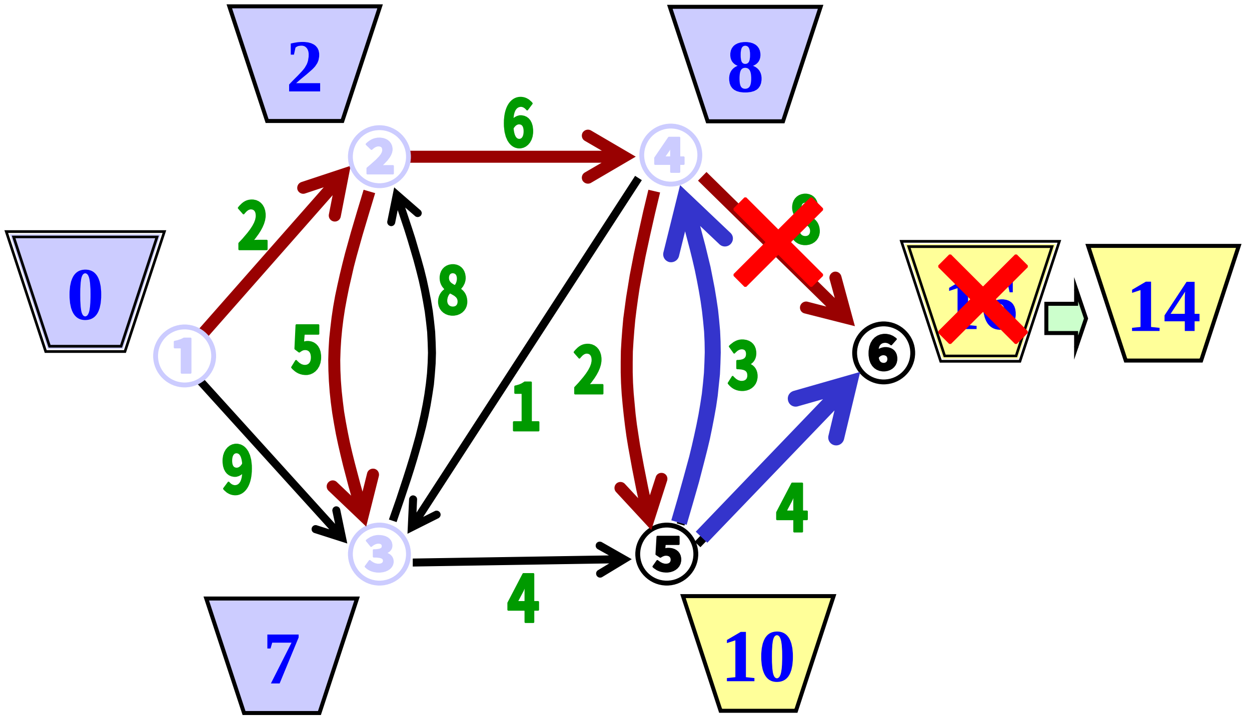


例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方 (5)

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定



例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方 (6)

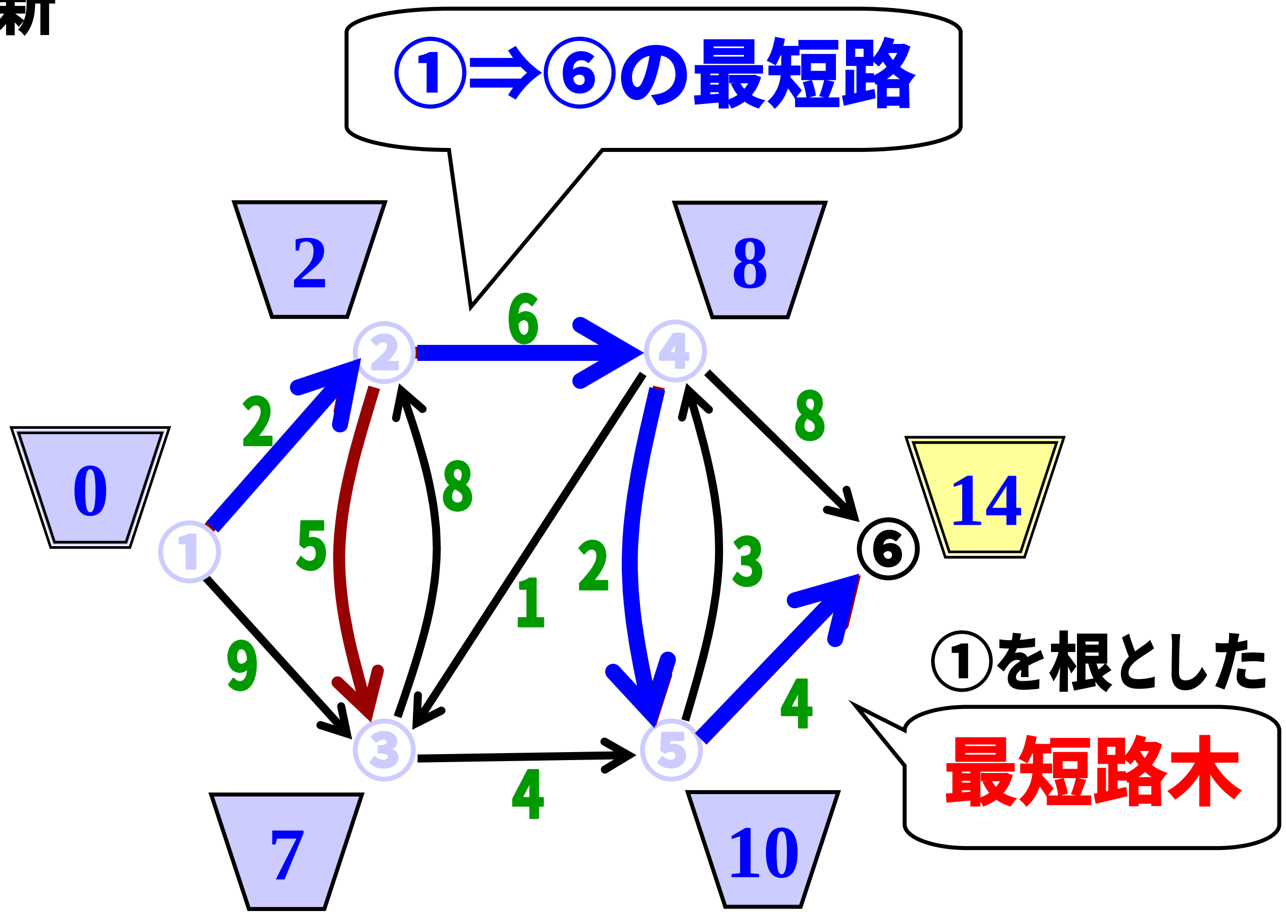
① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

⇩

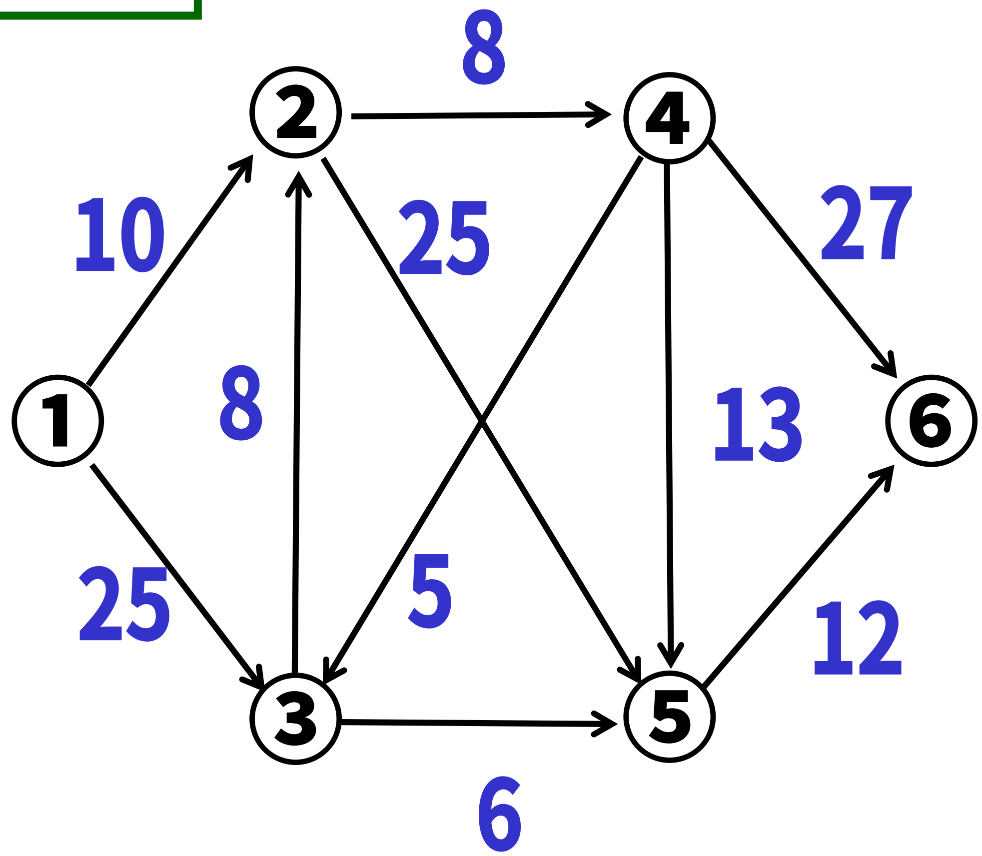
全点が確定し終了



最適なポテンシャルが見つかった ⇨ 最短路も見つかった

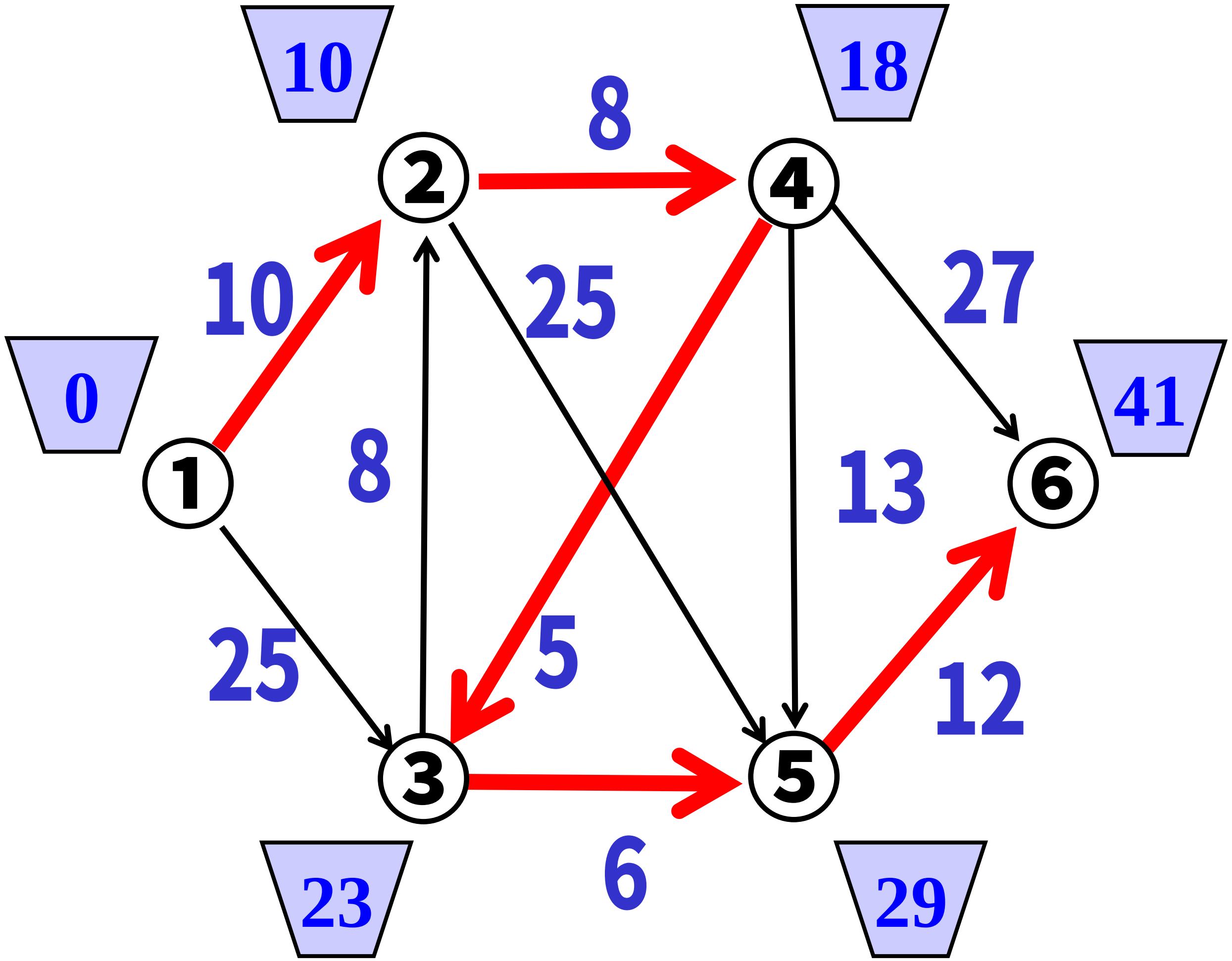
練習2 ダイクストラ法

①⇒⑥の最短路は?



練習2 解答例

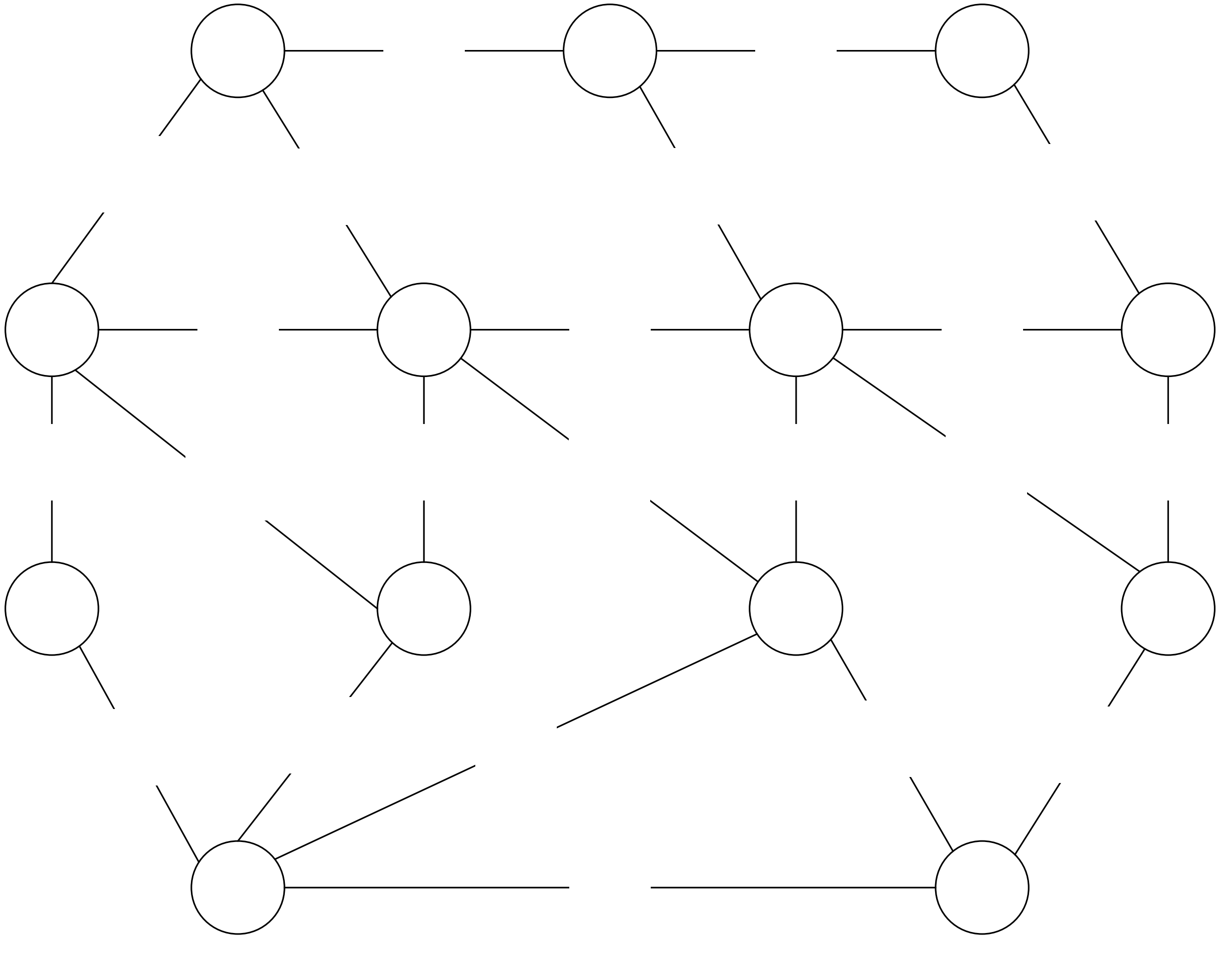
①を根とした最短路木



練習3 無向グラフの最短路

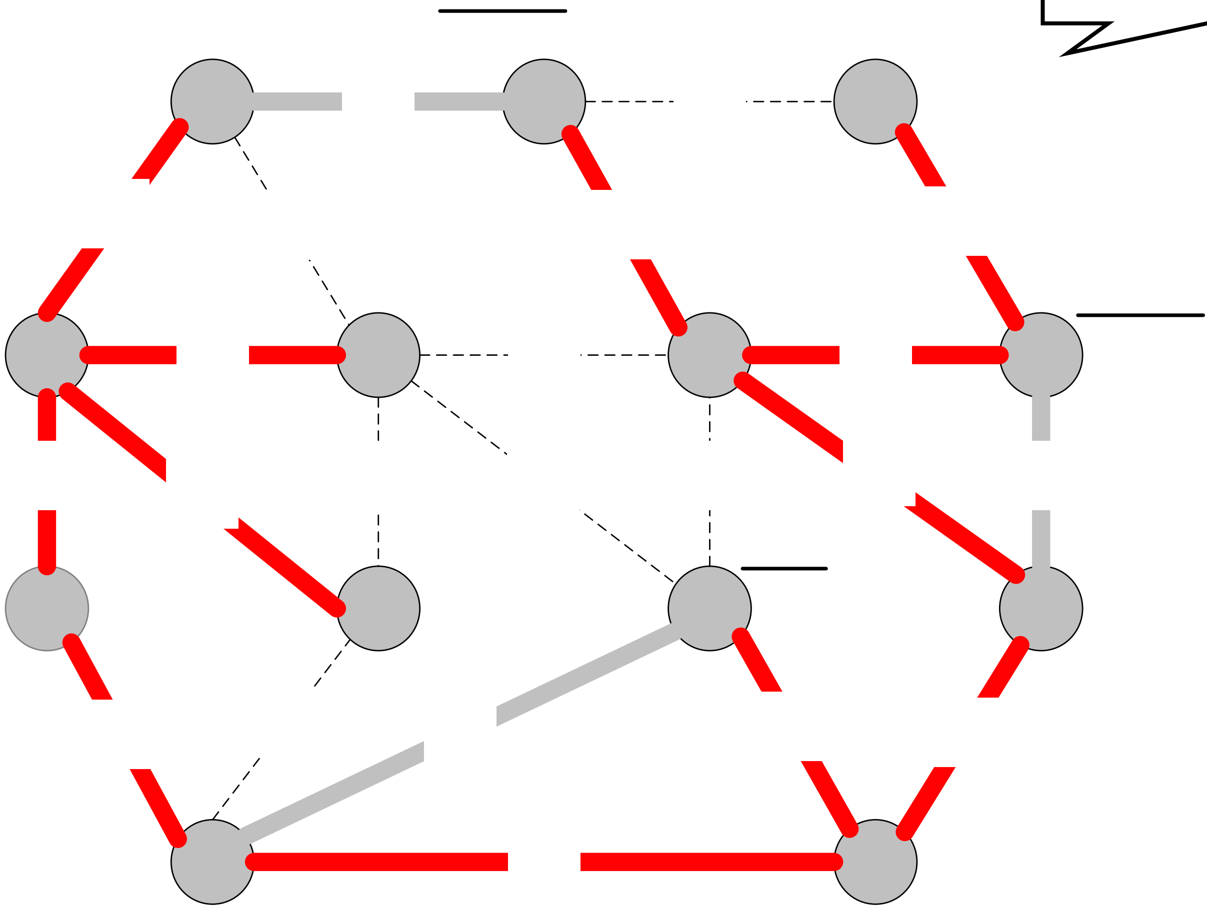
- Eを根とした最短路木は?
- E⇒Hの最短路は?

両方向の枝があると考える



練習3 解答例

ポテンシャル



Eを根とした最短路木

ダイクストラ法の高速実現法

ポテンシャル最小の点を高速に発見

– 未確定点を配列でなくリスト構造で保持（走査する点数を減らす）
– 未確定点をポテンシャルの値順に整列
→整列アルゴリズムの知識が必要

フィボナッチヒープ

効率的実装

$O(m+n\log n)$

基本的なアルゴリズム+データ構造の知識は不可欠

まとめ：最短路問題

特殊な問題

- 1始点-1終点間
- 1始点-全点間
- 全点-1終点間
- 全点間

専用の高速解法があるかどうかは未解決

利用

中心的なタイプ
主な解法：
ダイクストラ法

枝の数値が非負の時のみ利用可能

影響

Floyd-Warshall法
Johnsonの繰り返し法

まとめ：問題を解く戦略を練る

求めたい！

難

ベルマン-フォード法

難

(P)の最適解

(D)の最適解

易

易

(P)の実行可能解

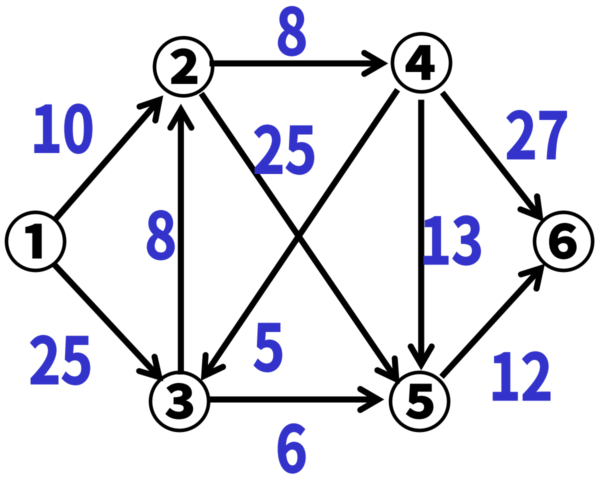
(D)の実行可能解

全部揃うと最適解

相補性条件

練習2 解答例詳細

①⇒⑥の最短路は?

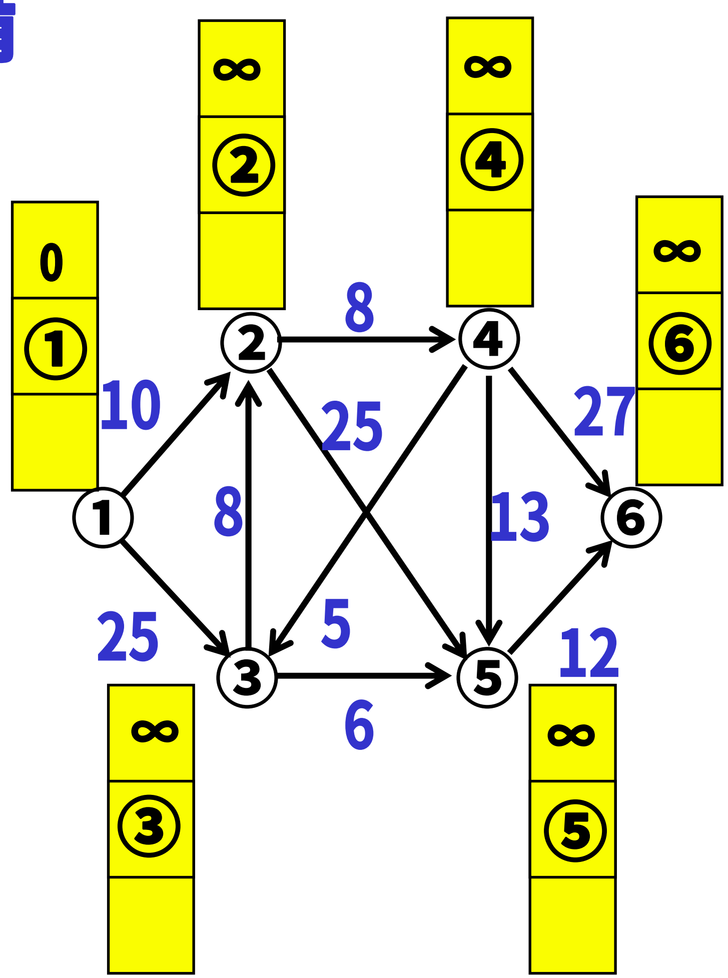


ポテンシャル

ポテンシャルを更新した点

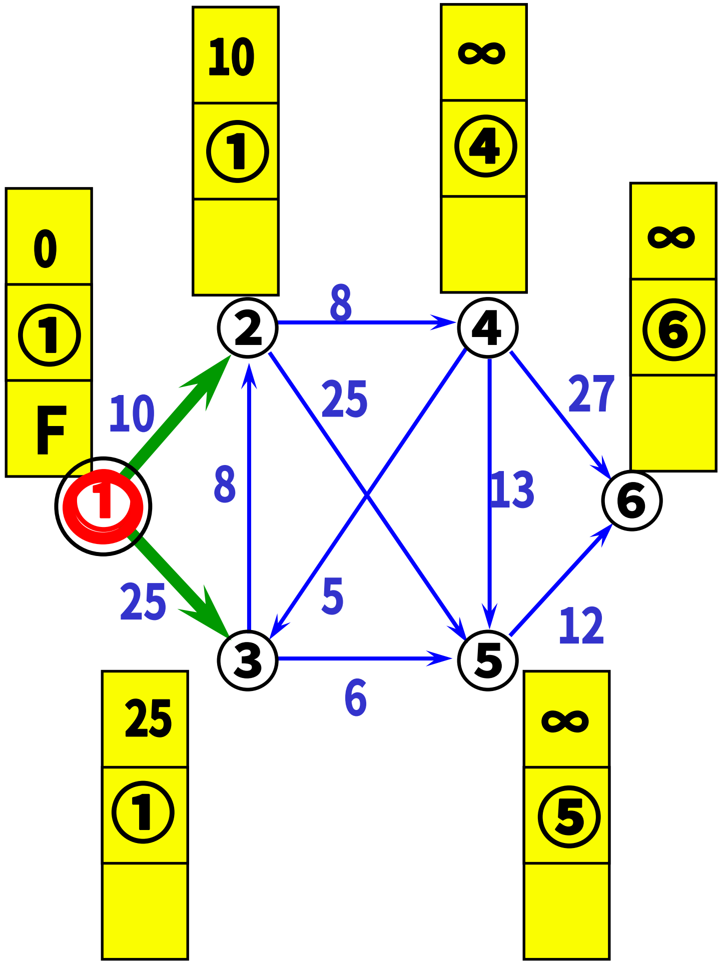
確定済? F＝確定

準備

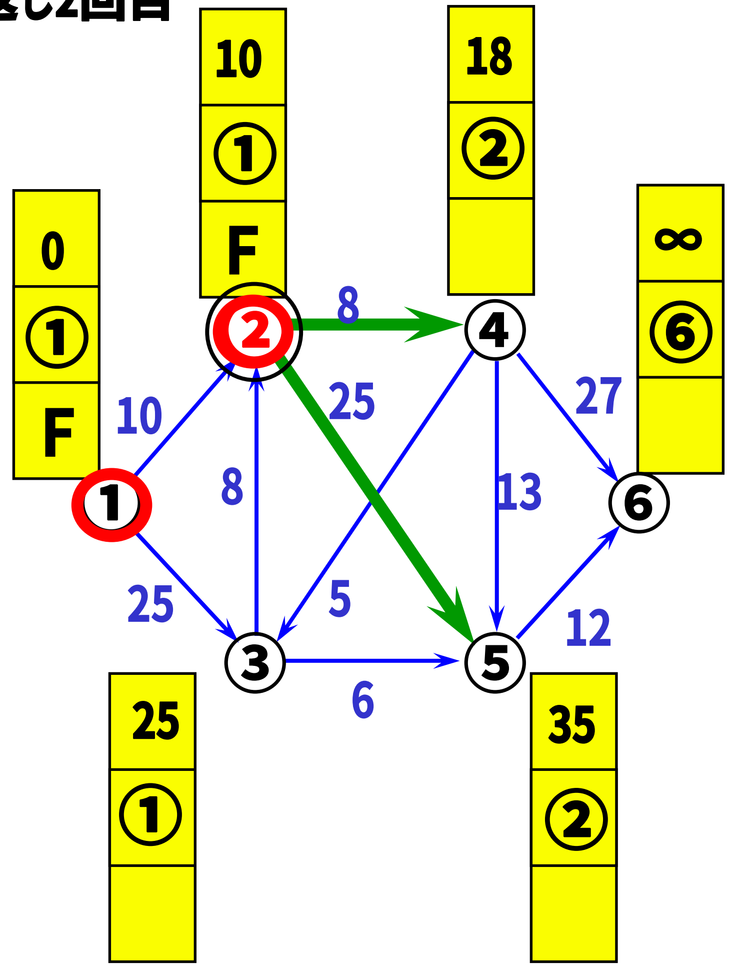


練習2 ポテンシャルの更新

繰り返し1回目

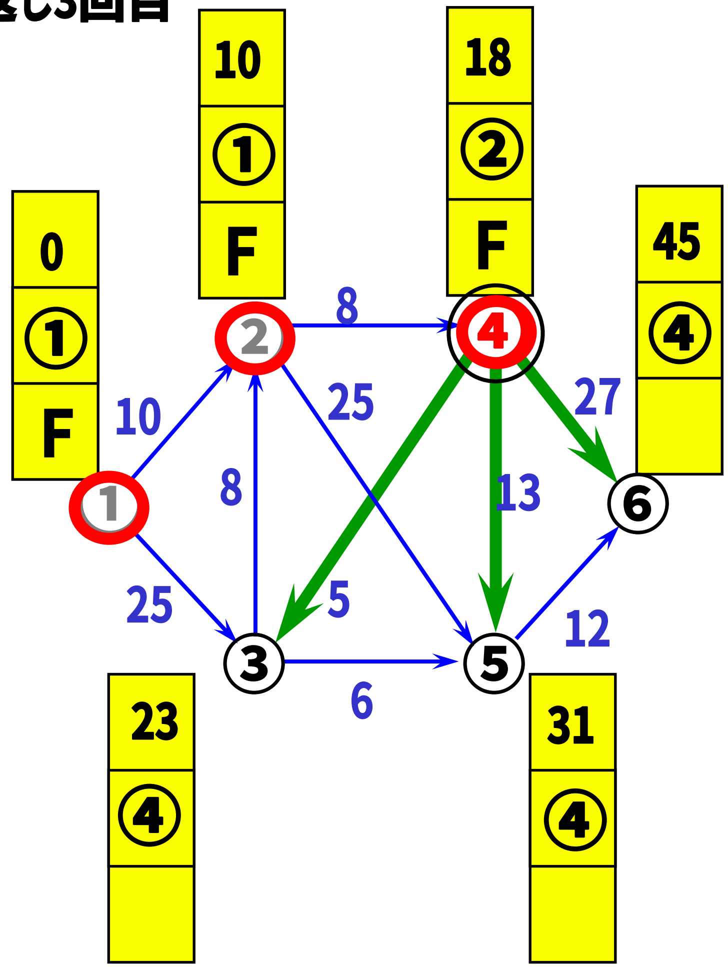


繰り返し2回目

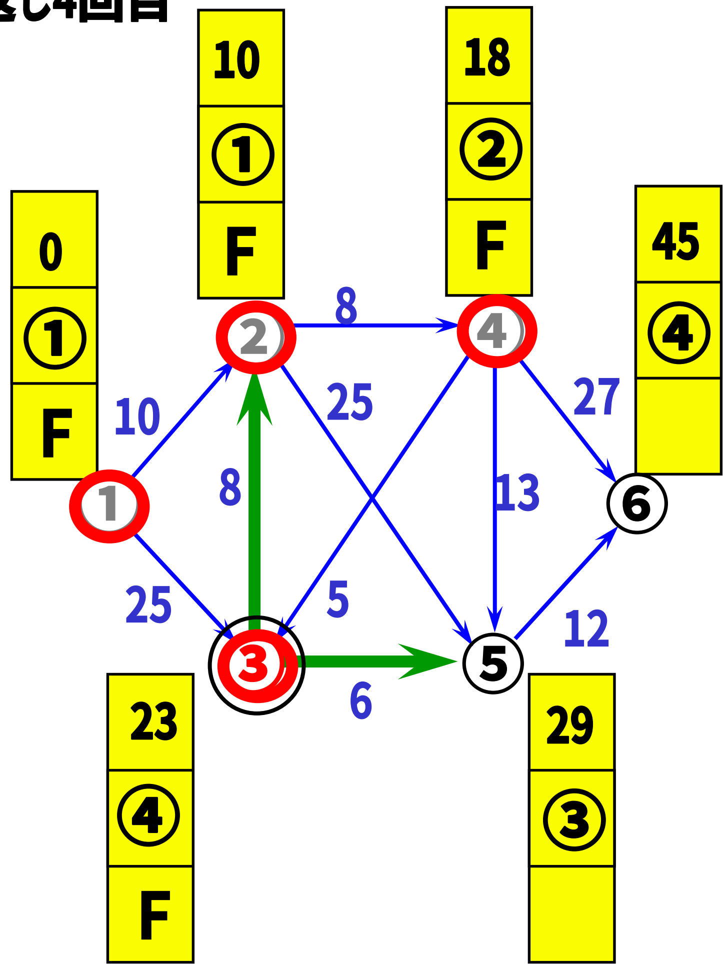


練習2 ポテンシャルの更新(2)

繰り返し3回目

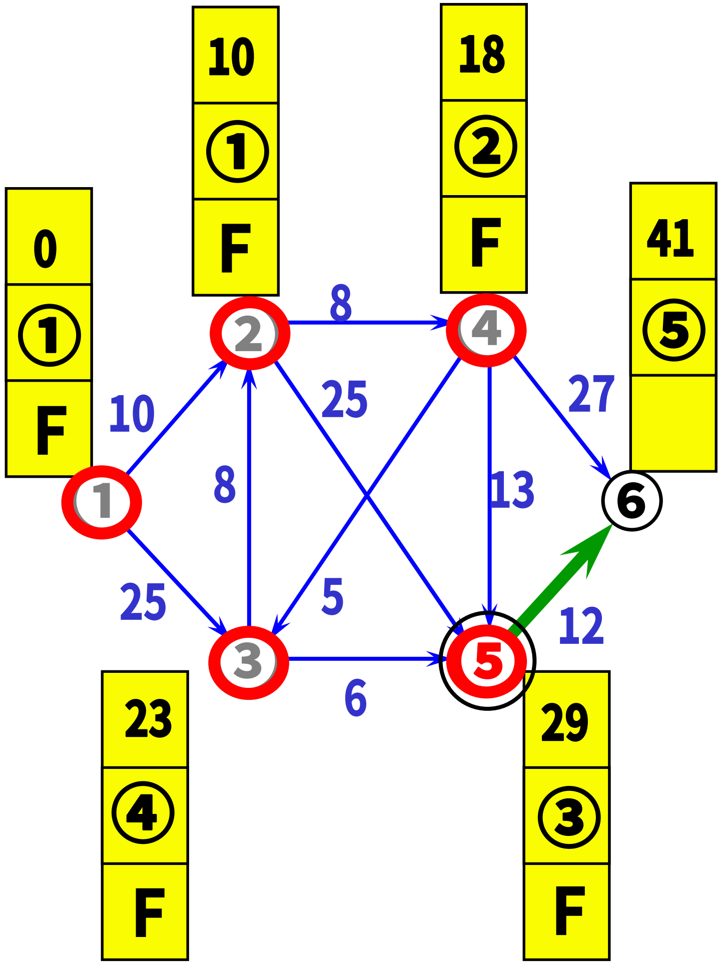


繰り返し4回目

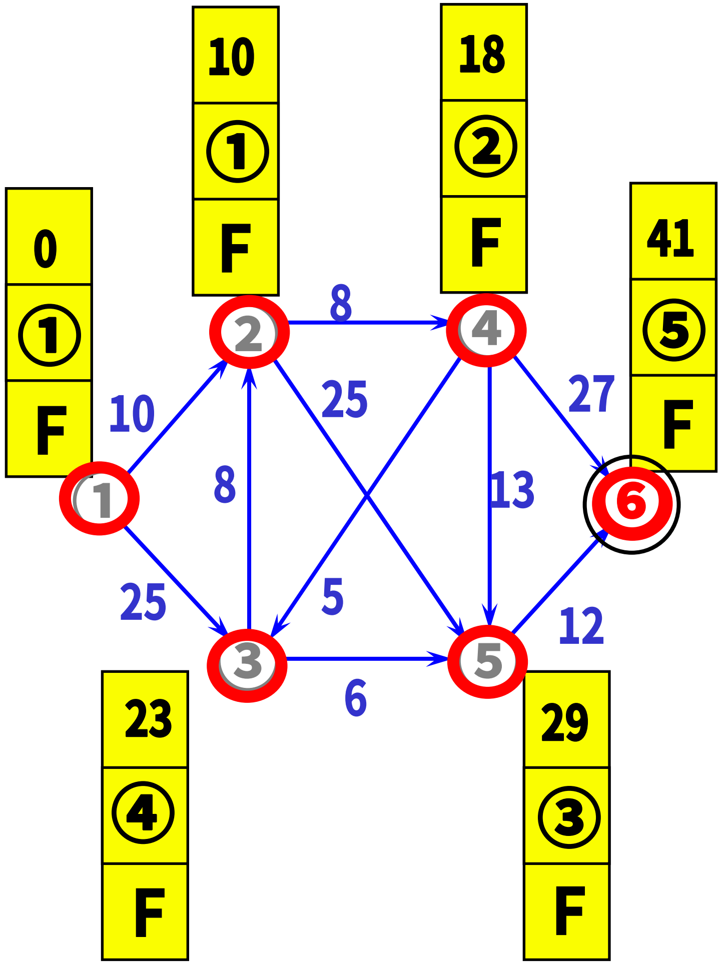


練習2 ポテンシャルの更新(3)

繰り返し5回目

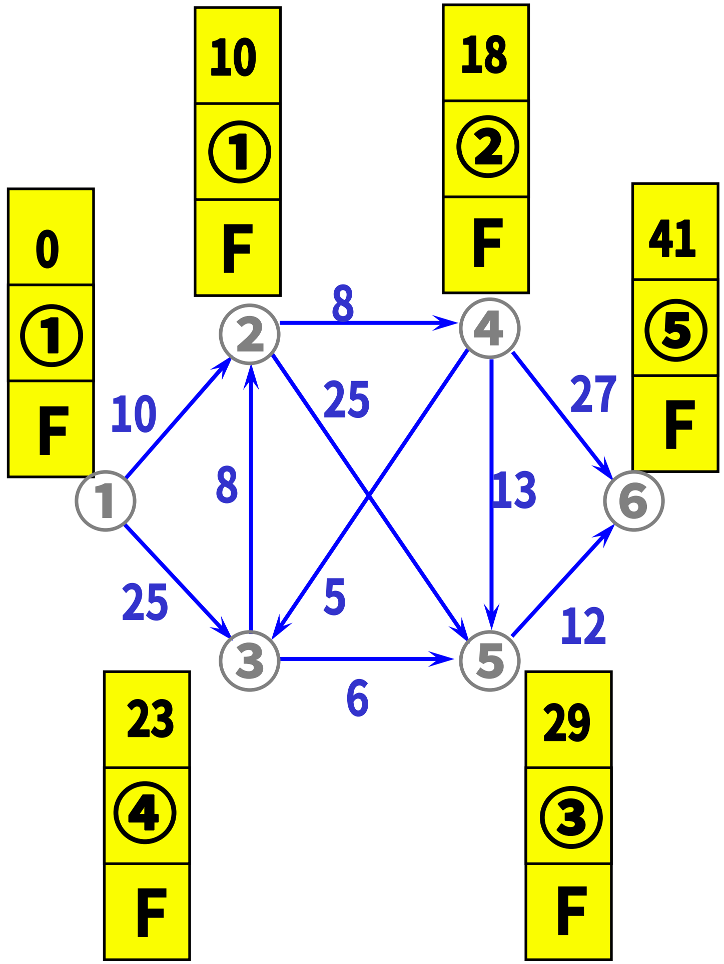


繰り返し6回目



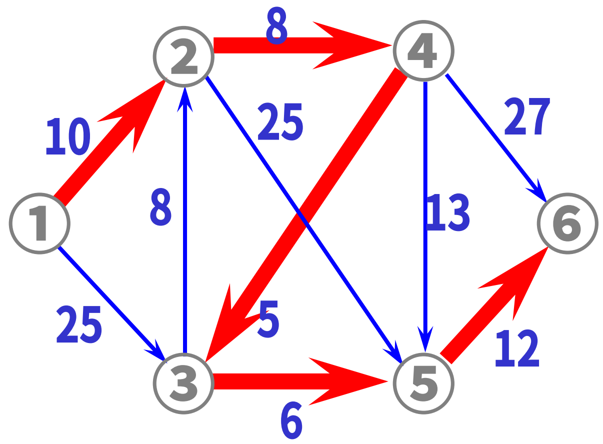
練習2 解答例 まとめ

繰り返し6回目



終了

①を根とした最短路木



最短路の長さは41