意思決定論
階層分析法(AHP)

堀田 敬介

2002 年 11 月*

目 次

*初出 2000 年 8 月, 更新履歴:2001 年 8 月, 2001 年 12 月, 2002 年 9 月

1 AHP の基礎

1.1 意思決定問題の特徴

対象とする意思決定問題の特徴

- 幾つかの候補の中から 1 つを選ばねばならない.
- 各候補があらゆる評価基準に対してベストである (どの評価基準でも一番良い) ということは稀.
- 意思決定者は自分 (あるいはグループ) の評価基準に基づいて決定を下す.
- 評価基準は複数個あり，互いに利害が相反する面をもつ.

1.1.1 問題例 [15]

新車購入 新車を購入したい.

1. 候補 (代替案)：A 車, B 車, C 車, …車の中から選ぶ
2. 評価基準：値段，燃費，乗り心地，車格 (ステイタスシンボル)，…

- 「値段」の安いものを選ぶと…,「車格」「乗り心地」はあきらめるか….
- 「車格」重視なら…,「値段」はあがる….
- 「値段」「燃費」: カタログなどから定量的に分かる評価基準．(ただし，主観にも左右される．予算 100 万円⇒ 110 万円の車はかなり高い，90 万円と 100 万円の車は大差ない，など)
- 「乗り心地」「車格」: 曖昧な基準，主観的価値観に左右される.

資産運用 資産を単一 (あるいは複数) に分散して投資

1. 候補 (代替案)：銀行預金，郵便貯金，株，金，生命保険，…
2. 評価基準：安全性 (元本保証など)，利回り，換金のしやすさ，インフレヘッジ (インフレに強い…)，老後の保障，…

- 全てに優れた資産運用法は存在しない.
- 候補から複数の対象を選び，組み合わせる．⇒ポートフォリオ
- 即ち，ポートフォリオをどう組むかが問題.
- 意思決定者の目的 (性格や価値基準が反映される) に合致する最適なポートフォリオを求める (存在性の問題もある)

購読新聞選択 新聞の特徴を評価，例えば，自分が最も関心のある項目 (記事) の充実度の評価をし，購読新聞を決定する.

1. 候補 (代替案)：朝日，毎日，讀賣，日経，産経，…
2. 評価基準：政治面，経済面，文化面，スポーツ芸能，社会面，…

旅行先の選定 家族旅行の行き先を決める.

1. 候補 (代替案)：温泉，海，山，TDL，親戚の家，海外，…
2. 評価基準：近い，気楽，設備が良い，知人ができる，子供が喜ぶ，安い，…

大学選び 行きたい大学を決める

1. 候補 (代替案)：学業，友人，サークル，資格，就職，費用，通学時間，…
2. 評価基準：A大学，B大学，C大学，D大学，…

パソコン選び 買いたいパソコンを選ぶ

1. 候補 (代替案)：A機，B機，C機，D機，E機，…
2. 評価基準 (レベル 1：用途)：ビジネス，教育，娯楽，趣味，…
3. 評価基準 (レベル 2：性能)：メモリ，CPU，プレインストールソフト，拡張能力，言語，マルチメディア，…

ボーナス使途 ボーナスの使い道を家族で考えると…

1. 候補：貯金，DVD，パソコン，旅行，…
2. 評価基準 (意思決定者)：夫，妻，子供，…

1.2 階層構造

意思決定問題の特徴をまとめてみると…,

- 意思決定には，まず「問題」がある.
- 最終的な選択の対象となる「代替案」がある.
- 代替案の中から 1 つに絞り込むために両者間に「評価基準」が存在する.

これらより,「問題」―「評価基準」―「代替案」という階層構造がある事がわかる.

Example 1.1. 新車購入 [15]
新車購入問題を例にとって，階層構造を書いてみよう.「問題」は「新車購入」,「代替案」は「A 車」「B 車」「C 車」であり,「評価基準」は「値段」「燃費」「乗り心地」「車格」であったから，この問題の階層構造は図 1.1 のようになる.

1.3 一対比較 paired comparison

問題の階層構造が出来上がったら，各レベルの評価項目どうしの重みづけをする．新車購入問題を例にとると,「燃費」より「車格」を「かなり重視する」など．その際，以下の一対比較表の値により比較を行う.

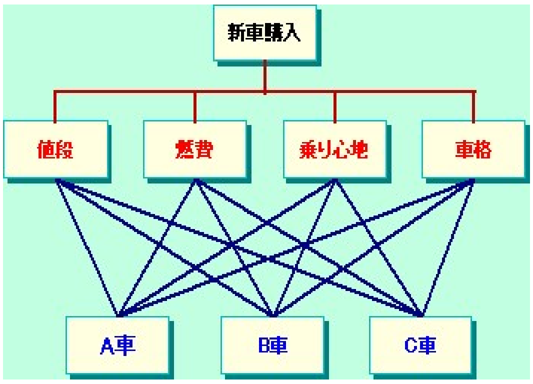

図 1.1: 新車購入問題の階層構造

Remark 1.2. 一対比較を行う際は，対象とする 2 つの項目の比較のみを考えて行う．全体を通して整合性を取ろうとする必要は (ここでは) ない．

芸術作品や小説の評価など，作品 A は 90 点，B は 75 点などと絶対評価をすることは難しい．採点者が複数いると別の困難さも出てくる．しかしながら，A と B を比べたら「A は B より良い」「A と B は同じくらいである」という比較はできそうだ．また,「A は B より非常に良い」という良さの程度をいれると評価の幅が広がるであろう．AHP では，基本的に表 1.1 に示した重要性の尺度を用いて比較をする．

表 1.1: ＡとＢの一対比較表

重要性の尺度	定義	パラメータによる尺度
1	ＡとＢは同じくらい重要 (equal importance)	1
3	ＡＡの方がＢより若干重要・やや重要 (weak importance)	θ
5	Ａの方がＢより重要 (importance)	θ^2
7	Ａの方がＢよりかなり重要 (strong importance)	
9	Ａの方がＢよりきわめて重要 (absolute importance)	

表 1.1 の右端にあるパラメータによる尺度は，高橋 ([8] など) が提案しており，経験則によると，$\theta = 2$〜3 程度が実用上良いらしい．

Example 1.3. 新車購入

この意思決定者にとって,「(行) 値段」は「(列) 乗心地」より「若干重要」なのでこの一対比較値は「3」となる.「(行) 乗心地」と「(列) 値段」は，改めて一対比較を行うのではなく，上記の比較値の逆数「1/3」を使う．以下，同じようにすべての組合せ（の約半分）の一対比較を行い，数値を総当りリーグ戦のような表にまとめるとまとめたものが，表 1.2 である．

表 1.2: 新車購入：評価基準の一対比較表

$\rightarrow$ 比較	値段	燃費	乗心地	車格
値段	1	1/3	3	5
燃費	3	1	5	7
乗心地	1/3	1/5	1	5
車格	1/5	1/7	1/5	1

Definition 1.4. **一対比較行列** paired comparison matrix

一般的に，n 個の比較対象に対する一対比較表の各要素を要素とした n 次正方行列を**一対比較行列** paired comparison matrix とよび，以下で定義できる．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

ただし，

- $a_{ij} > 0$,　即ち A は正行列（すべての要素が正），
- $a_{ji} = \dfrac{1}{a_{ij}}$,　即ち A は**逆数行列**（対象要素が逆数）.
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$,　即ち各列の和は 1.

である．実際の一対比較表では，3 つ目は特に考慮しない．

Problem 1.5. 自分の身近な様々な問題を考えて，評価基準どうし，あるいは代替案どうしの一対比較をし，一対比較表を書いてみよう！

1.4 重み (ウェイト) の求め方

一対比較ができたあとでこれをどう使うのか？もともとの目的は，意思決定者が各評価要素のどれをどれだけ重要視するかを数値で表したいということであった．よって，一対比較表から，各評価要素の重み (ウェイト) を計算することを考える！

1.4.1 重みの計算〔主固有ベクトルを用いた方法〕

一対比較行列の最大固有値と（大きさ 1 の）主固有ベクトルを求め，主固有ベクトルを各評価項目の重みとする．一般に，正方行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の固有値 λ と固有ベクトル v は，等式

$$A v = \lambda v$$

を満たす，自明解 $v = 0$ 以外の解の組として与えられる．詳細については，1.10 節以降を参照のこと．

1.4.2 重みの計算〔簡単な方法：幾何平均 geometric mean を利用〕

表の各行ごとに幾何平均を取り，和が 1 になるように基準化する．この結果のベクトルが重みベクトルであり，この意思決定者の価値観 (評価基準) を数値で表現したものになる！

例えば一対比較行列が 4 次正方ならば，各行ごとに 4 つの列要素の積を求めその 4 乗根を取る．各行の幾何平均 4 つが計算できたら，その合計で各幾何平均値を割る (和が 1 になるように基準化)．累乗根の計算には関数電卓，パソコンなどを用いるとよい．

1. 一対比較行列 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の各行ごとに幾何平均を取る．

$$k_i := \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}} \quad (= \sqrt[n]{a_{i1} \times \cdots \times a_{in}}), \quad (i = 1, \ldots, n)$$

2. 和が 1 になるように基準化．重みベクトルを $(w_1, \ldots, w_n)^T$ とすると，

$$(w_1, \ldots, w_n)^T := \left(\frac{k_1}{\sum_{i=1}^{n} k_i}, \ldots, \frac{k_n}{\sum_{i=1}^{n} k_i} \right)^T$$

行の幾何平均の性質については，[16] の第III部 2.7 節など参照.

Example 1.6. 新車購入：一対比較表 (表 1.2) から，4 つの評価基準の重みを計算

表 1.3: 新車購入：評価基準の一対比較表と評価基準の重み (幾何平均による)

→ 比較	値段	燃費	乗心地	車格	幾何平均	**重み**
値段	1	1/3	3	5	$\sqrt[4]{1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 5} = 1.495$	0.261
燃費	3	1	5	7	$\sqrt[4]{3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 7} = 3.201$	0.559
乗心地	1/3	1/5	1	5	$\sqrt[4]{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 5} = 0.760$	0.133
車格	1/5	1/7	1/5	1	$\sqrt[4]{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1} = 0.275$	0.048
				合計	5.731	1

1.4.3　重みの計算〔超簡単な方法：調和平均 harmonic mean を利用〕

調和平均 harmonic mean とは逆数どうしの算術平均として与えられる．具体的には，与えられた n 個の数 $x_1, \ldots, x_n$ について，以下の式の x_H で定義される．

$$\frac{1}{x_H} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right), \quad \left(x_H = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}\right)$$

加藤・小沢 [7] は，最も簡便な重み計算法として調和平均を用いることを提案している．

1. 一対比較行列 $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n\times n}$ の各行ごとに調和平均を取る．

$$h_i := \frac{n}{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_{ij}}} \quad \left(= n/(\frac{1}{a_{i1}} + \cdots + \frac{1}{a_{in}})\right), \quad (i = 1, \ldots, n)$$

2. 和が 1 になるように基準化．重みベクトルを $(w_1, \ldots, w_n)^T$ とすると，

$$(w_1, \ldots, w_n)^T := \left(\frac{h_1}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, \ldots, \frac{h_n}{\sum_{i=1}^{n} h_i}\right)^T$$

ただし，重みとして調和平均を用いることについて，1 例で幾何平均と近い値を取ると述べているだけで，この値を用いることの数学的根拠に付いては言及していない．

Example 1.7.　新車購入：一対比較表 (表 1.2) から，4 つの評価基準の重み計算

表 1.4: 新車購入：評価基準の一対比較表と評価基準の重み (調和平均による)

$\to$ 比較	値段	燃費	乗心地	車格	調和平均	**重み**
値段	1	1/3	3	5	$4/\left(\frac{1}{1} + 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = 0.882$	0.225
燃費	3	1	5	7	$4/\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) = 2.386$	0.608
乗心地	1/3	1/5	1	5	$4/\left(3 + 5 + \frac{1}{1} + \frac{1}{5}\right) = 0.435$	0.111
車格	1/5	1/7	1/5	1	$4/\left(5 + 7 + 5 + \frac{1}{1}\right) = 0.222$	0.057
				合計	3.926	1

ここで述べた簡易重み (幾何平均・調和平均) についての考察は 1.10.2 節を参照．

1.5　評価項目ごとの代替案の評価

意思決定者のもともとの目的は，代替案の選択のための指標 (数値) を AHP で求めることであった．よって，次に評価項目の重み (ウェイト) から，各代替案の評価を行う．

1.5.1　評価項目ごとの代替案の一対比較

各評価項目ごとに，代替案の一対比較を行う．(この結果，評価項目数だけ，代替案の一対比較表ができる！) 一対比較の仕方は，評価項目の時と同じである．

1.5.2　評価項目ごとの代替案の重み計算

各評価項目ごとに行った代替案の一対比較表から，評価項目に対してと同様に，各代替案の重み (ウェイト) を計算する．計算の仕方は同様.

Example 1.8.　新車購入

評価項目ごとに，代替案の一対比較表を作り，それぞれの表で代替案の重みを求める．重みの計算はすべて幾何平均を用いている.（調和平均の場合は各自やってみよ）

表 1.5: 各評価基準に対する代替案の一対比較表

値段	A 車	B 車	C 車	**重み**
A 車	1	3	5	0.637
B 車	1/3	1	3	0.258
C 車	1/5	1/3	1	0.105

燃費	A 車	B 車	C 車	**重み**
A 車	1	5	5	0.701
B 車	1/5	1	3	0.202
C 車	1/5	1/3	1	0.097

乗心地	A 車	B 車	C 車	**重み**
A 車	1	1/3	1/7	0.092
B 車	3	1	5	0.625
C 車	7	1/5	1	0.283

車格	A 車	B 車	C 車	**重み**
A 車	1	5	3	0.659
B 車	1/5	1	1	0.156
C 車	1/3	1	1	0.185

ここでの重みも全て，和が 1 になるようスケーリングされている.

1.6　代替案の評価値（重みの統合化）

ここまでで,「評価項目の重み」と「各評価項目に対する代替案の重み」が求まったので，これらをまとめて重み集計表を作成する.

Example 1.9.　新車購入

評価項目の重みと，評価項目ごとの各代替案に対する重みをまとめたものは表 1.6 のようになる.

表 1.6 の重みと評価項目の重みを掛けて和を取り各代替案の総合得点を求めると，表 1.7 のようになる.

表 1.6: 新車購入問題の重み集計表

	値段 (0.261)	燃費 (0.559)	乗り心地 (0.133)	車格 (0.048)
A 車	0.637	0.092	0.701	0.659
B 車	0.258	0.625	0.202	0.156
C 車	0.105	0.283	0.097	0.185

表 1.7: 各代替案の総合得点表

	値段	燃費	乗り心地	車格	総合得点
A 車	0.261×0.637	0.559×0.092	0.133×0.701	0.048×0.659	0.342
B 車	0.261×0.258	0.559×0.625	0.133×0.202	0.048×0.156	0.451
C 車	0.261×0.105	0.559×0.283	0.133×0.097	0.048×0.185	0.207

これが，この意思決定者の代替案に対する総合得点 (主観的価値基準による評価) であり，選好順は，B 車 ＞ A 車 ＞ C 車 となる．

Problem 1.10. 様々な意思決定問題を例にして，各代替案の（あなたにとっての）総合得点を求めてみよう！

1.7 判断の整合性判定

全体の整合性とは？

(例) ある人が「乗り心地」より「燃費」が重要で,「燃費」より「値段」が重要としたなら，当然「乗り心地」より「値段」が重要となるはず！(推移律) しかし，一対比較の時に,「乗り心地」のほうが「値段」より重要としていると，全体としての整合性に掛ける．

また，順序付けで推移律が成り立っていたとしても，重要さの度合い (比較数値の選び方) が著しく偏っている時も，全体としての整合性に掛ける．例えば,「乗り心地」が「燃費」に対し 1（同じ程度）,「燃費」が「値段」に対し 1（同じ程度）なのに,「乗り心地」が「値段」に対し，9（きわめて重要）など.

どうするか？ ⇒ 不整合性の度合いを一対比較表より計算できる！この値を計算して，全体の整合度の検証をしよう！

1.7.1 **整合性の度合い** C.I. **の計算法 (重みを幾何平均・調和平均で求めている場合)**

1. 各評価項目のウェイトを一対比較表 (A) の縦の値に掛けて新しい表 (B) を作る.
2. 表 (B) の横の和を取る.
3. 表 (B) の横の和をウェイトで割り，得られた値の算術平均を計算する.
4. 以下の式で整合度を計算する.

$$\text{整合度 C.I.} = \frac{\text{算術平均} - \text{評価項目数}}{\text{評価項目数} - 1}$$

C.I. は一対比較表が完全な整合性を持つ時 0 となる．一般に正の値を取り，0.1 までならば整合度があると判断する (場合により 0.15 まででも良い)．それより大きくなった時は，一対比較表を再検討する必要がある.

各評価項目に対する代替案の一対比較表についても整合度 C.I. を計算し，整合性を検証する.

Example 1.11.　新車購入

表 1.8: C.I. を求めるための表（新車購入の評価項目一対比較表より）

重み	値段 (0.261)	燃費 (0.559)	乗心地 (0.133)	車格 (0.048)	和	和/重み
値段	$1 \times 0.261 = 0.261$	$1/3 \times 0.559 = 0.186$	$3 \times 0.133 = 0.398$	$5 \times 0.048 = 0.240$	1.085	1.085 / 0.261 = 4.157
燃費	$3 \times 0.261 = 0.783$	$1 \times 0.559 = 0.559$	$5 \times 0.133 = 0.663$	$7 \times 0.048 = 0.336$	2.340	2.340 / 0.559 = 4.189
乗心地	$1/3 \times 0.261 = 0.087$	$1/5 \times 0.559 = 0.112$	$1 \times 0.133 = 0.133$	$5 \times 0.048 = 0.240$	0.571	0.571 / 0.133 = 4.308
車格	$1/5 \times 0.261 = 0.052$	$1/7 \times 0.559 = 0.080$	$1/5 \times 0.133 = 0.027$	$1 \times 0.048 = 0.048$	0.206	0.206 / 0.048 = 4.304
					算術平均	4.240

$$\text{C.I.} = \frac{4.240 - 4}{4 - 1} = 0.07986 \quad (< 0.1)$$

各評価項目に対する代替案の一対比較表（4 つ）についても整合度を計算し，0.1 より小さいかどうかを見る．すべての整合度が 0.1 より小さければよし，そうでなければ，C.I. 値が 0.1 を超えている一対比較表について一対比較をやり直す.

1.8 **基礎編で分かる** AHP **の長所**

1. 幾つかの代替案の中から，最も重みの高い (主観的価値基準による評価の高い) ものを見つけられる.

2. 代替案全ての優先順位 (主観的価値基準による選好順位) が分かる．
3. 総合得点で比べるだけでなく，総合得点表から，各代替案ごとの評価基準に対する重み付けを計算しているので，細かい検討が可能.
4. 判断の整合性をチェックできる．
5. 評価基準（項目）がたくさんあり，互いに共通の尺度がないような問題を解決可能.
6. 一対比較を曖昧な表現による主観的評価で数値化できる．その結果意思決定者の負担が軽くなる．
7. 完全に首尾一貫していないデータを扱える．さらに，首尾一貫性の度合いを計算できる．
8. 複雑・構造が不明確な問題を，階層構造で整理・考察し，各レベルごとに部分的な比較・検討を繰り返すだけで，全体の評価ができる．
9. 主観的判断をシステマティックに行っているので，意思決定者の主観を，評価に容易に反映できる．
10. 欠損データがあるものや，データが取りにくい問題の解決に使える．
11. 様々な場合を想定して意思決定の影響を予測したい問題に対応できる．
12. グループでの意思決定に適応できる．
13. 一対比較値に特別な単位は用いない (unit free) ので，様々な値（量的データに限らず質的データも）を同列に扱える．

1.9　AHP の正当性：基礎編で出てきた数値の意味など

AHP の計算には，一対比較など，人間 (意思決定者) の**主観による判断**を数値化したものを用いているが，人間の判断は結構正しいという実験結果がある．

Problem 1.12.　一対比較をしてみよう！

(1) 三角形の面積比を予想する：用紙に描かれた 5 つの三角形を見て，その面積の比率を一対比較表にし，重みを計算してみる．実際の面積を計算して比較してみよう！

(2) 国土面積を比較する：日本列島の北海道・本州・四国・九州・沖縄の白地図から面積比を一対比較して重みを計算し，実際の面積と比べてみよう！

1.10　AHP の数学的理論

AHP は評価項目の重要度 (ウェイト)，あるいは，評価項目ごとの代替案の重要度 (ウェイト) の「比」を問題にしている．⇒ 比率尺度 (ratio scale) による評価.

AHP は比率尺度による一対比較をもとに，全体としての項目間の比率尺度を決定する方法！

1.10.1 一対比較行列の性質

以下の n 個の評価項目とその (本来の) 重みが与えられているとする．

表 1.9: n 個の評価項目とその (本来の) 重み

評価項目	I_1, $\cdots$, I_n
重み	w_1, $\cdots$, w_n

ただし，$w_i > 0$ ($i = 1, \ldots, n$).

このとき，任意の一対の項目 I_i, I_j ($i, j = \{1, \ldots, n\}$) の重要度の一対比較値 a_{ij} は, 完全な整合性のもとでは

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \quad (a_{ji} = \frac{w_j}{w_i})$$

という関係を満たす．故に，一対比較行列 $A = [a_{ij}]$ は

$$A = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

となる対角要素が全て 1 の正方行列である．対称要素は逆数となっている．ただし，これは理想的な評価が行われた場合の A である．

この行列 A に，右から重みベクトル v を掛けると，

$$\begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

即ち，$A\mathrm{v} = n\mathrm{v}$ を満たし，v が A の固有ベクトル，n がその固有値であることが分かる．さらに，以下で述べるように n, v は A の最大固有値，主固有ベクトルとなる！

実際に作られる一対比較行列は A のように理想的な形をしているわけではないが，A の近似になっているとみなし，その (最大) 固有値と主固有ベクトルを求めれば，その主固有ベクトルが各評価項目の重みとして採用できる！というのが AHP の基本アイデア！

Lemma 1.13. 式 (1.1) で表される n 次正方行列 A(対角要素が 1 の正，逆数行列) の固有値の和は n である．

Proof: A の n 個の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とすると，固有値の和はトレースに等しいという事実より，

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}A = 1 + \cdots + 1 = n.$$

∎

Lemma 1.14. 式 (1.1) で表される n 次正方行列 A(対角要素が 1 の正，逆数行列) について，rank(A)=1. 又，n 個の固有値のうち 1 つだけが正で，他（n-1 個）は全て 0 である．

Proof:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{w_1} & \frac{1}{w_2} & \cdots & \frac{1}{w_n} \end{pmatrix}$$

より，明らかに rank(A) = 1.

> 一般に，行列 $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ があるベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ で，$C = \mathbf{a}\mathbf{b}^T$ と表せる時，rank(C)=1 である．理由は明らかだが，例えば行基本変形で，C の任意の i 行に対し，第 1 行に a_i/a_1 を掛けて第 i 行から引くと i 行の要素は全て 0 になる．

また，

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{w_1} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{w_2}{w_1} & 1 & & \text{\Large 0} \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{w_n}{w_1} & \text{\Large 0} & & 1 \end{pmatrix} \qquad \left[\text{このとき}, B^{-1} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ w_2 & 1 & & \text{\Large 0} \\ \vdots & & \ddots & \\ w_n & \text{\Large 0} & & 1 \end{pmatrix} \right]$$

とすると，

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} n & \frac{1}{w_2} & \cdots & \frac{1}{w_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

固有値は相似変換で不変，即ち，A と BAB^{-1} の固有値は一致するので，

$$|BAB^{-1} - \lambda I| = \begin{vmatrix} n-\lambda & \frac{1}{w_1} & \cdots & \frac{1}{w_n} \\ 0 & -\lambda & & \text{\Large 0} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \text{\Large 0} & & -\lambda \end{vmatrix} = (n-\lambda)\cdot(-1)^{n-1}\lambda^{n-1} = 0$$

より，A の固有値は n と 0 (n-1 個重複) である．またこのとき，最大固有値 $\lambda_{max} = n$ に対する主固有ベクトルは，$k(w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$ $(k \neq 0)$ となる． ∎

Lemma 1.13 と Lemma 1.14 より $\lambda_{\max} = n$. これより AHP で最大固有値 $\lambda_{\max}$ と主固有ベクトル v を使う動機となる.

ただし，これは理想的な行列 A での話だということに注意. 一般には次の Theorem 1.15 より $\lambda_{\max} \geq n$.

Theorem 1.15. n 次正方，一対比較行列 A(対角要素が 1 の正，逆数行列) の最大固有値を $\lambda_{\max}$ とし，その主固有ベクトルを v とすると，$A\mathrm{v} = \lambda_{\max}\mathrm{v}$ であり，このとき，

$$\lambda_{\max} \geq n.$$

Proof:

$$\begin{aligned}
A\mathrm{v} = \lambda_{\max}\mathrm{v} &\rightleftharpoons \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \lambda_{\max} v_i \quad \text{for } i = 1, \dots, n \\
&\rightleftharpoons \lambda_{\max} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{v_j}{v_i} \quad \text{for } i = 1, \dots, n \\
&\to n\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{v_j}{v_i} \\
&\rightleftharpoons n\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i<j}\left(a_{ij}\frac{v_j}{v_i} + \frac{1}{a_{ij}}\frac{v_i}{v_j}\right) \quad (\text{by } a_{ji} = 1/a_{ij}) \\
&\rightleftharpoons n\lambda_{\max} = n + \sum_{i<j}\left(y_{ij} + \frac{1}{y_{ij}}\right) \quad \left(y_{ij} := a_{ij}\frac{v_j}{v_i}\right) \\
&\rightleftharpoons \lambda_{\max} = 1 + \frac{1}{n}\sum_{i<j}\left(y_{ij} + \frac{1}{y_{ij}}\right) \geq 1 + \frac{1}{n}\sum_{i<j} 2 = 1 + \frac{2}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2} = n
\end{aligned}$$

∎

最後の行の不等号は任意の $i < j$ についての相加・相乗平均による. よって，等号が成り立つのは，全ての $i < j$ について，

$$y_{ij} = \frac{1}{y_{ij}}, \text{ つまり } y_{ij} = 1 \quad (y_{ij} \geq 0 \text{ より})$$

の時，即ち，

$$y_{ij} = a_{ij}\frac{v_j}{v_i} = 1, \text{ つまり } a_{ij} = \frac{v_i}{v_j}$$

の時. またこのとき (かつ，このときのみ)，以下の様に，任意の i, j, k に対して推移律が成立する！

$$a_{ik} = \frac{v_i}{v_k} = \frac{v_i}{v_j}\frac{v_j}{v_k} = a_{ij}a_{jk}$$

一般の一対比較行列 A については，推移律が成立するとは限らないし，$\lambda_{\max} > n$.

1.10.2 簡易重み計算についての考察

一対比較行列 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が，n 個の評価項目の本来の重み $w_1, \ldots, w_n$ で，$a_{ij} = \dfrac{w_i}{w_j}, (i, j = 1, \ldots, n)$ で与えられているとする．ただし，$a_{ij} > 0$，$a_{ji} = \dfrac{1}{a_{ij}}, (i, j = 1, \ldots, n)$．式 (1.1) 参照．また，$w_1 + \cdots + w_n = 1, (i = 1, \ldots, n)$，即ち，本来の重みは和が 1 にスケーリングされているとする．

このとき，各行の幾何平均 $k_i, (i = 1, \ldots, n)$ を求めると，

$$k_i = \sqrt[n]{a_{i1} \times \cdots \times a_{in}} = \sqrt[n]{\frac{w_i}{w_1} \times \cdots \times \frac{w_i}{w_n}} = \frac{w_i}{\sqrt[n]{w_1 \times \cdots \times w_n}}, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

であり，これら n 個の幾何平均の和 K は，

$$K := \sum_{i=1}^{n} k_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{\sqrt[n]{w_1 \times \cdots \times w_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{w_1 \times \cdots \times w_n}} \sum_{i=1}^{n} w_i = \frac{1}{\sqrt[n]{w_1 \times \cdots \times w_n}}.$$

故に，求めたい重みは，

$$w_i := \frac{k_i}{K} = w_i, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

となり，本来の重みと一致する！

同様に，一対比較行列 A の各行の調和平均 $h_i, (i = 1, \ldots, n)$ を求めると，

$$h_i = \frac{n}{\dfrac{1}{a_{i1}} + \cdots + \dfrac{1}{a_{in}}} = \frac{n}{\dfrac{w_1}{w_i} + \cdots + \dfrac{w_n}{w_i}} = \frac{n w_i}{w_1 + \cdots + w_n} = n w_i, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

であり，これら n 個の調和平均の和 H は，

$$H := \sum_{i=1}^{n} h_i = \sum_{i=1}^{n} n w_i = n.$$

故に，求めたい重みは，

$$w_i := \frac{h_i}{H} = w_i, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

となり，本来の重みと一致する！

ここでの議論は，一対比較行列 A が完全に整合性が取れている場合について当てはまる．

1.10.3 最大固有値・主固有ベクトルの求め方

では，最大固有値および主固有ベクトルはどうやって求めればよいのか？

一般には，

$$A\mathrm{v} = \lambda \mathrm{v} \quad \rightleftharpoons \quad (A - \lambda I)\mathrm{v} = 0$$

より，$\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ となる $\mathbf{v}$ を見つけたいので，$A - \lambda I$ が特異 (正則でない) であれば良い．即ち，固有値 λ に対する n 次特性方程式 $|A - \lambda I| = 0$ を解いて λ を求めればよい (解は複素数の範囲で重複も含めて必ず n 個ちょうどある) が，一般に n 次方程式を解くのは大変！また，ここでは最大固有値と主固有ベクトルだけを求めればよい！(n 個の固有値と固有ベクトルを求める必要はない！)

以上より，最大固有値，主固有ベクトルを厳密に求めるのはあきらめ，近似値を求める冪乗法 Power method を使う．

Algorithm 1.16. **冪乗法** Power method [8,15]

Step0: **初期化** $p := 1$ とし，初期ベクトル $\mathbf{v}^0$ を決め，$\lambda^0_{\max} := \sum_{i=1}^{n} v^0_i$ とする．

Step1: $\mathbf{u}^p := A\mathbf{v}^{p-1}$ とし，$\mathbf{u}^p$ の要素の和が 1 になるように基準化．具体的には，

step1-1: $u^p_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v^{p-1}_j, \quad (i = 1, \ldots, n)$
step1-2: $\lambda^p_{\max} := \sum_{i=1}^{n} u^p_i$
step1-3: $v^p_i := u^p_i / \lambda^p_{\max}, \quad (i = 1, \ldots, n)$　和が 1 になるように基準化

Step2: **収束判定** 1 $|\lambda^p_{\max} - \lambda^{p-1}_{\max}| \leq \lambda^{p-1}_{\max 1}/1000$ ならば Step3:へ，そうでなければ Step4:へ

Step3: **収束判定** 2 全ての $i = 1, \ldots, n$ について，

$$|v^p_i - v^{p-1}_i| \leq \frac{v^{p-1}_i}{1000}$$

が満たされるならば終了.（上式を壊す i が存在するなら終了しない）

Step4: $p := p + 1$ として Step1:へ．

冪乗法の Step 0 で使う初期ベクトル $\mathbf{v}^0$ は，例えば以下のように求める．

(1) 幾何平均を利用 [15]： 一対比較行列 $A = [a_{ij}]$ の各行について幾何平均を求め，

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$$

となるように基準化し，それを $\mathbf{v}$ の初期値とする．具体的には，アルゴリズムの Step 0 を以下に置き換える．

step0-1: $p := 1$　反復回数を p で保持.
step0-2: $k_i := \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}, \quad (i = 1, \ldots, n)$　A の各行で幾何平均を求める
step0-3: $\lambda^0_{\max} := \sum_{i=1}^{n} k_i$　n 個の幾何平均の和を最大固有値の初期値とする
step0-4: $v^0_i := k_i / \lambda^0_{\max}, \quad (i = 1, \ldots, n)$　和が 1 になるように基準化

(2) 適当なベクトルを利用 [8]：以下のベクトルを初期値 v^0 とする．

$$v^0 := \left(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)$$

初期値は何が適当か，詳細は不明．収束性については，原始行列 (周期が 1 の既約行列) ならば，収束することが分かっている．実際の計算については，[21] の付属 CD に入っているソフトなどを利用すると良い．

1.10.4 整合度 C.I. について〔主固有ベクトルを用いている場合〕

- $\lambda_{max} \geq n$ (Theorem 1.15 より).
- 一般に $\lambda_{max} > n$，完全に整合性があるとき $\lambda_{max} = n$.
- $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n$ (Lemma 1.13 より).

以上の事実より，$\lambda_{max} - n (\geq 0)$ は，λ_{max} 以外の $n-1$ 個の固有値の大きさを示す指標と見ることができ，その 1 個当たりの (算術) 平均は

$$\frac{\lambda_{max} - n}{n-1}$$

となる．行列 A が完全な整合性を持つ場合 (i.e., $\lambda_{max} = n$)，この値は 0 になり，それ以外の時は正の値をとる．値が大きいほど不整合性は高いと見ることができる．故に，この値をもって，整合度 (C.I., consistency index) を表すことができる．

C.I. ≤ 0.1（≤ 0.15 としても良い）の時，整合度があるとみなす．

【参考】ランダム整合度と整合比 [15]

行列 A として，対角要素に 1，それ以外の要素に $1/9, 1/8, \cdots, 1/2, 1, 2, \cdots, 9$ をランダムに入れ（対称要素は逆数），この行列の C.I. を多数回計算．平均値 M を求める．この M をランダム整合度と呼ぶ．

表 1.10: 大きさ n の行列のランダム整合度 [15]

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M	0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51	1.53

C.I. をこの M で割った値を整合比（C.R., consistency ratio）と呼び，この値も 0.1 以下であれば合格. (0.15 以下としても良い)

$$\text{C.R.} = \frac{\text{C.I.}}{M}.$$

ランダム整合度は，ランダムに行列を作った時の整合度を表しているので，意思決定者の主観に基づいて作った一対比較行列の整合度が，ランダム行列に対してどの程度整合性があるかを，C.I. をランダム整合度で割った C.R. で検証するということである．(一般に，ランダムに作った行列では，整合度は悪いはず．その整合度の悪い行列に対して，意思決定者が作った行列の整合度はどの程度なのか？を測っている！)

また，整合度の基準値は，Saaty より，経験的に 0.1 以下でよいことになっているが，項目数 n により，変えたほうが良いことが指摘されている．([16] 第Ⅲ部 2.2 参照) 具体的には，$n = 3, 4$ のときは其々，0.0035, 0.048(各々5%, 1%である) にすることを提案している研究がある．

1.10.5 整合度 C.I. について〔幾何平均・調和平均を用いている場合〕

幾何平均，あるいは調和平均を重みとして用いている場合は，整合度の計算が主固有ベクトルを用いている場合と違っているので，ここで補足説明しておきたい．幾何平均・調和平均を用いた場合の整合度は

$$C.I. = \frac{(\text{算術平均}) - n}{n-1}$$

であった．このとき，

- (算術平均) $\geq n$，即ち，$C.I. \geq 0$.
- 一般に (算術平均) $> n$，完全に整合性があるとき (算術平均) $= n$.

が成り立つ．

n 項目 $\{I_1, \ldots, I_n\}$ の本来の重みを $w_1, \ldots, w_n$, (≥ 0) とする．先の節で述べたように，完全に整合性が取れている場合は，一対比較行列の各値 a_{ij} $(i, j \in \{1, \ldots, n\})$ と本来の重みに，

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$$

という関係が成立する．

表 1.11: n 項目 $\{I_1, \ldots, I_n\}$ の一対比較表と重み

	I_1	I_2	$\cdots$	I_n	重み
I_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	w_i
I_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	w_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
I_n	a_{n1}	a_{n2}	$\cdots$	a_{nn}	w_i

表 1.12: 整合性チェック用の表

	I_1	I_2	$\cdots$	I_n
I_1	$a_{11} \times w_1$	$a_{12} \times w_2$	$\cdots$	$a_{1n} \times w_n$
I_2	$a_{21} \times w_1$	$a_{22} \times w_2$	$\cdots$	$a_{2n} \times w_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
I_n	$a_{n1} \times w_1$	$a_{n2} \times w_2$	$\cdots$	$a_{nn} \times w_n$

よって，一対比較が完全に整合性が取れているとき，C.I. 計算用に使う算術平均は，

$$(\text{算術平均}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j\right)\frac{1}{w_i}\right\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{w_j}{w_i}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 = \frac{n^2}{n} = n$$

となり，幾何平均であれ，調和平均であれ，

$$\text{C.I.} = \frac{n-n}{n-1} = 0$$

となる．整合性が取れていない場合は，Theorem 1.15 の証明と同様，

$$\begin{aligned}
(\text{算術平均}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{w_j}{w_i} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=j} a_{ij}\frac{w_j}{w_i} + \sum_{i<j} a_{ij}\frac{w_j}{w_i} + \sum_{i>j} a_{ij}\frac{w_j}{w_i}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i<j}\left(a_{ij}\frac{w_j}{w_i} + \frac{1}{a_{ij}}\frac{w_i}{w_j}\right)\right) \quad (\text{by } a_{ji} = 1/a_{ij}) \\
&= \frac{1}{n}\left(n + \sum_{i<j}\left(y_{ij} + \frac{1}{y_{ij}}\right)\right) \quad \left(y_{ij} := a_{ij}\frac{w_j}{w_i}\right) \\
&\geq 1 + \frac{1}{n}\sum_{i<j} 2 = 1 + \frac{2}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2} = n
\end{aligned}$$

となり，(算術平均) $\geq n$，即ち，

$$\text{C.I.} \geq 0$$

である (等号が成り立つのは完全な整合性があるときのみ).

1.11 AHP の使用補足

1.11.1 整合度が悪い時の対処法（一対比較行列の見直しの仕方）

自分が作った一対比較行列のどこが悪くて全体の整合性を乱しているのかを見つけるのは大変！「一対比較行列は,（本来の）重みの近似である」ことを思い出し，以下の方法で見直すべき比較対称要素を見つける！

1. 計算した重要度 $w_1, \cdots, w_n$ より，第 (i, j) 成分が w_i/w_j である行列 W を作る.（上三角部分だけでよい）
2. 自分の作った一対比較行列 A とこの W を比べて，違いが大きいところに付いて，一対比較をやり直す.

1.11.2 グループで AHP を使う場合について

グループで同じ問題を其々が AHP を使って時，結果を持ち寄って比較検討し結論を出すという場合，途中で生成される各自の一対比較行列の要素の値が異なることは自然である．問題は，このとき，この異なる要素を一つの値に (話し合いで) 決められない時，どうするかである．そのような場合は，各自の (その異なる要素の) 幾何平均を取るとよい.

何故 (算術) 平均ではなく幾何平均を取るのか？ ⇒ 一対比較行列は対象要素が逆数関係になっていなければならないため，(算術) 平均では，それがくずれるため.

1.11.3　不完全一対比較行列の扱い

全ての一対比較値を求められない場合 (一対比較行列 A の幾つかの要素が未知となる場合)，重み (重要度) 算出法として，Harker 法 [1, 6]，TS 法 (Two-stage method) [4] が提案されている．

Harker 法:例題による説明

$$A = \begin{pmatrix} 1 & ? & 1 & ? \\ ? & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1/5 & 1 & ? \\ ? & 1/3 & ? & 1 \end{pmatrix}$$

ここで,「一対比較行列は,（本来の）重みの近似である」ことを思い出し，第 (i, j) 成分が w_i/w_j であるから，?を w_i/w_j で置き換え，重みベクトル $(w_1, w_2, w_3, w_4)^T$ (固有ベクトル) と固有値 λ に対して，

$$\begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & 1 & w_1/w_4 \\ w_2/w_1 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1/5 & 1 & w_3/w_4 \\ w_4/w_1 & 1/3 & w_4/w_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$$

と書ける．この方程式の左辺を変形すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & 1 & w_1/w_4 \\ w_2/w_1 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1/5 & 1 & w_3/w_4 \\ w_4/w_1 & 1/3 & w_4/w_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3w_1 & & & + & w_3 & & \\ & & 2w_2 & + & 5w_3 & + & 3w_4 \\ w_1 & + & 1/5w_2 & + & 2w_3 & & \\ & & 1/3w_2 & & & + & 3w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1/5 & 2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$$

となるので，元の方程式は次に等しい．

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1/5 & 2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$$

この係数行列は，もとの不完全行列の?を 0 で置き換え，各行の対角成分 1 にもともとその行に存在した?の数を加えたもの（例えば上の第 (1,1) 対角成分は 1 + 2(?の個数) = 3 となっている．

一般の n の場合でもこの性質は成り立ち，元の不完全行列から簡単な操作でこの係数行列を作ることができる．この方程式を満たす (最大) 固有値と対応する固有ベクトルを求めようという方法が Harker のアイデア.

TS 法 (Two-stage method) 一対比較行列の第 i 行の幾何平均値を $k_i, (i = 1, \ldots, n)$ とした時 (値があるところだけで幾何平均を計算する)，値がない要素に，求めた幾何平均値の対応する

比を代入する方法．例えば第 (i,j), (j,i) 要素が値がない場合，各々$\frac{k_i}{k_j}, \frac{k_j}{k_i}$ を代入して一対比較行列を生成し，その主固有ベクトルを重要度とする方法.

例題による説明

$$A = \begin{pmatrix} 1 & ? & 1 & ? \\ ? & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1/5 & 1 & ? \\ ? & 1/3 & ? & 1 \end{pmatrix}, \quad A \text{の各行の幾何平均} \begin{pmatrix} k_1 = \sqrt{1\cdot 1} = 1 \\ k_2 = \sqrt[3]{1\cdot 5\cdot 3} = 2.466 \\ k_3 = \sqrt[3]{1\cdot 1/5\cdot 1} = 0.5848 \\ k_4 = \sqrt{1/3\cdot 1} = 0.5773 \end{pmatrix}$$

より,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k_1/k_2 & 1 & k_1/k_4 \\ k_2/k_1 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1/5 & 1 & k_3/k_4 \\ k_4/k_1 & 1/3 & k_4/k_3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.4055 & 1 & 1.7322 \\ 2.466 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0.2 & 1 & 1.01299 \\ 0.5773 & 0.333 & 0.9871 & 1 \end{pmatrix}$$

後は，これを使って主固有ベクトルを求める ($A\mathrm{v} = \lambda_{\mathrm{max}}\mathrm{v}$ を満たす v を求める).

【参考】ところで，一対比較行列を作る際には，対象項目が n の時，$n(n-1)/2$ 回の一対比較を行う必要がある．n^2 のオーダーで比較総数が増えていくため，完全な一対比較行列を作るのに手間がかかる．そこで，積極的に不完全情報を利用しようという考え方もできる (対象項目から比較を行う対をなんらかの方法で選び，完全に一対比較を行わず，不完全一対比較行列を作り，それを上記のような方法で補正処理しようという考え．ここでは，比較対の選び方をどうするかが問題になる．その選び方の研究は，[5])

【発展】Harker 法，TS 法ともに，不完全情報が一部分のみの場合に適用できるものであるが，大規模な AHP(人事評価など) においては，情報の欠落が多く，適用は難しい．そこで，八巻，関谷 [17] は，大規模で情報の欠落が多くなることが予想される問題に対して適用できる AHP を提案している．また，八巻，杉山，劉，山田 [18] は，それをさらに集団で行う（意思決定者が複数いる) 場合について拡張している.

集団に対する AHP は 2 節でとりあげる.

1.12 AHP を用いる際の注意点

- 同一レベルに取り入れる (評価) 要素は，互いに独立性の高いものを採用する.
- 一対比較の対象となる要素数は 7 個まで，どんなに多くても 9 以下.
- 一対比較値に自信がない場合は感度分析を行う．(その値を前後に刻み幅で振ってみて，結果にどのように影響するかを見る)
- 各代替案の総合重要度は大きい方が良いのであるが，差については注意．0.01 程度の差はないと同じ．総合重要度の低い要素を除いてもう一度 AHP を用いるなど多段階的にやってみることも良い.

1.12.1 評価基準の独立性と従属性について

AHP では同一レベルに含まれる各要素は互いに独立であること（もしくは，独立に近い関係であること）が求められる．ここでの**独立**とは，階層としての上下関係は考えられないということ）

Example 1.17. あるレベルの評価基準が「味」「色」「形」である時，この 3 つには上下関係の階層関係はなく独立である．なぜか？

独立でない，即ち，従属性が濃い場合には，従属関係のある要素の個数により，結果に大きな影響が与えられるからである．

Example 1.18. **従属性の弊害 (極端な例)**

あるレベルの評価基準が「味」「味」「形」であるとき，最初の 2 つは明らかに従属！このとき，従属性の濃い要素が 2 倍に強調されるので，各要素の重みも強調され，正しい評価値が得られない．

1.13 多目的計画法と AHP の一対比較の融合

多目的計画法の各目的関数値に付いて，一対比較を行って重要度（ウェイト）を求めることで，（各目的関数の重み付和として）1 つの目的関数に集約し，通常の LP として解くことができる！

2 集団区間 AHP [14, 17–19]

意思決定者が複数いる場合 (グループ，集団で意思決定を行う場合) に適用できる方法として**区間 AHP** が提案されている ([14, 17–19] など).

集団で行う一対比較について，Saaty が言及しており，

I. グループで話し合って一対比較値を決める．
II. 各自が一対比較行列を作成し，各要素ごとに貴下平均を取り、それぞ集団の一対比較行列とする．

の 2 つを提案しているが，この方法では，

I. 時間がかかる．メンバー間の力関係に左右されるので，不平・不満が生じやすい（一対比較行列ができた時点で不平・不満が生じる）．
II. 貴下平均値がメンバーのどの意見とも大きく離れる（メンバー間の意見が対立しているとそうなりやすい)

などの問題があるとそれぞれ指摘されており，それを改選した方法として，以下の 3 つの仮定のもとに，区間 AHP が提案されている [14, 17–19].

Assumption 2.1.

仮説 1 人間は自分の判断をはっきりと決める前に，その判断を修正させられる方が，一度はっきりと決めてしまった後に，判断結果を変えさせるよりは合意が形成されやすい.
仮説 2 人間はいろいろの判断の間で相互に矛盾がない結果ほどその結果を受け入れやすい.
仮説 3 集団のメンバー一人一人は集団の決定結果と自分の決定結果との差異が小さいほど満足する.

2.1 区間 AHP：主張区間，グループ一対比較区間

まず，集団のメンバーはおのおの一対比較をおこなって，一対比較値から許容できる範囲を提示する (主張区間とよばれている).

Definition 2.2. **主張区間**

$$\left[l^{\mathrm{k}}_{\mathrm{ij}}, u^{\mathrm{k}}_{\mathrm{ij}}\right], \quad (k = 1, \dots, m,\ i, j = 1, \dots, n)$$

ただし，

$$\left[l^{\mathrm{k}}_{\mathrm{ji}}, u^{\mathrm{k}}_{\mathrm{ji}}\right] = \left[\frac{1}{u^{\mathrm{k}}_{\mathrm{ij}}}, \frac{1}{l^{\mathrm{k}}_{\mathrm{ij}}}\right]$$

ここで，i, j は代替案のインデックス，k はメンバー (全部で m 人) をあらわし，$l^{\mathrm{k}}_{\mathrm{ij}}, u^{\mathrm{k}}_{\mathrm{ij}}$ は，それぞれ k 番目のメンバーの i の j に対する一対比較値の許容範囲下限，上限をあらわす.

ある比較値に対する全メンバーの主張区間の席集合が空でなければ，その共通部分を全員の一対比較区間とし，空のときは，メンバーの下限値最小から上限値最大までを一対比較区間 $\left[\tilde{l}_{ij}, \tilde{u}_{ij}\right]$ とする．

即ち，$\bigcap_{k=1}^{m} [l^k_{ij}, u^k_{ij}] \neq \emptyset$ のときは，

$$\begin{cases} \tilde{l}_{ij} & := \max_k\{l^k_{ij} \mid k = 1, \ldots, m\}, \quad (i, j = 1, \ldots, n), \\ \tilde{u}_{ij} & := \min_k\{u^k_{ij} \mid k = 1, \ldots, m\}, \quad (i, j = 1, \ldots, n), \end{cases}$$

そうでなければ，

$$\begin{cases} \tilde{l}_{ij} & := \min_k\{l^k_{ij} \mid k = 1, \ldots, m\}, \quad (i, j = 1, \ldots, n), \\ \tilde{u}_{ij} & := \max_k\{u^k_{ij} \mid k = 1, \ldots, m\}, \quad (i, j = 1, \ldots, n), \end{cases}$$

とする．

2.2 区間 AHP：不満足度

$c^k_{ij} \in [l^k_{ij}, u^k_{ij}]$ を k 番目のメンバーの一対比較値とする．集団の最終的な一対比較値がこの値ならば,（全体の意見と自分の意見が一致したことになるので）不満は全くないことになる．c^k_{ij} が判明しているときはそれを使い，ない場合は

$$c^k_{ij} := \sqrt{l^k_{ij} \cdot u^k_{ij}}$$

とする．

このとき，各メンバーの不満値，および，集団の不満値は以下で定義される．

Definition 2.3. メンバー k の不満値 DS_k，集団の不満値 DS

$$\begin{aligned} DS_k &= \sum_{i<j} d^k_{ij} (\ln x_{ij} - \ln c^k_{ij})^2, \\ DS &= \sum_{i<j} \sum_k d^k_{ij} (\ln x_{ij} - \ln c^k_{ij})^2. \end{aligned}$$

ここで，x_{ij} は i の j に対する最終的な一対比較値，d^k_{ij} はメンバー k の i の j に対する不満値の重みであり，以下のように定める．

主張区間が広い人ほど許容範囲が広く（自分の比較値についての主張が弱く），狭い人ほど強く主張する人と考えられるので，不満値の重み d^k_{ij} は主張区間幅 $|\ln u^k_{ij} - \ln l^k_{ij}|$ に反比例すべきであり，

$$\begin{aligned} d^k_{ij} &= \frac{1}{b^k_{ij} + 1}, \\ b^k_{ij} &= |\ln u^k_{ij} - \ln l^k_{ij}| \end{aligned}$$

で与えられる．

また，この定義における最小不満値 (MDS) は以下の通りとなる．

Definition 2.4. 最小不満値 MDS

$$MDS = \sum_{i<j}\sum_{k} d_{ij}^{k}(\ln p_{ij} - \ln c_{ij}^{k})^2.$$

ただし，

$$\ln p_{ij}^{k} = \frac{1}{\sum d_{ij}^{k}}\sum_{k} d_{ij}^{k}\ln c_{ij}^{k}.^{1}$$

以上より，集団の不満足度 DI を以下で定義する．

Definition 2.5. 集団の不満足度 DI

$$DI = \frac{DS - MDS}{MDS}.$$

2.3 区間 AHP：重要度決定モデル

区間 AHP の集団における一対比較値 x_{ij} および各代替案の重要度 w_i は，以下の最小化問題の最適解として与えられる．

$$\begin{aligned}
\min.\quad & \alpha CI + \beta DI \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij}w_{ij} = \lambda w_i, \quad (i = 1,\ldots,n) \quad \text{(固有方程式の条件)} \\
& x_{ij}x_{ji} = 1 \quad (i,j = 1,\ldots,n) \quad \text{(一対比較要素の逆数対数製条件)} \\
& \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \quad \text{(重要度の正規化)} \\
& w_i > 0, \quad (i = 1,\ldots,n) \quad \text{(重要度は正値)} \\
& \tilde{l}_{ij} \le x_{ij} \le \tilde{u}_{ij}, \quad (i,j = 1,\ldots,n) \quad \text{(一対比較値の上下限)}
\end{aligned}$$

ただし，CI は整合度で，

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$$

であり，α, β は整合度と不満足度の重みである．

[1] x_{ij} に制約がないとき，$x_{ij} = p_{ij}$ のとき MDS が最小となることがわかっている．

3 AHP と LLS の比較 [9]

3.1 対数最小二乗法 (LLS)

3.2 不完全情報に対する LLS

4 Binary AHP Problem [3, 10]

AHP で用いる一対比較行列を作る際，パラメータ $\theta(>1)$ を使う方法を用いる．かつ，θ, θ^{-1} の 2 種類 (より良い，より悪い) だけで比較することを考える．この場合は，Binary 問題とよばれる．($\theta = 1$ の時も広い意味で Binary 問題とよばれる) 応用例としては，スポーツやゲームなどで，勝ち (θ)・負け (θ^{-1}) だけで決まる勝負の結果から，プレーヤー (チーム，個人など) の真の強さを推定するなどがある．

5 AHP の発展

Saaty による初期の拡張

- 絶対評価法 (absolute measurment method) … 各評価基準に対する各代替案の評価は，絶対評価で行う．評価項目間の一対比較は，従来どおりの相対評価法 (relative measurement method) で行う．

従属性に関する拡張

- 内部従属法 (inner dependence method) … 各評価項目間，各代替案間に従属性がある場合に対する AHP の拡張．各評価項目 (あるいは各代替案) 間の従属関係を一対比較により測定し，この従属関係を定量的に内包したモデル．従属マトリックスを用いる．
- 外部従属法 (outer dependence method) … 評価項目と代替案の間に従属性がある場合に対する AHP の拡張．超行列の概念を導入．
- ANP(Analytic Network Process) … 代替案と評価項目の階層構造をネットワーク構造に拡張．超行列を用いて表現する．

支配性に関する拡張

- 支配型 AHP

5.1 絶対評価法 (absolute measurment method) [22]

相対評価法の欠点

- 代替案が新たに追加された時，一対比較をやり直さねばならない．
- 従属的代替案が追加されると，順序逆転現象が起こる．(⇒従属性の弊害参照)
- 代替案が増えすぎると，比較が困難になり、C.I. も悪くなる．

これらの問題点を解消するために，評価基準に対する各代替案の評価については，絶対評価で行う．

5.2　内部従属法 (inner dependence method)

[22] pp.142-

5.3　外部従属法 (outer dependence method)

[22] pp.147-

5.4　AHP から ANP へ

6　AHP のまとめ・考察

6.1　AHP の特徴

- 1971 年，T.L.Saaty(ピッツバーグ大学教授) により提唱.
- 不確定な状況や多様な評価基準における意思決定手法.
- 問題の分析において，主観的判断とシステムアプローチを混合した問題解決型意思決定手法の 1 つ.
- 評価・分析過程で，人間の経験や勘を生かせる.（モデル化したり定量化するのが難しかった問題にも対処できる)

6.2　AHP 分析手順 概要

AHP は，分析手順として以下の 3 段階からなる．

第 1 段階 問題の要素を「最終目標…評価基準…代替案」の関係でとらえ，階層構造を作り上げる．

第 2 段階 最終目標から見て評価基準の重要さを求める．
評価基準から見て代替案の重要度を評価する．

第 3 段階 上記 2 つを，最終目標から見た代替案の評価に換算する．

6.3　AHP **分析手順 詳細**

第 1 段階 問題を，以下の点に注意して階層構造に分解する．

- 階層の最上層は 1 個の要素からなる (総合) 目的とする．
- 各レベルの要素数は，(総合) 目的を除き，(7 ± 2) を最大許容数とする．(それ以上は意思決定者がおそらく対処できない)
- 以下のレベルは，意思決定者の主観により，いくつかの要素を 1 つ上のレベルの要素との関係から決定する．
- レベルの数は問題の構造により決定される (限界はなし).
- 階層の最下層に代替案を置く。

第 2 段階 各レベルごとに，要素間の重み付けを行う．具体的には,

1. あるレベルにおける要素間のペアの比較を 1 つ上のレベルにある関係要素を評価基準として **1 対比較**を行い,
2. 各レベルのペア比較結果をマトリックス表にする．
3. 得られた比較マトリックス表から各レベルの要素間の重みを計算する．

注意点は以下の通り,

- あるレベルの要素数を n とすると，意思決定者が行わねばならない比較回数は $\frac{n(n-1)}{2}$ である．
- ペア比較に用いられる値は $1/9, 1/8, \cdots, 1/2, 1, 2, \cdots, 8, 9$.
- 重み計算には行列の固有値計算を利用する．
- 比較マトリックスは逆数行列である．
- 意思決定者の行う一対比較は，必ずしも整合性を保たれるわけではないので，あいまいの尺度 (consistency 指数) を定義する．

第 3 段階 各レベルの要素間の重み付けを用い，階層全体の重み付けを行う．結果，(総合) 目的に対する各代替案の優先度 (Priority) が決定する．

参考文献

[1] P.T. Harker. “Alternative modes of questioning in the analytic hierarchy process”. Mathematical Modelling, Vol. 9, pp. 353–360, 1987.

[2] P.T. Harker. “Incomplete pairwise comparisons in the analytic hierarchy process”. Mathematical Modelling, Vol. 9, pp. 838–848, 1987.

[3] I. Takahashi. “AHP Applied to Binary and Ternary Comparisons”. Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 33, No. 3, pp. 199–206, September 1990.

[4] I. Takahashi and M. Fukuda. “Comparisons of AHP with other methods in bianary paired comparisons”. In Proceedings of the Second Conference of APORS within IFORS, pp. 325–331, 1991.

[5] K. Wang and I. Takahashi. “How to Select Paired Comparisons in AHP of Incomplete Information –Strongly Regular Graph Design”. Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 41, No. 2, pp. 311–328, June 1998.

[6] 竹田英二. “不完全一対比較行列における AHP ウェイトの計算法”. オペレーションズ・リサーチ, Vol. 34, No. 4, pp. 169–172, 1989.

[7] 加藤豊, 小沢正典. 『OR の基礎–AHP から最適化まで』. 実教出版株式会社, March 1998.

[8] 高橋磐郎. “AHP から ANP への諸問題 I”. オペレーションズ・リサーチ, Vol. 43, No. 1, pp. 36–40, January 1998.

[9] 高橋磐郎. “AHP から ANP への諸問題 II”. オペレーションズ・リサーチ, Vol. 43, No. 2, pp. 100–104, February 1998.

[10] 高橋磐郎. “AHP から ANP への諸問題 III”. オペレーションズ・リサーチ, Vol. 43, No. 3, pp. 160–163, March 1998.

[11] 高橋磐郎. “AHP から ANP への諸問題 IV”. オペレーションズ・リサーチ, Vol. 43, No. 4, pp. 219–223, April 1998.

[12] 高橋磐郎. “AHP から ANP への諸問題 V”. オペレーションズ・リサーチ, Vol. 43, No. 5, pp. 289–293, May 1998.

[13] 高橋磐郎. “AHP から ANP への諸問題 VI”. オペレーションズ・リサーチ, Vol. 43, No. 6, pp. 340–345, June 1998.

[14] 山田善靖, 杉山学, 八巻直一. “合意形成モデルを用いたグループ AHP”. Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 40, No. 2, pp. 236–243, June 1997.

[15] 刀根薫. 『ゲーム感覚意思決定法 AHP 入門』. 日科技連, March 1986.

[16] 刀根薫, 真鍋龍太郎（編）. 『AHP 事例集』. 日科技連, July 1990.

[17] 八巻直一, 関谷和之. “複数の評価者を想定した大規模 AHP の提案と人事評価への適用”. Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 42, No. 4, pp. 405–420, December 1999.

[18] 八巻直一, 杉山学, 劉曉東, 山田善靖. “不満関数を用いる集団区間 AHP 法”. Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 45, No. 3, pp. 268–283, September 2002.

[19] 木下栄蔵編著. 『AHP の理論と実際』. 日科技連, June 2000.

[20] 木下栄蔵. 『わかりやすい意思決定論入門 基礎からファジイ理論まで』. 近代科学社, February 1996.

[21] 木下栄蔵. 『孫子の兵法の数学モデル 実践編』. ブルーバックス B-1235. 講談社, November 1998.

[22] 木下栄蔵. 『孫子の兵法の数学モデル』. ブルーバックス B-1203. 講談社, February 1998.