意思決定論
多目的線形計画法

堀田 敬介

2001.8.6,Monday, revised 10.24,Wednesday

目 次

1　線形計画問題と図解法による考察

Example 1.1. **効率的なアルバイト**

湘南次郎君は，週末にアルバイトをしようと思っている．次郎君が行おうと思っているのは，時給 1200 円の清掃作業 (c)，時給 900 円のウェイター (w) のアルバイトの 2 つである．各仕事を行うと次郎君はストレスがたまるが，アルバイト c，w をした時の次郎君のストレスは，各々5, 3 である．

次郎君は週末に 5 時間，アルバイトをする時間を取ることができる．また，ストレスをためるのは健康に良くないので，ストレス許容量は 21 としたい．さて，この条件のもとで，効率的にお金を得ようとしたら，どちらのアルバイトをどれだけすればいいだろうか?　また，その時に得られる給料はいくらになるだろうか?

簡単な考察　清掃作業の方が時給がいいのだから，アルバイトに費やせる 5 時間全部こちらをやるのが最良である．ところが，清掃作業を 5 時間やるとストレスは 25 たまってしまい，許容量を超え健康管理上よろしくない．故にウェイターのバイトも適当に組み合わせたい．この例ならば，ウェイターの時間を少しずつ増やして，試行錯誤で解が求まるかもしれないが，もうすこしスマートに考えてみよう．

線形計画法による定式化と解法　清掃作業，ウェイターをする時間を各々x, y とすると，次郎君の目的は「できるだけ稼ぐこと」であるから，次郎君が貰えるお金 $1200x + 900y$ 円を最大化すればよい．また，週末総労働時間 $x + y$ 時間は 5 時間を超えてはならず，かつ総ストレス量 $5x + 3y$ は 21 以下に抑えるねばならない．さらに当然のことながら，働く時間 x, y をマイナスにするわけにはいかない．以上をまとめると，

$$\left|\begin{array}{lrcrcl} \max & 1200x & + & 900y & & \\ \text{s.t.} & x & + & y & \leq & 5, \\ & 5x & + & 3y & \leq & 21, \\ & x & , & y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

となる．即ち，2 つの不等式制約と 2 つの非負制約のもとで，目的 (関数) を最大化すればよい．このモデルの制約条件を (x, y) 平面上のグラフで表すと図 1.1 のようになる．斜線の部分が，次郎君が実行できるアルバイトの時間の組合せを表している．

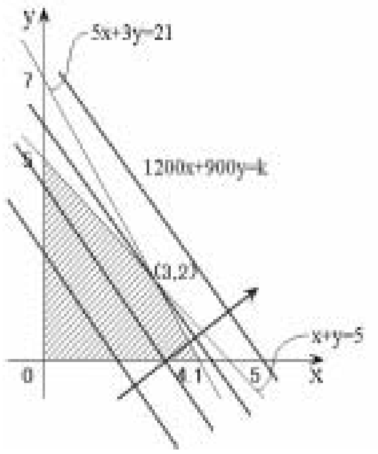

図 1.1: 線形計画法〔図的解法〕

図 1.1 中で目的関数を表す直線を平行移動させ (右上に行くほど得られるお金が増え，左下に行くほど減る)，可能な時間組合せの中で最大となる交点を見つければよい．

s 答えはグラフより，清掃作業を 3 時間，ウェイターを 2 時間することである．このとき得られるバイト代は 5400 円，総労働時間は 5 時間，たまったストレスは 21 である．

2　線形計画問題の標準形と単体法

2.1　線形計画問題の定式化

線形計画問題 Linear Programming Problem; LP には一般の場合と，標準形，対称形と呼ばれる形があるが，ここでは標準形を扱う．あらゆる場合は，必ず標準形に変換できるので，この形のみを考えれば充分．

標準形の線形計画問題

$$
\left|\begin{array}{lccccccccc}
\max & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \cdots & + & c_nx_n & & \\
\text{s.t.} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\
 & & & & & \cdots & & & & \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \\
 & x_1 & , & x_2 & , & \cdots & , & x_n & \geq & 0.
\end{array}\right.
$$

$$
\rightleftharpoons \quad \left|\begin{array}{lccc}
\max & \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x} & & \\
\text{s.t.} & A\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{b}, \\
 & \boldsymbol{x} & \geq & 0.
\end{array}\right.
$$

このとき，$\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}$ を目的関数 Objective Function，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0$ を制約条件 Constraints と呼ぶ．

対称形の線形計画問題

$$
\left|\begin{array}{lccc}
\max & \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x} & & \\
\text{s.t.} & A\boldsymbol{x} & \leq & \boldsymbol{b}, \\
 & \boldsymbol{x} & \geq & 0.
\end{array}\right.
$$

一般的な形の線形計画問題

$$
\left|\begin{array}{lccccccc}
\max & \boldsymbol{c}_1^\top\boldsymbol{x}_1 & + & \boldsymbol{c}_2^\top\boldsymbol{x}_2 & + & \boldsymbol{c}_3^\top\boldsymbol{x}_3 & & \\
\text{s.t.} & A_{11}\boldsymbol{x}_1 & + & A_{12}\boldsymbol{x}_2 & + & A_{13}\boldsymbol{x}_3 & \geq & \boldsymbol{b}_1, \\
 & A_{21}\boldsymbol{x}_1 & + & A_{22}\boldsymbol{x}_2 & + & A_{23}\boldsymbol{x}_3 & \leq & \boldsymbol{b}_2, \\
 & A_{31}\boldsymbol{x}_1 & + & A_{31}\boldsymbol{x}_2 & + & A_{33}\boldsymbol{x}_3 & = & \boldsymbol{b}_3, \\
 & \boldsymbol{x}_1 & & & & & \geq & 0, \\
 & & & \boldsymbol{x}_2 & & & \leq & 0, \\
 & & & & & \boldsymbol{x}_3 & : & free.
\end{array}\right.
$$

2.2　標準形への変形

全ての線形計画問題は，以下のような変形を行い標準形で書くことができる．よって，次節以降では標準形のみを考える．

目的関数の最大化 目的関数を最小化する問題の場合は，(-1) 倍して，最大化問題に変更できる．

不等式制約の等式化 i 番目 $(i = 1, \ldots, m)$ の制約が $\leq$ の不等式制約の場合，スラック変数 $s_i \geq 0$ を加える ($\geq$ の場合にはサープラス変数 $t_i \geq 0$ を引く)．

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ &\leq \ b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i \ = \ b_i, \quad s_i \ \geq \ 0 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ &\geq \ b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - t_i \ = \ b_i, \quad t_i \ \geq \ 0\end{aligned}$$

非正変数，自由変数の非負変数化 非正変数 $x_i \leq 0$ は，

$$x'_i \ := \ -x_i, \quad x'_i \geq 0$$

として非負変数 x'_i に置き換える．また，自由変数 x_i は，2 つの非負変数 $x_i^1, x_i^2 \geq 0$ の和として書ける，即ち

$$x_i \ := \ x_i^1 - x_i^2, \quad x_i^1, x_i^2 \ \geq \ 0$$

として，2 つの非負変数 x_i^1, x_i^2 で置き換える．

また，以降簡単のため，$\boldsymbol{b} \ = \ (b_1, \ldots, b_m)^\top \ \geq \ 0$ とする．$b_i < 0$ となる $i\,(= 1, \ldots, m)$ が存在していたら，その等式の両辺を (-1) 倍すればよいので，一般性を失わない．

2.3 標準形線形計画問題の解き方：2 段階単体法の考え方

LP の標準形 (P) が与えられているとする．

$$(\mathrm{P}) \quad \left| \begin{array}{lcccccccc} \max & c_1x_1 & + & \cdots & + & c_nx_n & & \\ \text{s.t.} & a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ & & & \cdots & & & & \\ & a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \\ & x_1 & , & \cdots & , & x_n & \geq & 0. \end{array} \right. \quad \rightleftharpoons \quad \left| \begin{array}{lccc} \max & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} & & \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} & \geq & 0. \end{array} \right.$$

$\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)^\top \geq 0$ とする．

まず (P) の制約を満たす実行可能解 $\boldsymbol{x}$ を見つけたい．通常，この解 (初期解) を見つけるのは容易ではないので，初期解を見つける単体法 simplex method（2 段階単体法の第 1 段階）を行う．

2.3.1　第 1 段階

人工変数として，非負変数 $x_{n+1},\dots,x_{n+m}$ を導入し，もとの問題 (P) を以下の人工問題 (P') に変形する．

$$
\text{(P')}\quad
\left|
\begin{array}{lccccccccccccc}
\max & & & & & & & c_{n+1}x_{n+1} & + & \cdots & + & c_{n+m}x_{n+m} & & \\
\text{s.t.} & a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & + & x_{n+1} & & & & & = & b_1, \\
 & & & \cdots & & & & & & \ddots & & & & \\
 & a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & & & & & + & x_{n+m} & = & b_m, \\
 & x_1 & , & \cdots & , & x_n & , & x_{n+1} & , & \cdots & , & x_{n+m} & \geq & 0.
\end{array}
\right.
$$

ただし，$c_{n+1}=\cdots=c_{n+m}=-1$ である．

今 $b_1,\dots,b_m \geq 0$ なので，

$$
\boldsymbol{x}' := \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_N \\ \boldsymbol{x}_B \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (\geq \mathbf{0})
$$

がこの問題の一つの実行可能解であり，このとき，$\boldsymbol{x}_B$ を基底変数，$\boldsymbol{x}_N$ を非基底変数という．また，このときの目的関数値は

$$
c_{n+1}x_{n+1}+\cdots+c_{n+m}x_{n+m} \;=\; -b_1-\cdots-b_m \;=\; -\sum_{i=1}^{m} b_i
$$

基底変数である m 個 $(x_{n+1},\dots,x_{n+m})$ は人工変数 (もとの問題にはなかった変数) であり，単体法の第 1 段階の目的は，もとの変数だけからなる初期解を見つけること，つまり，人工変数をすべて非基底 (このときの各人工変数の値は 0，目的関数値も 0) にすることである．

単体法 1 段階の実行後，目的関数値が 0 になれば，それを初期解として単体法の第 2 段階を行う．目的関数値が 0 にならずに (負のままで) 単体法が終了した場合，もとの問題には実行可能解がないことになり終了.〔注〕目的関数値が 0 で，基底変数に人工変数が残っている場合 (退化している場合) がある．その時は，単体法の掃き出し演算で入れ替えるか，その他の処理を行い，人工変数を基底から排除する (できる)．

非基底変数 (初期解では全てもとの変数) を基底変数にし，基底変数 (初期では全て人工変数) を非基底変数にする方法は，単体法の第 2 段階と同じなのでここでは割愛する．

2.3.2　第 2 段階

さて，初期解（初期基底）が得られたところで話を進めよう．初期解を

$$
\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n) = (\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_m,0,\dots,0) \geq \mathbf{0}
$$

とする (簡単のため，基底変数を最初の m 個，非基底変数を残りの $n-m$ 個として話を進める).

等式制約を $x_1,\ldots,x_m$ について解くと，

$$\begin{cases} x_1 &= \bar{b}_1 - (\bar{a}_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + \bar{a}_{1n}x_n) \\ & \vdots \\ x_m &= \bar{b}_m - (\bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + \bar{a}_{mn}x_n) \end{cases}$$

これを，目的関数に代入すると，

$$\begin{aligned} & c_1(\bar{b}_1 - \bar{a}_{1,m+1}x_{m+1} - \cdots - \bar{a}_{1n}x_n) + \cdots + c_m(\bar{b}_m - \bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} - \cdots - \bar{a}_{mn}x_n) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + c_{m+1}x_{m+1} + \cdots c_n x_n \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i\bar{b}_i + (c_{m+1} - c_1\bar{a}_{1,m+1} - \cdots - c_m\bar{a}_{m,m+1})x_{m+1} + \cdots + (c_n - c_1\bar{a}_{1n} - \cdots - c_m\bar{a}_{mn})x_n \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i\bar{b}_i + (c_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} c_i\bar{a}_{i,m+1})x_{m+1} + \cdots + (c_n - \sum_{i=1}^{m} c_i\bar{a}_{in})x_n \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i\bar{b}_i + \sum_{j=m+1}^{n} \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i\bar{a}_{ij}\right) x_j \\ &= y_0 + \sum_{j=m+1}^{n} y_j x_j \end{aligned}$$

ただし，

$$\begin{cases} y_0 &= \displaystyle\sum_{i=1}^{m} c_i\bar{b}_i, \\ y_j &= c_j - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} c_i\bar{a}_{ij} \quad (j = m+1,\ldots,n). \end{cases}$$

さらに，

$$z_j := \sum_{i=1}^{m} c_i\bar{a}_{ij} \quad (j = m+1,\ldots,n)$$

とすると，

$$y_j = c_j - z_j \quad (j = m+1,\ldots,n)$$

となる．このとき，$x_{m+1} = \cdots = x_n = 0$ より，目的関数値は

$$y_0 + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - z_j)x_j = y_0$$

今，ある $j' \in \{m+1,\ldots,n\}$ が存在して

$$y_{j'} = c_{j'} - z_{j'} > 0$$

ならば，非基底変数 $x_{j'}$ を 0 から増やすことにより，目的関数値は $c_{j'}$ ずつ増加していく ($z_{j'}$ は定数であることに注意).

さて，現在の実行可能解

$$(x_1,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)\ =\ (\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_m,0\cdots,0)\ \geq\ 0$$

から，$y_{j'}>0$ である $j'\in\{m+1,\ldots,n\}$ を選び，$x_{j'}$ を 0 からどこまで増加させることができるか見てみよう．現在の解を制約式に代入して $x_{j'}$ だけ残してやると，制約式は以下の様になっている．

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & \bar{b}_1-\bar{a}_{1j'}x_{j'} \\ & \vdots & \\ x_m & = & \bar{b}_m-\bar{a}_{mj'}x_{j'} \end{array}\right.$$

となる．もしここで，全ての i について $\bar{a}_{ij'}\leq 0$ であるならば，$\bar{x}_j$ をいくらでも大きくすることができる．このとき，もとの問題は無限解を持ち，目的関数値は ∞ になる．

$a_{ij'}>0$ となる i が存在する時は，x_i が非負条件 ($x_i\geq 0$) を満たしつづけるよう，x_j を $\dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij'}}$ まで大きくすることができる (このとき，$x_i=0$ となる)．正確には,

$$r_i\ =\ \min_i\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij'}}\ \middle|\ \bar{a}_{ij'}>0\right\}$$

を計算し，x'_j を r_i だけ増やす.

このように x'_j を徐々に増加させると，$x_1,\cdots,x_m$ で $\bar{a}_{ij'}>0$ となる x_i はいずれも減少していき，そのうちの少なくとも 1 つがいつか 0 の値をとる．このとき，$x_i=0, x_{j'}=r_i$ となる．即ち，基底変数 x_i が (掃き出されて) 非基底変数となり，非基底変数 $x_{j'}$ が基底変数となる (基底の掃き出しによる入れ替え).

これを繰り返すことで，目的関数値を増加させていき，最適解 ($(x^*_1,\cdots,x^*_n)\geq 0$) を見つける．

また，ある時点で，$y_j>0$ となる j が存在しなかった時 (全ての j について $y_j\leq 0$ であったとき) は，これ以上目的関数を増やすことはできない．このときの解が，最適解になることが知られている．

単体法は，初期実行可能基底解から出発して，全ての (非基底変数の)j について $y_j\leq 0$ となるまで掃き出し演算を繰返し，最適解を求める方法である．終了条件をまとめると,

- (第 1 段階により) 初期実行可能基底解がない $\Rightarrow$ 問題 (P) は実行不可能
- (第 2 段階で) 非基底変数に対応する，ある $y_j>0$ である j について全ての i で，$\bar{a}_{ij}\leq 0\Rightarrow$ 問題 (P) に無限解が存在
- (第 2 段階で) 非基底変数に対応する全ての j について $y_j\leq 0\Rightarrow$ 現在得られている実行可能基底解が問題 (P) の最適解

Problem 2.1.　以下の問題を単体法で解け[1].

$$
\left|\begin{array}{lccrcrcrcc}
\max & z & = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{s.t.} & & & -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 7 \\
 & & & 2x_1 & - & x_2 & & & \leq & 5 \\
 & & & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 4 \\
 & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}\right.
$$

2.4　単体法の幾何的意味

Example 2.2.　以下の問題を考える．標準形に直し，単体法で解いてみよう．

$$
\left|\begin{array}{lrcccc}
\max & 2x & + & y & & \\
\text{s.t.} & -x & + & y & \leq & 1 \\
 & x & + & y & \leq & 3 \\
 & x & & & \leq & 2 \\
 & x & , & y & \geq & 0
\end{array}\right.
$$

実行可能領域と各反復後実行可能解を図 2.1 に示し，関係を見てみよう．

$$
\rightleftharpoons \left|\begin{array}{lccrcccccccccc}
\max & z & = & 2x & + & y & & & & & & & & \\
\text{s.t.} & & & -x & + & y & + & p & & & & & = & 1 \\
 & & & x & + & y & & & + & q & & & = & 3 \\
 & & & x & & & & & & & + & r & = & 2 \\
 & & & x & , & y & , & p & , & q & , & r & \geq & 0
\end{array}\right.
$$

初期実行可能解 $(x,y,p,q,r)=(0,0,1,3,2)(\geq 0)$，目的関数値 $z=0$.

$$
\rightleftharpoons \left|\begin{array}{lccccccl}
\max & z & = & & & 2x & + & y \\
\text{s.t.} & p & = & 1 & + & x & - & y \quad (\geq 0) \\
 & q & = & 3 & - & x & - & y \quad (\geq 0) \\
 & r & = & 2 & - & x & & \quad\;\; (\geq 0) \\
 & & & & & x & , & y \;\geq 0
\end{array}\right.
$$

y の値を増加させ，p と交換（y を基底変数にし，p を非基底変数にする）.
一反復後実行可能解 $(x,y,p,q,r)=(0,1,0,2,2)(\geq 0)$，目的関数値 $z=1$.

$$
\rightleftharpoons \left|\begin{array}{lccccccl}
\max & z & = & 1 & + & 3x & - & p \\
\text{s.t.} & y & = & 1 & + & x & - & p \quad (\geq 0) \\
 & q & = & 2 & - & 2x & + & p \quad (\geq 0) \\
 & r & = & 2 & - & x & & \quad\;\; (\geq 0) \\
 & & & & & x & , & p \;\geq 0
\end{array}\right.
$$

[1]最適解は $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 3)$ で，最適値が 15 となる．できましたか？

x の値を増加させ，q と交換（x を基底変数にし，q を非基底変数にする）．
二反復後実行可能解 $(x, y, p, q, r) = (1, 2, 0, 0, 1)(\geq 0)$，目的関数値 $z = 4$.

$$\rightleftharpoons \left| \begin{array}{lcccccccl} \max & z & = & 4 & - & (3/2)x & + & (1/2)p & \\ \text{s.t.} & y & = & 2 & - & (1/2)q & - & (1/2)p & (\geq 0) \\ & x & = & 1 & - & (1/2)q & + & (1/2)p & (\geq 0) \\ & r & = & 1 & + & (1/2)q & - & (1/2)p & (\geq 0) \\ & & & & & q & , & p & \geq 0 \end{array} \right.$$

p の値を増加させ，r と交換（p を基底変数にし，r を非基底変数にする）．
三反復後実行可能解 $(x, y, p, q, r) = (2, 1, 2, 0, 0)(\geq 0)$，目的関数値 $z = 5$.

$$\rightleftharpoons \left| \begin{array}{lcccccccl} \max & z & = & 5 & - & q & - & r & \\ \text{s.t.} & y & = & 1 & - & q & + & r & (\geq 0) \\ & x & = & 2 & & & - & r & (\geq 0) \\ & p & = & 2 & + & q & - & 2r & (\geq 0) \\ & & & & & q & , & r & \geq 0 \end{array} \right.$$

終了．最適解 $(x, y) = (2, 1)$, 最適値 $z = 5$.

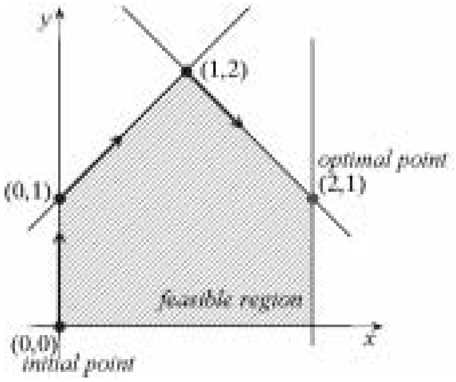

図 2.1: 単体法の初期解から最適解までの反復の様子

図 2.1 からも確認できるように，単体法は実行可能領域 (多面体) の頂点をたどって最適解へと到達する解法である．

2.5　単体法と最適性：行列表記による

行列表記した時の標準形 LP は以下で表せた．

$$(\mathrm{P}) \quad \left| \begin{array}{lrcl} \max & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} & & \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} & \geq & 0. \end{array} \right.$$

ここで，初期実行可能解 (基底) が得られているとき，単体法がどう表されるか見てみよう．基底変数を $\boldsymbol{x}_{\mathsf{B}} \in \mathbb{R}^{\mathsf{m}}$，非基底変数を $\boldsymbol{x}_{\mathsf{N}} \in \mathbb{R}^{\mathsf{n-m}}$ とし ($\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_{\mathsf{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathsf{N}}) \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$)，対応する係数を $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_{\mathsf{B}}, \boldsymbol{c}_{\mathsf{N}})$，$A = [B, N]$ とする (このとき，B を初期実行可能基底と呼ぶ，B は正則)．これらを使うと問題 (P) は以下の様に表せる．

$$
(\mathrm{P}) \quad \left| \begin{array}{lrcrcl} \max & \boldsymbol{c}_{\mathsf{B}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}_{\mathsf{B}} & + & \boldsymbol{c}_{\mathsf{N}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}_{\mathsf{N}} & & \\ \text{s.t.} & B\boldsymbol{x}_{\mathsf{B}} & + & N\boldsymbol{x}_{\mathsf{N}} & = & \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x}_{\mathsf{B}} & & & \geq & \mathsf{0}, \\ & & & \boldsymbol{x}_{\mathsf{N}} & \geq & \mathsf{0}. \end{array} \right.
$$

等式条件から，

$$
\boldsymbol{x}_{\mathsf{B}} \;=\; B^{-1}\boldsymbol{b} - B^{-1}N\boldsymbol{x}_{\mathsf{N}} \;\geq\; \mathsf{0}.
$$

これを目的関数に代入して，

$$
\boldsymbol{c}_{\mathsf{B}}^{\mathsf{T}} \left(B^{-1}\boldsymbol{b} - B^{-1}N\boldsymbol{x}_{\mathsf{N}} \right) + \boldsymbol{c}_{\mathsf{N}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}_{\mathsf{N}} \;=\; \boldsymbol{c}_{\mathsf{B}}^{\mathsf{T}} B^{-1}\boldsymbol{b} + \left(\boldsymbol{c}_{\mathsf{N}}^{\mathsf{T}} - \boldsymbol{c}_{\mathsf{B}}^{\mathsf{T}} B^{-1}N \right) \boldsymbol{x}_{\mathsf{N}}.
$$

故に，

$$
(\mathrm{P}) \quad \left| \begin{array}{llcrcrl} \max & & & \boldsymbol{c}_{\mathsf{B}}^{\mathsf{T}} B^{-1}\boldsymbol{b} & + & \left(\boldsymbol{c}_{\mathsf{N}}^{\mathsf{T}} - \boldsymbol{c}_{\mathsf{B}}^{\mathsf{T}} B^{-1}N \right) \boldsymbol{x}_{\mathsf{N}} & \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x}_{\mathsf{B}} & = & B^{-1}\boldsymbol{b} & - & B^{-1}N\boldsymbol{x}_{\mathsf{N}}, & \\ & \boldsymbol{x}_{\mathsf{B}} & & & & & \geq \mathsf{0}, \\ & & & & & \boldsymbol{x}_{\mathsf{N}} & \geq \mathsf{0}. \end{array} \right.
$$

$$
\text{or} \quad \left| \begin{array}{lrcl} \max & \left(\boldsymbol{c}_{\mathsf{N}}^{\mathsf{T}} - \boldsymbol{c}_{\mathsf{B}}^{\mathsf{T}} B^{-1}N \right) \boldsymbol{x}_{\mathsf{N}} & & \\ \text{s.t.} & B^{-1}N\boldsymbol{x}_{\mathsf{N}} & \leq & B^{-1}\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}_{\mathsf{N}} & \geq & \mathsf{0} \end{array} \right.
$$

ここで，

$$
B \;=\; (\boldsymbol{a}_{\mathsf{1}}, \cdots, \boldsymbol{a}_{\mathsf{m}}) \in \mathbb{R}^{\mathsf{m \times m}},\; N \;=\; (\boldsymbol{a}_{\mathsf{m+1}}, \cdots, \boldsymbol{a}_{\mathsf{n}}) \in \mathbb{R}^{\mathsf{m \times (n-m)}}
$$

とすると，単体法は，非基底変数 $\boldsymbol{x}_{\mathsf{N}}$ に対応する係数のうち，

$$
c_{\mathsf{j}'} - \boldsymbol{c}_{\mathsf{B}}^{\mathsf{T}} B^{-1}\boldsymbol{a}_{\mathsf{j}'} > 0
$$

となる $j' \in \{m+1, \ldots, n\}$ が存在するならば，$x_{\mathsf{j}'}$ を，

$$
r_{\mathsf{i}} \;=\; \min_{\mathsf{i}} \left\{ \frac{(B^{-1}\boldsymbol{b})_{\mathsf{i}}}{(B^{-1}\boldsymbol{a}_{\mathsf{j}'})_{\mathsf{i}}} \;\middle|\; (B^{-1}\boldsymbol{a}_{\mathsf{j}'})_{\mathsf{i}} \;>\; 0 \right\} \tag{2.1}
$$

まで増加させ，掃き出し（ピボット）を行って解を更新する (このとき，$x_{\mathsf{i}} = 0, x_{\mathsf{j}'} = r_{\mathsf{i}}$ となり，基底変数 x_{i} と非基底変数 $x_{\mathsf{j}'}$ が入れ替わる)．

このとき，r_{i} が存在しない，即ち，

$$
B^{-1}\boldsymbol{a}_{\mathsf{j}'} \leq \mathsf{0}
$$

であるならば，$x_{j'}$ にそって，いくらでも目的関数値を大きくできるので，もとの問題 (P) は無限解を持つ．

また，

$$\boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T B^{-1} N \ \leq\ 0$$

ならば，このとき得られている解が最適解となる．最適値は $\boldsymbol{c}_B^T B^{-1}\boldsymbol{b}$.

2.6 改訂単体法

単体法の一反復は，実行可能基底が得られているときに，非基底変数に対応する目的関数の係数の正負を調べて，ピボットする (基底と非基底の変更) 解法であるが，実際に計算を行う場合には，各反復において基底，非基底すべてについて計算する必要はない．前節の行列表記による単体法と最適性についてから分かるように，ピボット列 $j' \in \{m+1,\ldots,n\}$ を決めるためには，**単体乗数ベクトル $\boldsymbol{\pi}$**，

$$\boldsymbol{\pi}^T \ :=\ \boldsymbol{c}_B^T B^{-1}$$

を計算し，**被約費用 $\tilde{c}_N^T$**

$$\tilde{\boldsymbol{c}}_N^T \ :=\ \boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{\pi}^T N$$

を求めればよく (被約費用が正となる要素の中から j' を選ぶ．ここでは退化は考慮していない)，j' が定まった後に，

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{a}} \ &:=\ B^{-1}\boldsymbol{a}_{j'},\\ \tilde{\boldsymbol{b}} \ &:=\ B^{-1}\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

を計算して，式 (2.1) により r_i を求める．

これらの計算は，実際には基底行列 B の逆行列を用いるのではなく，連立一次方程式

$$\begin{aligned}B\boldsymbol{\pi} \ &=\ \boldsymbol{c}_B,\\ B\tilde{\boldsymbol{a}} \ &=\ \boldsymbol{a}_{j'},\\ B\tilde{\boldsymbol{b}} \ &=\ \boldsymbol{b}\end{aligned}$$

を解く．

r_i が求まれば，ピボット (基底と非基底の入れ替え) ができるので一反復終了となる．故に，以上の計算だけで単体法を実行できるので，コンピュータ上での計算にはこの改訂単体法を用いる．

Algorithm 2.3. **改訂単体法**

Step0: 初期実行可能基底行列 $B = (\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$ を求める.（基底の添え字は簡単のため最初の m 個にしてある.）

Step1: 単体乗数ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ を以下の方程式を解いて求め，

$$B\boldsymbol{\pi} \;=\; \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}$$

被約費用 $\tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$ を次式により計算する．

$$\tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \;:=\; \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}} N$$

$\tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \leq 0$ ならば現在の解を最適解 $\boldsymbol{x}^*$ として終了．

$$\boldsymbol{x}^* \;=\; (\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}^*, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}^*) \;=\; (B^{-1}\boldsymbol{b}, 0)$$

そうでなければ，被約費用で正となる j' を選ぶ（ここでは退化は考慮していない.）．

Step2: 方程式

$$B\tilde{\boldsymbol{a}} \;=\; \boldsymbol{a}_{\mathrm{j}'}$$

を解き，$\tilde{\boldsymbol{a}} \leq 0$ ならば終了 (無限解が存在)．そうでなければ，方程式

$$B\tilde{\boldsymbol{b}} \;=\; \boldsymbol{b}$$

を解いて，

$$r_{\mathrm{i}} \;=\; \min_{\mathrm{i}} \left\{ \frac{(B^{-1}\boldsymbol{b})_{\mathrm{i}}}{(B^{-1}\boldsymbol{a}_{\mathrm{j}'})_{\mathrm{i}}} \;\middle|\; (B^{-1}\boldsymbol{a}_{\mathrm{j}'})_{\mathrm{i}} \;>\; 0 \right\}$$

を求め，ピボットを行う．具体的には，$\boldsymbol{a}_{\mathrm{j}'}$ を基底に $\boldsymbol{a}_{\mathrm{i}}$ を非基底に，即ち，

$$B := (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{\mathrm{i}-1}, \boldsymbol{a}_{\mathrm{j}'}, \boldsymbol{a}_{\mathrm{i}+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\mathrm{m}})$$

を新たな基底として，Step1 へ．

Problem 2.4. 以下の問題を改訂単体法で解け．

$$\left|\begin{array}{lrcl} \max & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & & \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} & \geq & 0, \end{array}\right.$$

ただし $\quad \boldsymbol{c} \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\; A \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\; \boldsymbol{x} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\; \boldsymbol{b} \;=\; \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

3 双対問題と双対定理

問題 (P) を主問題 primal problem と呼び，その双対問題 (D) dual problem を定義できる．

$$\text{(D)} \quad \left|\begin{array}{lrcl} \min & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} & & \\ \text{s.t.} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} & \geq & \boldsymbol{c}. \end{array}\right.$$

対称形の LP の主問題 (P’)，双対問題 (D’) は以下のようになる．

$$(\text{P'}) \quad \left| \begin{array}{lrcl} \min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} & & \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} & \leq & \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} & \geq & 0. \end{array} \right.$$

$$(\text{D'}) \quad \left| \begin{array}{lrcl} \min & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} & & \\ \text{s.t.} & A^\top \boldsymbol{y} & \geq & \boldsymbol{c}. \\ & \boldsymbol{y} & \geq & 0. \end{array} \right.$$

主問題 (P) と双対問題 (D) の間には，以下の定理群が成り立つ．

Theorem 3.1. 弱双対定理
任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$($\boldsymbol{x}$：主実行可能解，$\boldsymbol{y}$：双対実行可能解) について，以下が成り立つ．

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}.$$

Proof: 主・双対実行可能解に対し，制約条件からすぐに導かれる． ∎

Corollary 3.2.

1. (P) が無限解を持つならば，(D) は実行不可能．
2. (D) が無限解を持つならば，(P) は実行不可能．

Proof: 対偶命題を考え，弱双対定理を使えば容易に導ける． ∎

Corollary 3.3. 主・双対実行可能解 $\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}$ が，

$$\boldsymbol{c}^\top \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^\top \tilde{\boldsymbol{y}}$$

を満たす時，これらは各々(P),(D) の最適解である．

Proof: 実行可能性と弱双対定理より明らか． ∎

Theorem 3.4. 双対定理

1. 主問題 (P) に最適解 $\boldsymbol{x}^*$ が存在するならば，双対問題 (D) は実行可能で最適値が等しい，即ち，双対最適解 $\boldsymbol{y}^*$ が存在し，$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}^*$ が成り立つ．
2. 双対問題 (D) に最適解 $\boldsymbol{y}^*$ が存在するならば，主問題 (P) は実行可能で最適値が等しい，即ち，主最適解 $\boldsymbol{x}^*$ が存在し，$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}^*$ が成り立つ．

Proof: 略． ∎

Theorem 3.5. **相補性定理**　$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{m}$ が各々主・双対最適解であるための必要十分条件は,

1. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq 0$, (主実行可能条件)
2. $A^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{y} \geq 0$, (双対実行可能条件)
3. $\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}(A^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}) = 0$, (相補性条件)

が成立することである.

Proof: 略. ∎

4　多目的線形計画法

線形計画法は, 制約条件・目的関数ともに線形で書ける, 量的データに対する決定問題のモデルである. 単体法 (シンプレックス法) や内点法で効率的に解くことができる. しかしながら, この方法では, 目的関数が常に一つの場合しか扱えない. 実際に起こる問題の中には, 幾つかの制約のもと, 多数の目的・目標が設定され, それらをなるべく全て満たすように解きたいという問題がある. 即ち, 幾つかの線型方程式・不等式制約条件のもとで, 複数個の線形目的関数を最大・最小にする解を見つけるという問題である.

多目的線形計画問題 multiobjective linear programming problem

$$
(MP) \quad \left|
\begin{array}{llcll}
\max & f_k(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j, & & & (k = 1, \ldots, l) \\
\text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = & b_i, & (i = 1, \ldots, m) \\
 & x_j & \geq & 0, & (j = 1, \ldots, n).
\end{array}
\right.
$$

$$
\text{or} \quad \left|
\begin{array}{llcl}
\max & f_k(\boldsymbol{x}) & = & \boldsymbol{c}_k^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}, \quad (k = 1, \ldots, l) \\
\text{s.t.} & A\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{b}, \\
 & \boldsymbol{x} & \geq & 0.
\end{array}
\right.
$$

また, この節では表記の簡単のため,

$$
X := \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0\}
$$

とする. このときもとの問題 (MP) は,

$$
\left|
\begin{array}{ll}
\max & f_k(\boldsymbol{x}) \quad (k = 1, \ldots, l) \\
\text{s.t.} & x \in X.
\end{array}
\right.
$$

と書ける.

多目的線形計画法で求めたい解はすべての目的を最適にする解である. 即ち, 次の定義による完全最適解を求めることである.

Definition 4.1. **完全最適解** absolutely optimal solution　$\boldsymbol{x}^* \in X$ が

$$\forall \boldsymbol{x} \in X \quad f_{\mathsf{k}}(\boldsymbol{x}^*) \ \geq \ f_{\mathsf{k}}(\boldsymbol{x})\,(k = 1, \ldots, l)$$

を満たすとき，(MP) の**完全最適解**であるという.

しかしながら，完全最適解は必ずしも存在するわけではない．複数の目的は，通常相反することが多いためである．次の例を見てみよう.

Example 4.2. **ダイエット問題**　『なめがやわーるど』では,「神秘ケーキ」「魅惑菓子」「苦渋野菜」「過酸果物」の 4 つの食べ物と,「だんはっく」「ガルジウム」「ヒタビン」という 3 つの栄養素と 2 つの食品含有物「糖分」「ガロリー」が存在するという（他にはなかった！）

4 つの食べ物は 3 つの栄養素と 2 つの食品含有物を，それぞれ表 4.1 に示す量だけ含む.

表 4.1: 『なめがやわーるど』の食品内栄養素，含有物量

	神秘ケーキ	魅惑菓子	苦渋野菜	過酸果物
だんはっく	3	1	4	2
ガルジウム	1	2	2	1
ヒタビン	1	1	2	5
糖分	7	5	3	4
ガロリー	100	350	300	350

『なめがやわーるど』人は，4 つの食べ物を一日にそれぞれ少しずつ食べているのであるが，3 つの栄養素を一日にそれぞれ，$50, 40, 45$ 摂取しないと死んでしまう！同様に，ガロリーは一日最大 8000 を超えても死んでしまう !!

さて,『なめがやわーるど』人の文教さんはダイエットをしたいと思い，糖分を最小にする食べ物の量を知りたかった．同時にガロリーも最小にする食べ物の量も知りたい．しかし甘党の文教さんは神秘ケーキと魅惑菓子が大好きで苦渋野菜と過酸果物が嫌いだった！好きなものはたくさん，嫌いなものは少なく食べたい．各食べ物の文教さんの好き嫌い度は一単位あたり表 4.2 のようになるそうである (数字が大きいほど好き).

表 4.2: 文教さんの好き嫌い度

神秘ケーキ	魅惑菓子	苦渋野菜	過酸果物
10	150	-100	-50

文教さんの 3 つの目的 (糖分最小，ガロリー最小，好物たくさん食べたい) を達成するためにはそれぞれの食品をどれくらいずつ食べたらよいだろうか？

【解説：定式化と個別最適解 (最適値) について】この問題を 4 つの食べ物の摂取量を x, y, z, w として定式化すると，以下の様に (MP) の形になる．

$$
\left|\begin{array}{llcrcrcrcrcl}
\min & f_1(\boldsymbol{x}) & = & 7x & + & 5y & + & 3z & + & 4w, & & \\
\min & f_2(\boldsymbol{x}) & = & 100x & + & 350y & + & 300z & + & 350w, & & \\
\max & f_3(\boldsymbol{x}) & = & 10x & + & 150y & - & 100z & - & 50w, & & \\
\text{s.t.} & & & 3x & + & y & + & 4z & + & 2w & \geq & 50, \\
 & & & x & + & 2y & + & 2z & + & w & \geq & 40, \\
 & & & x & + & y & + & 2z & + & 5w & \geq & 45, \\
 & & & 100x & + & 350y & + & 300z & + & 350w & \leq & 8000, \\
 & & & x & , & y & , & z & , & w & \geq & 0,
\end{array}\right.
\quad \text{ただし } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}
$$

まず，この問題に完全最適解があるかどうか見てみよう．完全最適解は，すべての目的関数を最適にする解であるから，目的関数ごとに同じ制約上で線形計画問題を目的関数の個数分解き，各最適解が全て一致するかどうかみればよい．

この例題の場合は，制約を X とおいたとき，

$f_1(\boldsymbol{x})$ のみを目的関数とする LP:(P_1) $\min\{f_1(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in X\}$
$f_2(\boldsymbol{x})$ のみを目的とする LP:(P_2) $\min\{f_2(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in X\}$
$f_3(\boldsymbol{x})$ のみを目的とする LP:(P_3) $\max\{f_3(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in X\}$

の 3 つの LP をそれぞれ解き，各最適解が同じかどうかをみる．

実際に解いてみると，

表 4.3: 各 LP の最適解と最適値

		各最適解 $\boldsymbol{x}_k^* = (x^*, y^*, z^*, w^*)$	糖分 $f_1(\boldsymbol{x}^*)$	ガロリー $f_2(\boldsymbol{x}^*)$	好度 $f_3(\boldsymbol{x}^*)$
(P_1)	糖分最小解	$\boldsymbol{x}_1^* = (0, 0, 19.38, 1.25)$	63.13	6250	-2000
(P_2)	ガロリー最小解	$\boldsymbol{x}_2^* = (38.75, 0, 0, 1.25)$	276.25	4312.5	325
(P_3)	好度最大解	$\boldsymbol{x}_3^* = (31, 14, 0, 0)$	287	8000	2410

値は小数点第 3 位で四捨五入，白抜き数字が各目的の最適解に対する最適値

となり，各最適解が不一致，完全最適解は存在しない．実際，

(P_1) の最適解 (糖分最小となる解) では，ガロリーは多く，好度は小さい，
(P_2) の最適解 (ガロリー最小となる解) では，糖分は多く，好度は小さい，
(P_3) の最適解 (好度最大となる解) では，糖分，ガロリーはともに多い．

となっている．

この例題のように，一般に，完全最適解は存在するとは限らないが，そういう問題の場合は，それぞれの目標をある程度妥協して，その中でなんらかの意味で最良の解を求めるということが現実的な対応となる．複数の目標，妥協案 (基準) などは問題設定者 (意思決定者) に依存する．

最良解としては，次に述べる Pareto 最適解などを求められればよしとする場合がある．

Definition 4.3. **パレート最適解**

$\hat{\boldsymbol{x}} \in X$ が問題 (MP) のパレート最適解であるとは,

$$\begin{array}{rcll} f_k(\boldsymbol{x}) & \geq & f_k(\hat{\boldsymbol{x}}), & \text{for all } k \in \{1, \ldots, l\}, \\ f_k(\boldsymbol{x}) & > & f_k(\hat{\boldsymbol{x}}), & \text{for some } k \in \{1, \ldots, l\} \end{array}$$

を満たす $\boldsymbol{x} \in X$ が存在しないことである．

パレート最適解は，l 個の目的のいずれか 1 つを犠牲にすることなしに他の目的を改善できない状態であることを意味している．

多目的線形計画法と Pareto 最適性について，さらに詳しくは [2, 1] など参照のこと．

最適解が存在し得ず，意思決定者より妥協案 (基準) が出された時に，なんらかの意味での最良解を得るという事については幾つかのアプローチがあるが，ここでは，グローバル法と目標計画法 (2 種類)，加重平均法の 3 つについて述べる．多目的線形計画の解法としては，他に多目的単体法 multiobjective simplex method([2] など参照) もある．

なお，以降，目的関数の最大化・最小化は揃っているものとする (揃っていなければ、(−1) 倍して揃えられるので一般性を失わない).

4.1 グローバル法

グローバル法は，各目的 (関数) の最良な妥協解を求める手順である．

Algorithm 4.4. **グローバル法** ([7] など参照)

Step1: **全ての k について，理想値 $f_k(\bar{\boldsymbol{x}}^k)$ を求める**

任意の $k(=1, \ldots, l)$ について，$f_k(\boldsymbol{x})$(だけ) を目的関数とした l 個の線形計画問題 $(P_1), \ldots, (P_l)$ を考え，それぞれ独立に最適解を求める．

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (P_1) \ : \ \max\{f_1(\boldsymbol{x}) \mid x \in X\} & \Rightarrow & \bar{\boldsymbol{x}}^1, \ f_1(\bar{\boldsymbol{x}}^1) \\ \vdots & & \vdots \\ (P_l) \ : \ \max\{f_l(\boldsymbol{x}) \mid x \in X\} & \Rightarrow & \bar{\boldsymbol{x}}^l, \ f_1(\bar{\boldsymbol{x}}^l) \end{array} \right.$$

得られた l 個の最適解 $\bar{\boldsymbol{x}}^k$, $(k = 1, \ldots, l)$ と最適値 $f_k(\bar{\boldsymbol{x}}^k)$, $(k = 1, \ldots, l)$ を各々の問題の理想解，理想値と呼ぶことにする．

Step2: **ペイオフ表を作る**

任意の $k, j(=1,\ldots,l)$ について $f_{\mathsf{kj}} := f_{\mathsf{k}}(\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{j}})$ を計算し，

$$\Big(\text{このとき，任意の } k \text{ について} \quad f_{\mathsf{kj}} \ = \ f_{\mathsf{k}}(\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{j}}) \ \leq \ f_{\mathsf{k}}(\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{k}}) \ = \ f_{\mathsf{kk}}, \ (j \neq k)\Big)$$

これをまとめたペイオフ表を以下の様に作る．

表 4.4: ペイオフ表

問題	理想解	理想値	$f_{1\mathsf{k}}$	$f_{2\mathsf{k}}$	$\cdots$	f_{lk}
(P_1)	$\bar{\boldsymbol{x}}^1$	$f_1(\bar{\boldsymbol{x}}^1)$	$f_1(\bar{\boldsymbol{x}}^1)$	$f_2(\bar{\boldsymbol{x}}^1)$	$\cdots$	$f_{\mathsf{l}}(\bar{\boldsymbol{x}}^1)$
(P_2)	$\bar{\boldsymbol{x}}^2$	$f_2(\bar{\boldsymbol{x}}^2)$	$f_1(\bar{\boldsymbol{x}}^2)$	$f_2(\bar{\boldsymbol{x}}^2)$	$\cdots$	$f_{\mathsf{l}}(\bar{\boldsymbol{x}}^2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
(P_{l})	$\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{l}}$	$f_{\mathsf{l}}(\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{l}})$	$f_1(\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{l}})$	$f_2(\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{l}})$	$\cdots$	$f_{\mathsf{l}}(\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{l}})$

Step3: **最良妥協解を求める**

任意の k について，理想値から目的関数の相対偏差を表す関数 $S_{\mathsf{k}}(\boldsymbol{x})$ を作り，

$$S_{\mathsf{k}}(\boldsymbol{x}) \ = \ \frac{f_{\mathsf{k}}(\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{k}}) - f_{\mathsf{k}}(\boldsymbol{x})}{f_{\mathsf{k}}(\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{k}})}, \quad (k=1,\ldots,l)$$

元の制約条件のもとで，$S_{\mathsf{k}}(\boldsymbol{x})$ の k についての絶対値和 (あるいは 2 乗和) を最小化する線形計画問題を解く ($\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{k}}, (k=1,\ldots,l)$ は各最大化問題 (P_{k}) の最適解なので，任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ について $S_{\mathsf{k}}(\boldsymbol{x})$ の分母は常に非負)．

$$(P^*) \quad \left| \begin{array}{lrcl} \min & S(\boldsymbol{x}) & := & \displaystyle\sum_{\mathsf{k}=1}^{\mathsf{l}} |S_{\mathsf{k}}(\boldsymbol{x})| \\ \text{s.t.} & x & \in & X. \end{array} \right.$$

この問題 (P^*) の最適解を元の問題の最良な妥協解とする．

4.1.1 **絶対値和最小問題は線形計画問題か？**([1])

任意の実数は 2 つの非負実数の和として書けるので，問題 (P^*) の目的関数 (の絶対値の中身) を

$$S_{\mathsf{k}}(\boldsymbol{x}) \ = \ \phi_{\mathsf{k}} - \psi_{\mathsf{k}}, \quad (k=1,\ldots,l)$$

とする．ただし，

$$\phi_{\mathsf{k}} \ \geq \ 0, \ \psi_{\mathsf{k}} \ \geq \ 0, \ \phi_{\mathsf{k}}\psi_{\mathsf{k}} \ = \ 0, \quad (k=1,\ldots,l)$$

である．すると，

$$|S_\mathsf{k}(\boldsymbol{x})| \;=\; \phi_\mathsf{k} + \psi_\mathsf{k}, \quad (k = 1, \ldots, l)$$

と書ける．これより，問題 (P^*) は以下のように書き直せる．

$$(P^*)\quad \left|\begin{array}{llcll} \min & \displaystyle\sum_{\mathsf{k}=1}^{\mathsf{l}} (\phi_\mathsf{k} + \psi_\mathsf{k}) & & & \\ \text{s.t.} & \phi_\mathsf{k} - \psi_\mathsf{k} & = & S_\mathsf{k}(\boldsymbol{x}), & (k = 1, \ldots, l), \\ & \phi_\mathsf{k}\psi_\mathsf{k} & = & 0, & (k = 1, \ldots, l), \\ & \phi_\mathsf{k} & \geq & 0,\ \psi_\mathsf{k} \ \geq\ 0, & (k = 1, \ldots, l), \\ & \boldsymbol{x} & \in & X. & \end{array}\right.$$

この問題は，線形計画問題ではない．そこで，l 個の 2 次式 $\phi_\mathsf{k}\psi_\mathsf{k} = 0, (k = 1, \ldots, l)$ を取り除いた次の問題 $(\bar{P}^*)$ を考える．

$$(\bar{P}^*)\quad \left|\begin{array}{llcll} \min & \displaystyle\sum_{\mathsf{k}=1}^{\mathsf{l}} (\phi_\mathsf{k} + \psi_\mathsf{k}) & & & \\ \text{s.t.} & \phi_\mathsf{k} - \psi_\mathsf{k} & = & S_\mathsf{k}(\boldsymbol{x}), & (k = 1, \ldots, l), \\ & \phi_\mathsf{k} & \geq & 0,\ \psi_\mathsf{k} \ \geq\ 0, & (k = 1, \ldots, l), \\ & \boldsymbol{x} & \in & X. & \end{array}\right.$$

この問題は線形計画問題であるが，もとの問題とはもはや違うように見える．$(P^*), (\bar{P}^*)$ の関係については以下の性質が成り立つ [1, 2].

Proposition 4.5. $(\bar{P}^*)$ の実行可能基底解はすべて，$\phi_\mathsf{k}\psi_\mathsf{k} = 0, (k = 1, \ldots, l)$ を満たす． ∎

したがって，(P^*) の代わりに $(\bar{P}^*)$ を単体法で解けばよい．

4.2 目標計画法

目標計画法は，目標 (目的関数で表される) が複数ある時に，各目的をできる限り達成するように工夫する．目標計画法には 2 通りあり，各目標に目標値を定め，目的の達成度合いを目標値からの乖離 (差) で測り，その合計を，予め決めてある各目標の優先度順に従って最小化し，妥協解を得る方法と，各目標に満足水準を設定し，全ての目的関数が個の水準を上回るような貝を得る方法である．

目標計画法は，各目的に目標値や，最低限満たして欲しい満足水準がある場合に有効な方法である．

4.2.1 目標計画法 1：目標値乖離最小

Algorithm 4.6. **目標計画法 1：目標値乖離最小** ([6, 7] など参照)

Step1: **目標値設定**

問題 (MP) の全ての目的関数 $f_k(\boldsymbol{x})$, $(k = 1, \ldots, l)$ に対し，目標値 f_k^*, $(k = 1, \ldots, l)$ を設定する．任意の $k(= 1, \ldots, l)$ に対し，目標値との差異を測る変数 d_k^+, d_k^- を導入する．このとき，d_k^+ は正の差異変数 (目標値を超えた時の超過分)，d_k^- は負の差異変数 (目標値に達しない時の不足分) を表すことにする．ここで

$$d_k^+ \cdot d_k^- \;=\; 0, \quad d_k^+, d_k^- \;\geq\; 0 \quad (k = 1, \ldots, l)$$

が成り立つ (いずれも非負で，いずれかは 0 の値をとる)．以上の定数，変数を用いて，l 個の目的関数を，以下の l 個の制約に変える．

$$\begin{cases} f_1(\boldsymbol{x}) + d_1^- - d_1^+ & = & f_1^*, \\ \vdots & & \vdots \\ f_l(\boldsymbol{x}) + d_l^- - d_l^+ & = & f_l^*, \end{cases}$$

Step2: 元の問題の k 個の目標に優先順位 $P_k(k = 1, \ldots, l)$ をつける．目標に優先順位がない時は，$P_k = 1(k = 1, \ldots, l)$(全て同じ優先度) とする．各差異変数の優先順位による重み付け和を最小にする以下の式を新たな目的関数とする．

$$\min \sum_{k=1}^{l} P_k(d_k^+ + d_k^-)$$

Step3: 以下の線形計画問題を解き，得られた解を (最良の) 妥協解とする．

$$\left|\begin{array}{lrcl} \min & \displaystyle\sum_{k=1}^{l} P_k(d_k^+ + d_k^-), & & \\ \text{s.t.} & f_k(\boldsymbol{x}) + d_k^- - d_k^+ & = & f_k^*, \quad (k = 1, \ldots, l) \\ & d_k^+,\ d_k^- & \geq & 0, \quad (k = 1, \ldots, l) \\ & \boldsymbol{x} & \in & X. \end{array}\right.$$

4.2.2 目標計画法 2：満足水準達成

理想値との差を最小にするグローバル法や目標値との乖離を最小にする方法などでは,

- 次元の異なる量を加え合わせている.
- いくつかの目的関数値は，理想値，目標値よりはるかに悪い値をとることがありうる.

といった欠点がある．そこで，各目的関数が最低限満たしてほしい満足水準を設定しようというのは自然な考え方である．

Algorithm 4.7. **目標計画法 2：満足水準達成** ([1] など参照)

Step1. **満足水準の設定**

問題 (MP) の全ての目的関数 $f_k(\boldsymbol{x})$, $(k=1,\ldots,l)$ に対し，満足水準 α_k, $(k=1,\ldots,l)$ を設定する．

$$f_k(\boldsymbol{x}) \ \geq \ \alpha_k, \quad (k=1,\ldots,l)$$

Step2. 以下で定式化される l 個の線形計画問題 $(P_1),\ldots,(P_l)$ を解く．

$$(P_k) \quad \left| \begin{array}{llll} f_k^* \ := \ \max & f_k(\boldsymbol{x}), & & \\ \quad\quad\quad \text{s.t.} & f_p(\boldsymbol{x}) & \geq & \alpha_p, \quad (p \in \{1,\ldots,l\}\backslash\{k\}), \\ & \boldsymbol{x} & \in & X. \end{array} \right.$$

ここでは，k 以外の目的関数の満足水準を満たしつつ，第 k 目的関数の最適値 f_k^* を求めている $(k=1,\ldots,l)$.

Step3. 全ての $k\,(=1,\ldots,l)$ について $f_k^* \ \geq \ \alpha_k$ のとき，全ての満足水準を見たす解が存在しているが，それが最良とは限らないので，満足水準は満たしつつもっと良い解を見つけることを試みる (ある k が存在して $f_k^* < \alpha_k$ のときは，Step4 へ).

$\theta \in (0,1)$ について，次の不等式系を考える．

$$\left\{ \begin{array}{lll} f_1(\boldsymbol{x}) & \geq & (1-\theta)f_1^* \ + \ \theta\alpha_1, \\ & \cdots & \\ f_l(\boldsymbol{x}) & \geq & (1-\theta)f_l^* \ + \ \theta\alpha_l, \end{array} \right.$$

f_k^* の定義とこの Step の仮定より，$\theta=1$ は上記不等式系の実行可能解である．最小の θ を見つけたいのでそれを $\theta^*(\leq 1)$ とする．

Step3-1. $q:=1$, $\theta_q := 1$(θ^* の近似値) とする．θ_q に対応する実行可能解を $\boldsymbol{x}^q$ とする．

Step3-2. 以下の線形計画問題を解き，最適解を $\boldsymbol{x}^{q+1}$ とする．

$$\left| \begin{array}{llll} \max & f_q(\boldsymbol{x}) & & \\ \text{s.t.} & f_p(\boldsymbol{x}) & \geq & f_p(\boldsymbol{x}^q), \quad p \in \{1,\ldots,l\}\backslash\{q\} \\ & \boldsymbol{x} & \in & X. \end{array} \right.$$

Step3-3. $q=l$ ならば終了，このときの解 $\boldsymbol{x}^{q+1}$ をもとの問題 (MP) の最適解として採用する．そうでなければ，$q:=q+1$ として Step3-2 へ．

Step4. ($f_k^* \ < \ \alpha_k$ となる k が存在する場合)　満足水準の欲求が強すぎるので見直す．$\Delta \in (0,1)$ を適当に取り，

$$\alpha_k \ := \ \Delta\alpha_k, \quad (k=1,\ldots,l)$$

とするなどして満足水準を更新し，Step2 へ．

4.3 加重平均法

問題 (MP) の，k 個の目的関数それぞれに重み w_k をつけて，重み付け和を最大化する線形計画問題 (以下) を解く方法．重みのつけ方は恣意的にもできるが，AHP の一対比較法を用いる [4] こともできる (目標 [目的関数] の一対比較を行い重要度を求め，それをここでの重みとする).

Algorithm 4.8. **加重平均法**

Step1. 各目的関数 $f_k(\boldsymbol{x})$ の重み w_k を (なんらかの方法で) 定める.

Step2. 以下の問題を単体法などで解き，その最適解をもとの問題 (MP) の最良解として採用する.

$$
\left|\begin{array}{lrcl}
\max & g(\boldsymbol{x}) & := & \sum_{k=1}^{l} w_k f_k(\boldsymbol{x}), \\
\text{s.t.} & \boldsymbol{x} & \in & X.
\end{array}\right.
$$

参考文献

[1] 今野浩. 『線形計画法』. 日科技連, March 1987.

[2] 坂和正敏. 『線形システムの最適化 –一目的から多目的へ–』. 森北出版, September 30 1984.

[3] 中山弘隆, 谷野哲三. 『多目的計画法の理論と応用』. 計測自動制御学会, June 30 1994.

[4] 刀根薫. 『ゲーム感覚意思決定法 AHP 入門』. 日科技連, March 1986.

[5] 藤田宏, 今野浩, 田邉國士. 『最適化法』. 岩波書店, March 24 1994.

[6] 伏見多美雄, 福川忠昭, 山口俊和. 『経営の多目標計画 ～目標計画法の考え方と応用例～』. 森北出版株式会社, June 1987.

[7] 木下栄蔵. 『わかりやすい意思決定論入門 基礎からファジイ理論まで』. 近代科学社, February 1996.