

2004.8.28, Sat.

カーナビによる最短ルート探索

～ 高校生のためのOR入門～
ネットワークと最短路問題

文教大学 情報学部 経営情報学科

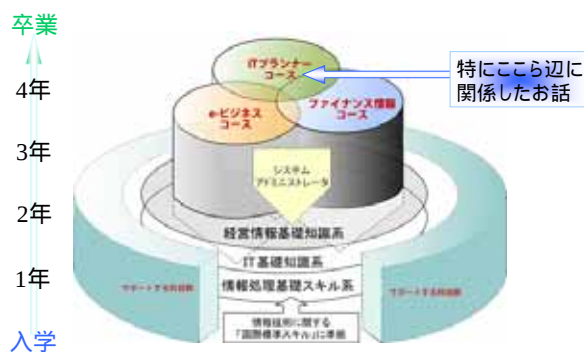
堀田 敬介

(OR = Operations Research)

Contents

1. 経営情報学科のカリキュラム
2. カーナビによるルート探索
 1. カーナビって何さ？ 問題のモデル化
 2. どこを通ると早いのか？
 3. 用語解説：グラフ・ネットワーク
 4. 最短路問題
 5. アルゴリズム：列挙法とダイクストラ法
3. ORとは？

経営情報学科のカリキュラム



カーナビって？

- カーナビ = car navigation. 
- カーナビの2大機能！
 - 人工衛星と交信し、現在位置を地図上表示
 - 出発地と目的地を選ぶと**最短経路**を表示

最近では
GPS携帯でも
同様のサービス

一体全体どのように
実現しているの？



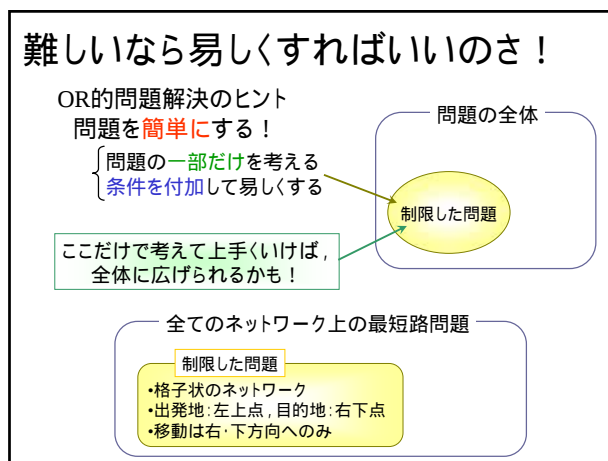
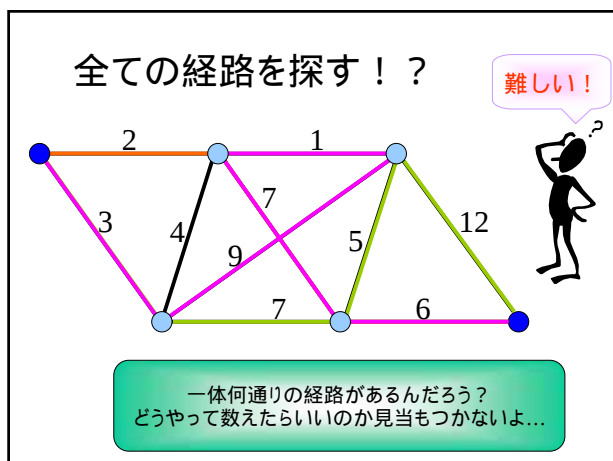
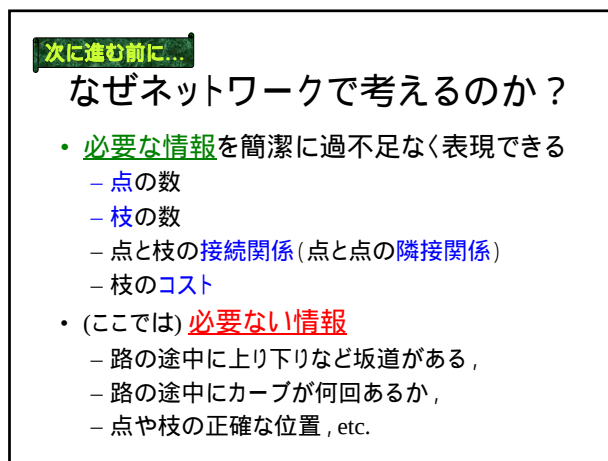
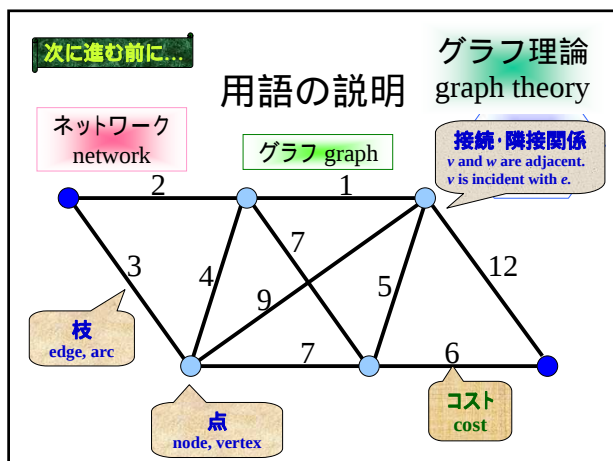
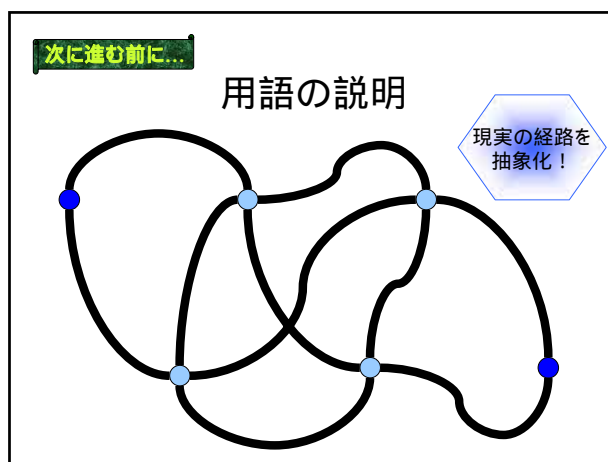
どこを通ると早いのか？



オレンジの経路が最短なのか？
どうすればわかる？

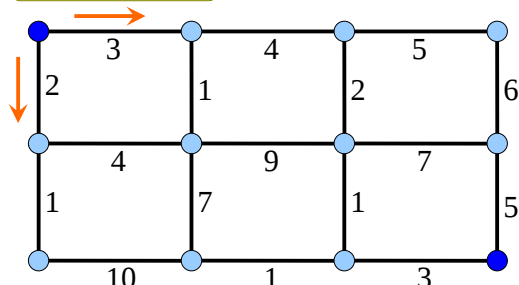


全ての経路を調べて、その中から
一番短い経路を選べばいいかも！
〔素朴で素直な方法〕



難しいなら易くすればいいのさ！

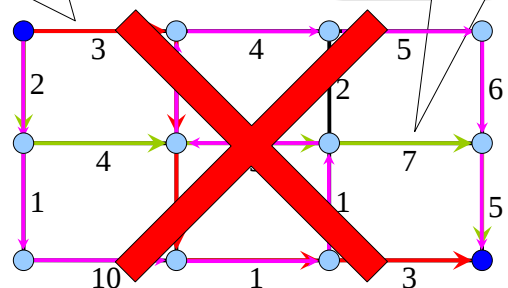
制限した問題
 ・格子状のネットワーク
 ・出発地：左上点，目的地：右下点
 ・移動は右・下方向へのみ



難しいなら易くすればいいのさ！

$$3+1+7+1+3 = 15$$

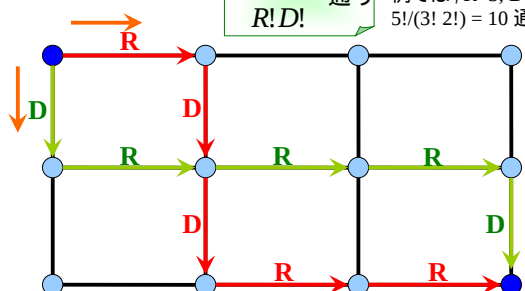
$$2+3+9+7+5 = 27$$



経路は全部でいくつあるのか？

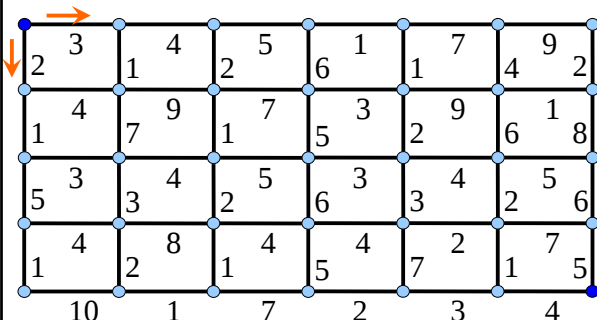
$$\frac{(R+D)!}{R!D!} \text{通り}$$

例では， $R=3, D=2$ より
 $5!/(3! 2!) = 10$ 通り



Point: どんな経路も R:3回, D:2回！

経路は全部でいくつあるのか？



$R=6, D=4$ なので， $10!/(6! 4!) = 210$ 通り

経路は全部でいくつあるのか？

r(横)	d(縦)	全ルート
3	2	10
10	5	3,003
20	10	30,045,015
50	25	52,588,547,141,148,900,000
100	50	2.0×10^{40}
500	250	6.6×10^{205}
740	370	1.8×10^{305}

大きな数の単位

京都市 札幌市

経路は全部でいくつあるのか？

経路がとてたくさんあるとは言っても，今のコンピュータはかなりの速さで計算できるでしょ？ だから大丈夫だね！？

- PS2 で計算させてみよう！

— 6.2GFLOPS [SCEI web site, 2000頃の情報]

1秒間に62億回の
浮動小数点演算が可能！

人間なら
0.1FLOPS
ぐらい？

簡単のため，1つの経路を見つけてその総コストを計算するのに，たどる経路枝数の演算できると仮定。
 (例：横10，縦5の道路なら10+5回の演算で計算可と仮定)

経路は全部でいくつあるのか？

R(横)	D(縦)	全ルート	演算時間
3	2	10	0.000000008秒
10	5	3,003	0.000007265秒
20	10	30,045,015	0.145379105秒
50	25	5.3×10^{19}	20172年
100	50	2.0×10^{40}	1.0×10^{15} 宙齡
500	250	6.6×10^{205}	1.7×10^{181} 宙齡
740	370	1.8×10^{305}	#NUM! (い)

#1 宙齡 = 150億年



ではどうする？

- 素朴で素直な方法〔列挙法〕
 - 全経路をしらみつぶしに調べて、最短経路を見つける方法

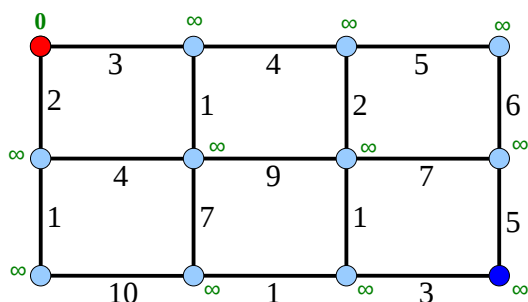
時間が
掛かり過
ぎる！



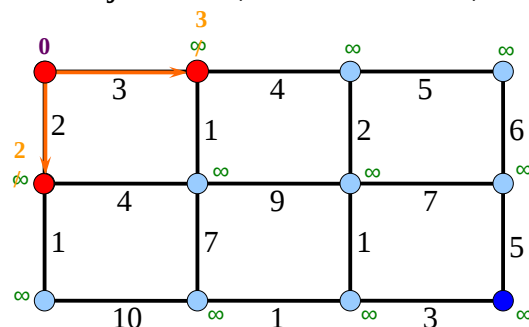
全経路をしらみつぶしに調べずに、
最短経路を、現実的時間で
見つける方法があるか？

**Dijkstra法
(ダイクストラ法)**

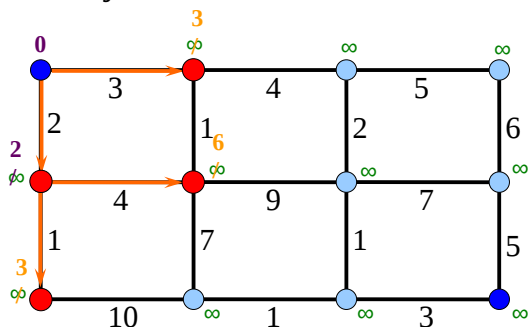
Dijkstra法 (ダイクストラ法)



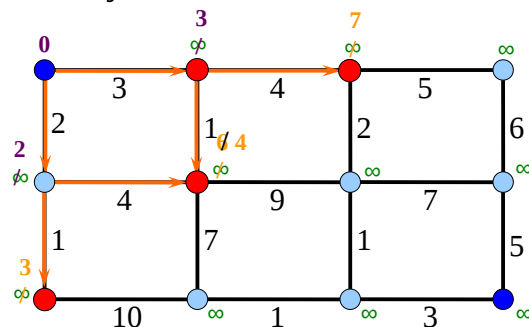
Dijkstra法 (ダイクストラ法)

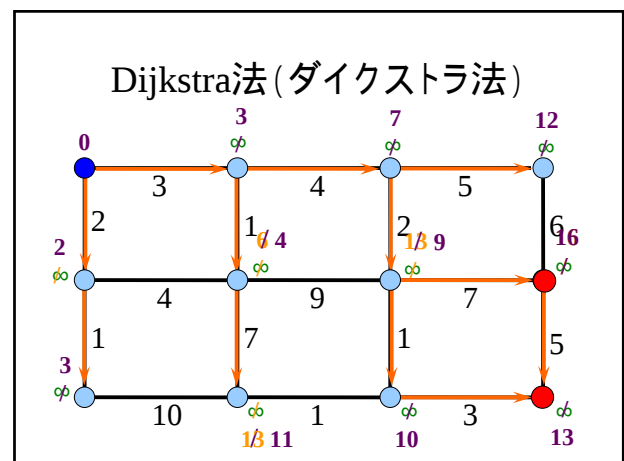
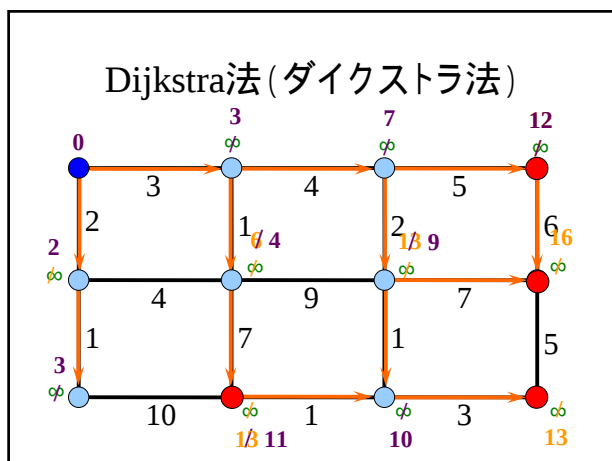
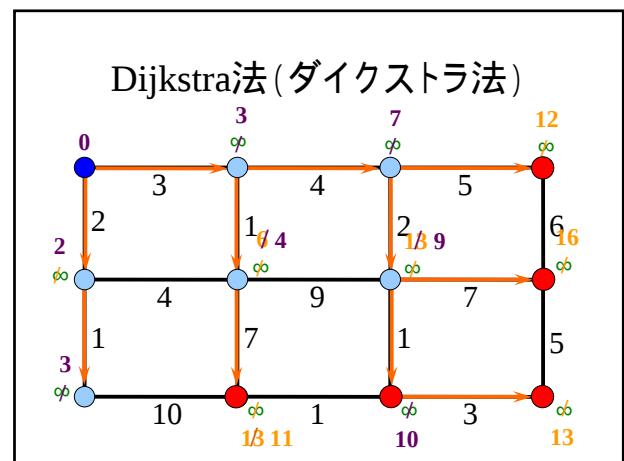
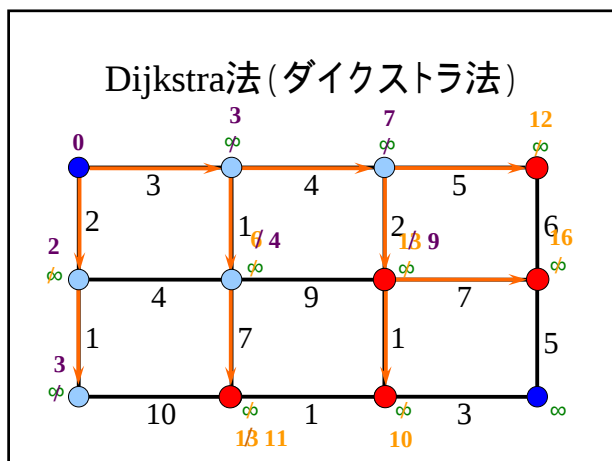
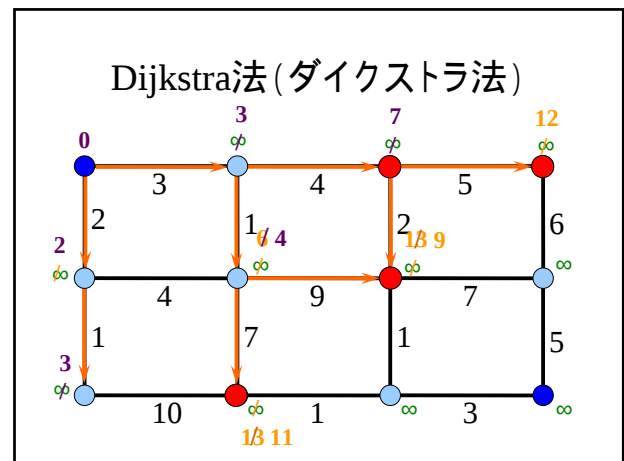
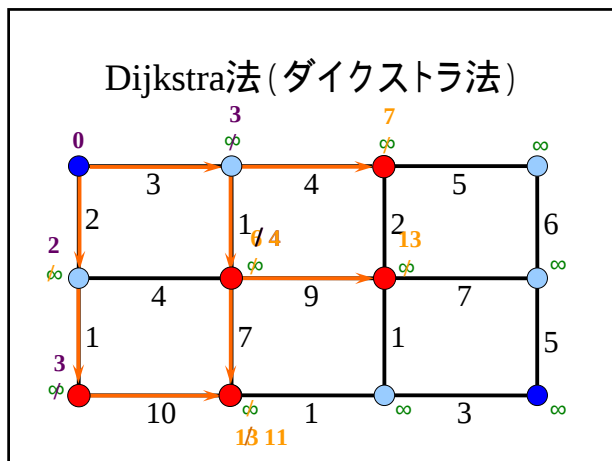


Dijkstra法 (ダイクストラ法)



Dijkstra法 (ダイクストラ法)





Dijkstra法って速いのか？

- 点の数を n とすると、大雑把な見積もりで、

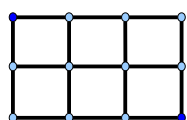
$$O(n^2)$$

多項式オーダー

$$O(m + n \log n)$$

- 先の例で点の数 n を右枝数 r 、下枝数 d で表すと

$$n = (r + 1) \times (d + 1)$$



$$n = (3 + 1) \times (2 + 1) = 12$$

$$n^2 = 12^2 = 144$$

PS2で計算してみよう！

簡単のため n^2 の5倍の浮動小数点演算回数で計算できると仮定。

Dijkstra法って速いのか？

R(横)	D(縦)	全ルート	演算時間 (素朴な方法)	演算時間 (Dijkstra法)
3	2	10	0.000000008秒	0.000000116秒
10	5	3,003	0.000007265秒	0.000003513秒
20	10	30,045,015	0.145379105秒	0.000043033秒
50	25	5.3×10^{19}	20172年	0.001417965秒
100	50	2.0×10^{40}	1.0×10^{15} 宇宙年齢	0.021397420秒
500	250	6.6×10^{205}	1.7×10^{181} 宇宙年齢	12.75秒
740	370	1.8×10^{305}	#NUM!	60.95秒

これなら使える！

ORって？

素朴な方法しかない世界

カーナビは存在しない

Dijkstra法が考案された世界

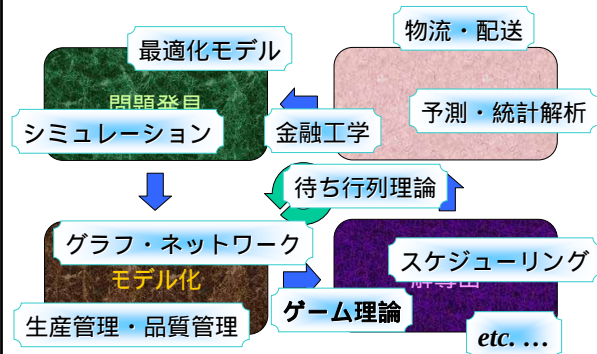
カーナビが実現可能！

オペレーションズ・リサーチ：

現象を抽象化した数理モデルを構築し、モデル分析に基づいて、種々の問題、とりわけ意思決定問題の解決を支援する方法論や技術の総称。

(OR事典2000)

ORって？



参考：大きい数を表す単位

- 兆(ちょう) 10^{12}
- 京(けい) 10^{16}
- 垓(がい) 10^{20}
- 杼(じょ) 10^{24}
- 穰(じょう) 10^{28}
- 溝(こう) 10^{32}
- 澗(かん) 10^{36}
- 正(せい) 10^{40}
- 載(さい) 10^{44}
- 極(ごく) 10^{48}
- 恒河沙(ごうがしゃ) 10^{52}
- 阿僧祇(あそうぎ) 10^{56}
- 那由他(なゆた) 10^{60}
- 不可思議(ふかしぎ) 10^{64}
- 無量大数(むりょうたいすう) 10^{68}

[注] 杼は正しくは「のぎへん」(5111)