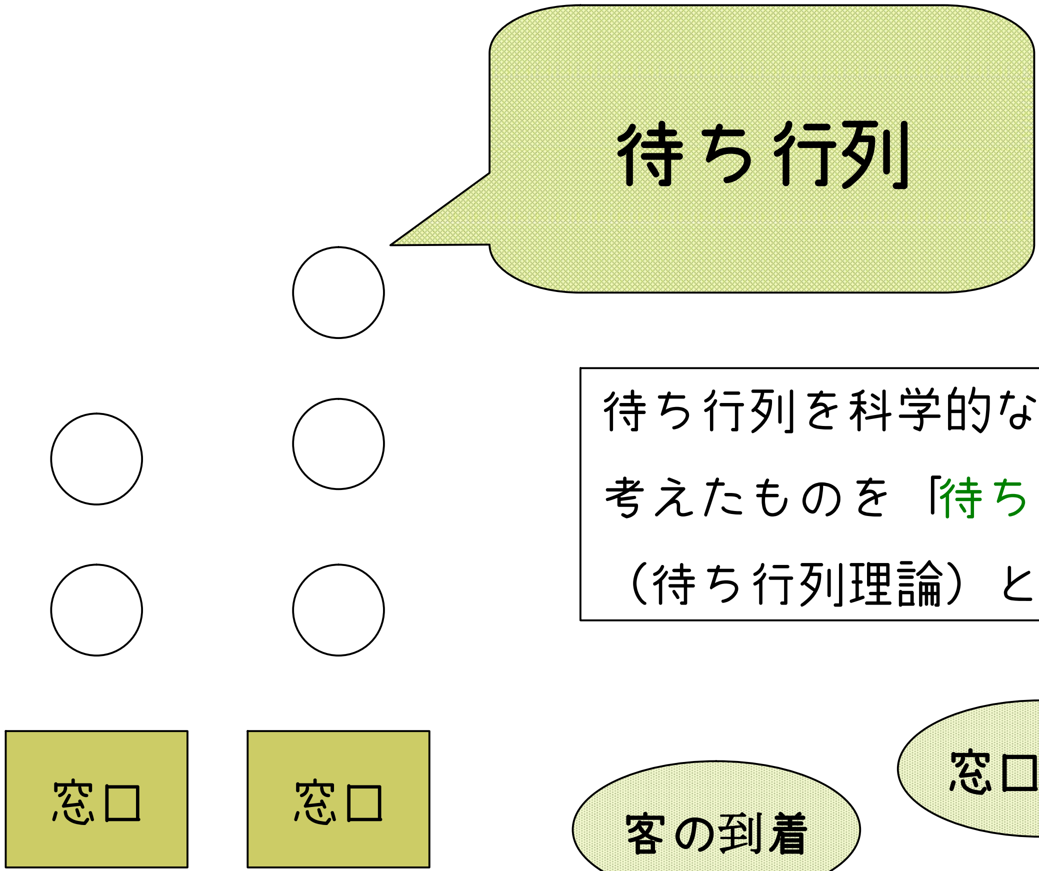
待ち合わせ理論

a3p21147　元藤ひとみ

待ち合わせ理論

待ち合わせ理論とは…



待ち行列を科学的な数理モデルとして
考えたものを「待ち合わせ理論」
（待ち行列理論）と呼ぶ。

客の到着

窓口の数

サービス時間

待ち合わせ理論

D/D/1モデル

客の到着/サービス時間/窓口の数

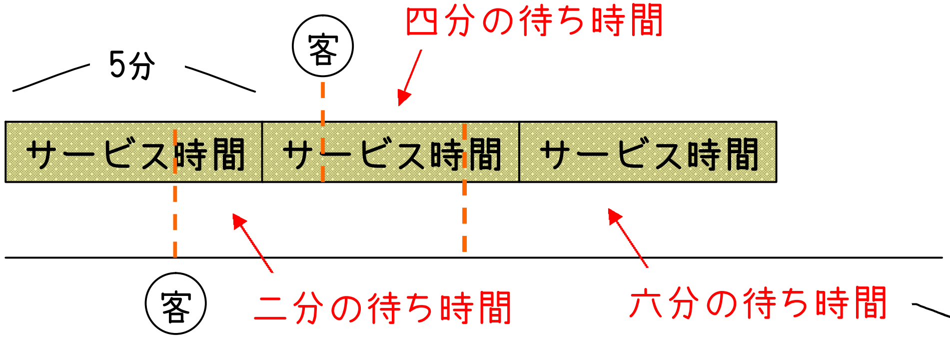
D＝deterministic … 決定論的

客の到着間隔も、サービスにかかる時間も一定値で考える。

客 の到着間隔＝3分

サービス にかかる時間＝5分

サービス時間＞到着間隔
なので二人目以降の客には
「待ち」が生じる。



サービス時間－到着間隔
×n人目のn-1　＝**待ち時間**

(5-3)×(4-1)=6

待ち合わせ理論

M/M/1モデル

客の到着/サービス時間/窓口の数

M＝マルコフ過程 … ランダム

客の到着間隔も、サービスにかかる時間もランダムで考える。

ポアソン型到着

…単位時間あたりの客の数が、
ポアソン分布に従ったランダムで到着する。

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

λ ＝平均到着率
（単位時間あたりに到着する客の平均数）

e＝自然対数の底。約2.71828。

待ち合わせ理論

単位時間あたりの平均到着客数が6人のとき、
8人の客がやってくる確立はどれくらいか？

$$P(x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \Rightarrow \frac{6^8 \times \frac{1}{2.71828^6}}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

平均到着客数6人のとき、８人の客がやってくる確立は

0.10326 ＝ **約10.3％** になる。

Excelでは**POISSON関数**で簡単に計算することが可能。

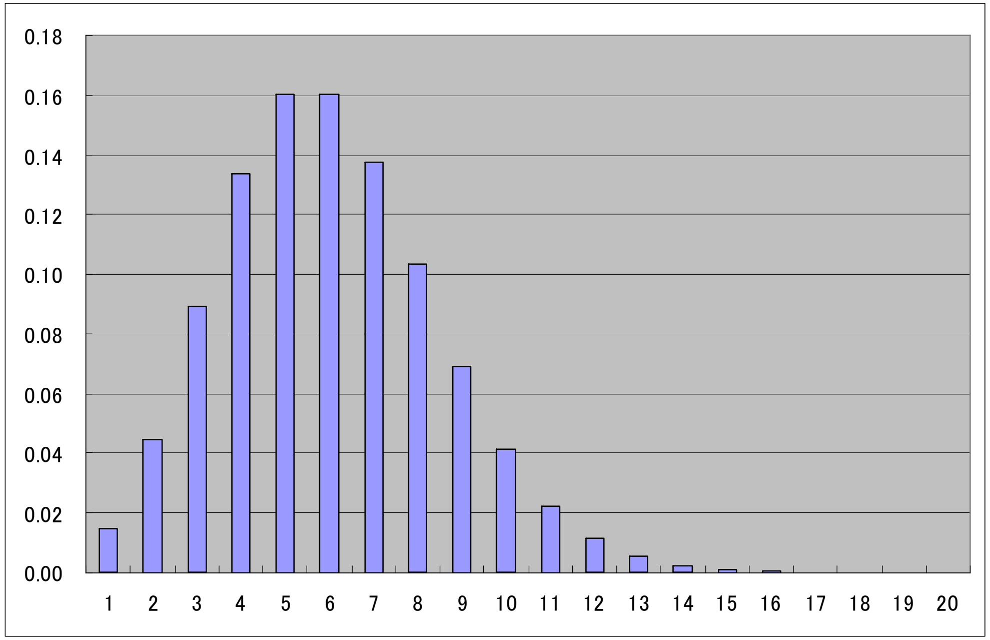
待ち合わせ理論

=POISSON(B4,B$1,0)

単位時間あたり平均**6**人の場合の各人数の確立が求められた。

=POISSON(B5,B$1,1)

	A	B	C	D
1	平均λ＝	6		
2				
3		x	P(x)	累積値
4		1	0.0148725	0.0173513
5		2	0.0446175	0.0619688
6		3	0.0892351	0.1512039
7		4	0.1338526	0.2850565
8		5	0.1606231	0.4456796
9		6	0.1606231	0.6063028
10		7	0.1376770	0.7439798
11		8	0.1032577	0.8472375
12		9	0.0688385	0.9160760
13		10	0.0413031	0.9573791
14		11	0.0225290	0.9799080
15		12	0.0112645	0.9911725
16		13	0.0051990	0.9963715
17		14	0.0022281	0.9985996
18		15	0.0008913	0.9994909
19		16	0.0003342	0.9998251
20		17	0.0001180	0.9999431
21		18	0.0000393	0.9999824
22		19	0.0000124	0.9999948
23		20	0.0000037	0.9999985



待ち合わせ理論

指数型サービス …サービス時間を確率論で考える。

平均
サービス率

単位時間あたりの、サービスを受けた客の数の平均 ＝ μ

客一人あたりが受けたサービス時間の平均値 ＝ 1/μ

平均サービス
時間

1/μ 平均サービス時間二分

1分 1分

客

$$\left(\frac{30(\text{人})}{1(\text{時間})}\right)$$

⇒

μ

0.5(人)

サービス率50%
(一分に0.5人)

逆数の関係になる

待ち合わせ理論

平均サービス率（μ）がわかれば、**指数分布**で
任意の時間（ｔ）でサービスが完了する確立を求めることができる。

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

平均サービス時間が一人あたり二分
（平均サービス率は**0.5**分）の場合、
任意の時間（ｔ）が**3**になる確立は？

3分あれば77.7%
の確立でサービス
が完了する。

$$F(3) = 1 - 2.71828^{-\frac{1}{2}\times 3} \qquad = 0.77687$$

待ち合わせ理論

平均サービス時間が二分の窓口で、
サービス時間が**3**分かかってしまう確率は？

確率密度関数を使用

$$f(t)=\begin{cases}\mu e^{-\mu t} & : \quad t\neq 0\\ 0 & : \quad t=0\end{cases}$$

サービス時間は連続していて、
離散値の確立とは異なる。
そのため確率密度関数を
使って求めることになる。

$$f(3)=\frac{1}{2}\times 2.71828^{-\frac{1}{2}\times 3} \quad =0.115652$$

3分かかってしまう
確率は約11.6%

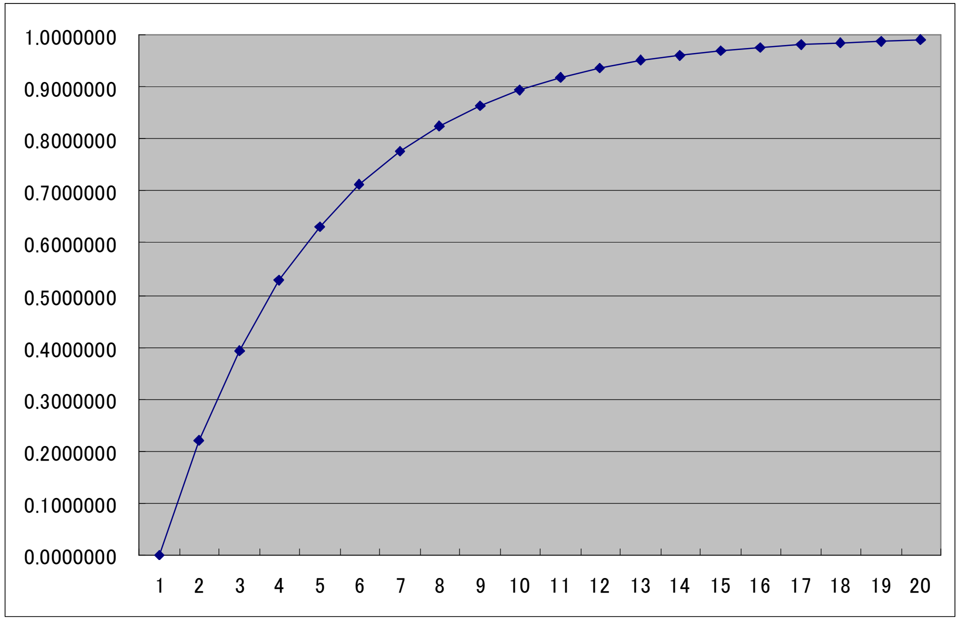
Excelでは**EXPONDIST関数**で簡単に計算することが可能。

待ち合わせ理論

=EXPONDIST(F4,F1,0)

=EXPONDIST(F5,F1,1)

E	F	G	H
平均1/μ=0.5			
	t	f(t)	F(t)
	0.0	0.5000000	0.0000000
	0.5	0.3894004	0.2211992
	1.0	0.3032653	0.3934693
	1.5	0.2361833	0.5276334
	2.0	0.1839397	0.6321206
	2.5	0.1432524	0.7134952
	3.0	0.1115651	0.7768698
	3.5	0.0868870	0.8262261
	4.0	0.0676676	0.8646647
	4.5	0.0526996	0.8946008
	5.0	0.0410425	0.9179150
	5.5	0.0319639	0.9360721
	6.0	0.0248935	0.9502129
	6.5	0.0193871	0.9612258
	7.0	0.0150987	0.9698026
	7.5	0.0117589	0.9764823
	8.0	0.0091578	0.9816844
	8.5	0.0071321	0.9857358
	9.0	0.0055545	0.9888910
	9.5	0.0043258	0.9913483



待ち合わせ理論

シミュレーション
（モンテカルロ法など）

…乱数を発生させて行う。

RAND関数

=RAND()　…0以上1未満の乱数　**F9**キーで再計算

=INT　　…小数点以下を切り捨てる

シミュレーションは、
平均値だけでは
知りえない数値を
実験で探るために行う。

=INT(RAND())　…整数の乱数

=INT(RAND()*n)+a
…aから始まってn個の整数の中で乱数を発生

=INT(RAND()*6)+1　…1から6までの間の乱数が発生

待ち合わせ理論

μ ＝ 平均到着率（人/時間）

$1/\mu$ ＝ 平均到着間隔

発生させた乱数に応じて指数乱数（時間間隔t）を返す表を作成。

	A	B	C	D
1				
2		1/μ＝10		（分/人）
3		ポアソン分布		
4	No.	乱数	指数乱数	到着時間
5	1	0.0329	0.33	0.33
6	2	0.9849	41.93	42.27
7	3	0.9491	29.78	72.05
8	4	0.5455	7.89	79.94
9	5	0.9340	27.17	107.11
10	6	0.5683	8.40	115.51
11	7	0.4023	5.15	120.66
12	8	0.2232	2.53	123.18
13	9	0.3863	4.88	128.07
14	10	0.0410	0.42	128.49
15	11	0.9613	32.52	161.01
16	12	0.2390	2.73	163.74
17	13	0.8810	21.29	185.02
18	14	0.4049	5.19	190.22
19	15	0.0836	0.87	191.09
20	16	0.0524	0.54	191.63
21	17	0.2902	3.43	195.05
22	18	0.1242	1.33	196.38
23	19	0.9293	26.49	222.87
24	20	0.5661	8.35	231.22

=-C$2*LN(1-B5)　（←時間間隔t）

LN関数＝自然数を返す関数。

=D5+C6

一つ前の到着時間+時間間隔t

到着時間

待ち合わせ理論

客の到着

サービス時間

=IF(D7<G7,G7-D7,0)

到着時間よりも開始時刻のほうが大きい場合、その誤差を返す。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		1/λ=10		(分/人)	1/μ=5		(分/人)			
3		ポアソン分布			指数サービス				評	
4	No.	乱数	指数乱数	到着時間	乱数	指数乱数	開始時刻	終了時刻	待ち人数	時間
5	1	0.7901	15.61	15.61	0.0577	0.30	15.61	20.61	−	−
6	2	0.2743	3.21	18.82	0.0673	0.35	20.61	25.61	1	1.04
7	3	0.4377	5.76	24.58	0.5207	3.68	25.61	30.61	1	2.65
8	4	0.2874	3.39	27.97	0.8311	8.89	30.61	35.61	0	0.00
9	5	0.6158	9.57	37.53	0.4056	2.60	37.53	42.53	0	0.00
10	6	0.7920	15.70	53.23	0.6655	5.48	53.23	58.23	0	0.00
11	7	0.5767	8.60	61.83	0.8791	10.56	61.83	66.83	0	0.00
12	8	0.9321	26.89	88.72	0.0256	0.13	88.72	93.72	0	0.00
13	9	0.9312	26.76	115.49	0.7713	7.38	115.49	120.49	1	0.17
14	10	0.3829	4.83	120.31	0.9663	16.96	120.49	125.49	1	4.23
15	11	0.0900	0.94	121.26	0.6467	5.20	125.49	[illegible]	0	0.00
16	12	0.7953	15.86	137.12	0.6925	5.90	[illegible]	142.12	0	0.00
17	13	0.5153	7.24	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	0.00
18	14	0.5275	7.50	151.85	0.6545	5.31	151.85	156.85	0	0.00
19	15	0.7364	13.33	165.19	0.4478	2.97	165.19	170.19	0	0.00
20	16	0.5120	7.17	172.36	0.1390	0.75	172.36	177.36	1	1.33
21	17	0.3071	3.67	176.03	0.0341	0.17	177.36	182.36	1	1.43
22	18	0.3876	4.90	180.93	0.2936	1.74	182.36	187.36	0	0.00
23	19	0.8194	17.11	198.05	0.2151	1.21	198.05	203.05	1	4.31
24	20	0.0663	0.69	198.73	0.6452	5.18	203.05	208.05	1	0.00
25								平均	0.42	0.80

=FREQUENCY(D15:D$24,H14)

終了時刻よりも早く到着してしまっている客の人数を数える。