データ分布と予測

仮説検定

堀田敬介

2006/12/15,Fri.

Contents

仮説検定とは？

推測統計 statistical inference	仮説検定 hypothesis testing
標本データの平均値と分散（標準偏差）から，母集団の平均値と分散（標準偏差），母比率などの母数（パラメータ）を推定する	標本データの平均値と分散（標準偏差）などをもとに，母集団に対する**「ある仮説」が間違いかどうか**判定する

仮説検定とは？

- 例：日本人成人女性の平均身長

仮説 「日本人成人女性の平均身長は160cmである」

母集団
日本人 成人女性

ランダムサンプリング
（無作為抽出）

標本	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
身長	150	165	155	170	150	145	175	160	165	140

標本平均の値：157.5cm

⇩

仮説は間違っていた（正しかった）と言えるのか？

仮説検定とは？

- 例：日本人成人女性の平均身長

仮説 「日本人成人女性の平均身長は160cmである」

標本	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
身長	150	165	155	170	150	145	175	160	165	140

標本平均の値：157.5cm
標本標準偏差の値：10.78cm

標本平均 $\bar{X}$，標本分散 S^2とすると，以下の確率変数 T が自由度 n-1 の t 分布に従う

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}}$$

仮説検定とは？

- 例：日本人女性の平均身長

仮説 「日本人女性の平均身長は160cmである」

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} = \frac{\bar{X} - 160}{10.78/\sqrt{10-1}} = \frac{\bar{X} - 160}{3.594}$$

自由度9の
t分布に従う

標本平均 $\bar{X}$ がこの分布の中心から大きく外れた位置にあるならば，仮説は間違っていると判定できるのではないか？

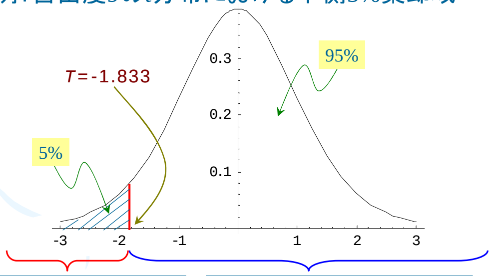
注意：仮説が間違いである確率は0にはならない！

⇩

仮説が間違いである範囲を決める！

仮説検定とは？

- 採択域と棄却域
  - 例：自由度9のt分布における下側5%棄却域



棄却域 rejection region
（**臨界域** critical region）

採択域 region of acceptance

仮説検定とは？

- 採択域と棄却域
  - 例：自由度9のt分布における下側5%棄却域

$$T=\frac{\overline{X}-160}{3.594}\le -1.833$$

$$\Leftrightarrow \overline{X}\le 160-1.833\times 3.594=153.4$$

例題の場合は，標本平均値が157.5cmで棄却域にないため，棄却されない

つまり，

棄却域：$\overline{X}\le 153.4$

採択域：$\overline{X}>153.4$

となり，標本平均値が153.4cm以下であれば，仮説：「日本人成人女性の平均身長は160cmである」が棄却 (rejection of hypothesis) される

有意水準

- 仮説検定の手順
  1. 母集団に対する「仮説」を立てる
  2. 「仮説」の棄却域を設定する

  棄却域が5%とすれば95%信頼区間から外れていれば「仮説」を「棄却」することになる

棄却域：小 信頼区間：広	⟷	棄却域：大 信頼区間：狭

★ 棄却域が5%で「仮説」が「棄却」されるとき，5%はその「仮説」が正しい可能性が残る！

5%の**間違い**の危険性がある

5%：有意水準(significance level)〔危険率(risk)〕

帰無仮説と対立仮説

- 検定における仮説は**対立する**2つ

〔仮説1〕日本人成人男性の平均体重は60kgである
〔仮説2〕日本人成人男性の平均体重は60kgではない

★ 仮説1を統計的に検定したとき，その起こる確率が棄却域にあれば，この仮説が棄却される．
★ 仮説1が棄却されない場合，「仮説1が正しいという結論は出せない」！
★ 仮説1は「棄却されてはじめて意味を持つ」
★ 仮説2は仮説1が棄却された場合に採択される

帰無仮説 (null hypothesis)
棄却されてはじめて意味を持つ

対立仮説 (alternative hypothesis)
本当に示したいこと

統計的検定の目的は「対立仮説の正しさを示す」こと！

仮説検定における誤りと検出力

- 仮説検定における誤り
  - 第1種の誤り error of the first kind
    - 帰無仮説H_0が正しいのにそれを棄却してしまう
      - 例：品質管理において「合格するはずの良製品を不合格判定」する
      - 例：刑事犯罪において「無罪の人を有罪」にする
  - 第2種の誤り error of the second kind
    - 帰無仮説H_0が誤っているのにそれを採択してしまう
      - 例：品質管理において「不合格のはずの不良品を合格判定」する
      - 例：刑事犯罪において「有罪の人を無罪」にする

		本当に成り立っているのは	
		帰無仮説 H_0	対立仮説 H_1
検定結果	H_0	正しい（その確率：1-α）	第2種の誤り（その確率：β）
	H_1	第1種の誤り（その確率：α）	正しい（確率：1-β =**検出力**）

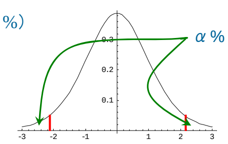
α：大⇔β：小
α：小⇔β：大
となるので，共に小さくはできない

•帰無仮説が限定的なのでα（有意水準）は1つに定まる．
•サンプル数が大きければβは小さくなる．

両側検定と片側検定

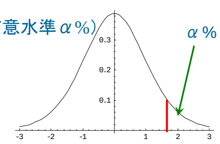
- 両側検定 two tailed test（有意水準α%）

〔帰無仮説〕
日本人男性の平均体重は60kgである
（μ =60）
〔対立仮説〕
日本人男性の平均体重は60kgではない
（$\mu \neq$60）



- 片側（右側）検定 one tailed test（有意水準α%）

〔帰無仮説〕
日本人男性の平均身長は160cmである
（μ =160）
〔対立仮説〕
日本人男性の平均身長は160cmより大きい
（μ >160）



両側検定と片側検定

- 片側検定か両側検定か？
  - 両側検定…母数の値がある目標値と等しいかどうかだけを調べたいときに用いる
    - 例：生産ラインの機械が正しく動いているか？
  - 片側検定…母数の大きさが理論的・経験的に予測されるときに用いる
    - 例：補習後に成績が上がったか？
（通常上がると考えられるので下がる場合は考慮しない）
    - 例：今年の夏は寒い気がする．本当か？
（「寒い」という経験から平均気温が低いことを予測）

母数に関する仮説検定

- 母平均に関する仮説検定（母分散σ^2 既知）　Z検定

統計量 $\overline{X} \to Z = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ が標準正規分布$N(0,1)$に従うことを利用

- 母平均に関する仮説検定（母分散σ^2 未知）　t検定

統計量 $\overline{X} \to T = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}}$ が自由度 n-1 の t 分布に従うことを利用

- 母分散に関する仮説検定　χ^2検定

統計量 $S^2 \to \chi^2 = \dfrac{nS^2}{\sigma^2}$ が自由度 n-1 の χ^2分布に従うことを利用

母数に関する仮説検定

- 母平均の検定〔Z検定〕（母分散が既知の場合）
  - 例：BMIによる肥満検査

BMI＝(体重)kg ÷ {(身長)m}^{2}

BMI値	判定
～20	やせ
～24	普通
～26.5	太気味
～∞	太過

ある会社の無作為抽出100人の社員のBMIが平均値=22.35だった．
肥満の程度に問題があるといえるか？有意水準5%で検定

〔出展：『図解雑学 統計解析』p.192〕

〔帰無仮説〕母平均μ＝22
〔対立仮説〕母平均$\mu \neq 22$
で両側検定．ただし，母標準偏差は過去の経験から2.5とする．

$$\overline{X} \to Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

確率変数Zは標準正規分布$N(0,1)$に従う

母数に関する仮説検定

- 母平均の検定〔Z検定〕（母分散が既知の場合）
  - 例：BMIによる肥満検査

有意水準5%の棄却域を表す不等式

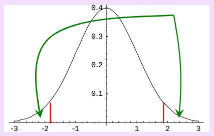
$$|Z| > 1.96$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > 1.96$$

$$\Leftrightarrow |\bar{X}-\mu| > 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{X} < \mu - 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 22 - 1.96\times\dfrac{2.5}{\sqrt{100}} = 21.51 \\ \bar{X} > \mu + 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 22 + 1.96\times\dfrac{2.5}{\sqrt{100}} = 22.49 \end{cases}$$

標準正規分布：両側5%棄却域



帰無仮説は棄却されない

結論：肥満の程度に問題があるとはいえない

ただし，「問題がない」とまではいえない

母数に関する仮説検定

- 母平均の検定〔t検定〕（母分散が未知の場合）
  - 例：酒屋の不正疑惑

ある酒屋では酒の量をごまかして売っているという噂があったので実際に1合(=180cc)のお酒を5本買って調べてみた．

酒量(cc)	175	180	165	170	170

標本平均値は172.0cc であり，180ccより8ccも少ないが，果たしてこの店は不当表示で訴えられるか？ 〔出展：『なるほど統計学』p.125〕

〔帰無仮説〕母平均 μ ＝180

〔対立仮説〕母平均 μ ＜180

とし，有意水準5%で左片側検定．

$$\bar{X} \to T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}}$$

確率変数Tは自由度n-1のt分布t_{α}(n-1) に従う

母数に関する仮説検定

- 母平均の検定〔t検定〕（母分散が未知の場合）
  - 例：酒屋の不正疑惑

有意水準5%の棄却域を表す不等式

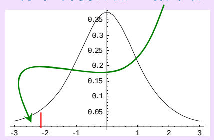
$$T < -2.132$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}} < -2.132$$

$$\Leftrightarrow \bar{X} < \mu - 2.132\frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow \bar{X} < 180.0 - 2.132\frac{5.099}{\sqrt{5-1}} = 174.6$$

t分布：片側(下側)5%棄却域



よって，

$$172.0 < 174.6$$

より，帰無仮説 H_0は棄却される．

この酒屋は酒量をごまかしているらしい…

母数に関する仮説検定

- 母平均の検定〔t検定〕（母分散が未知の場合）
  - 演習1：空調システムの作動状況検査

設定温度を25℃とし，7日間室内温度測定し，このシステムが正しく動いているかどうか5%有意水準で両側検定

24.2	25.3	26.2	25.7	24.4	25.1	25.6

〔出展：『統計学入門』p.241〕

〔帰無仮説〕$\mu = 25.0$

〔対立仮説〕$\mu \neq 25.0$

$$|T| > t_{\alpha/2}(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}}\right| > t_{0.025}(6)$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{25.21-25.0}{0.662/\sqrt{7-1}}\right| > 2.447$$

$$\Leftrightarrow |0.793| \not> 2.447$$

有意水準5%で帰無仮説は棄却できない

この空調システムは正常に動いてるらしい．

母数に関する仮説検定

- 母平均の検定〔t検定〕（母分散が未知の場合）
  - 演習2：補習授業の効果測定

英語の補習を行った後の試験成績は上がったか？5%有意水準で効果を検定せよ．10名の対象学生に対する補習前後の得点差は下表

−1	3	4	5	3	0	7	4	2	−2

〔出展：『統計学入門』p.241〕

〔帰無仮説〕$\mu = 0$

〔対立仮説〕$\mu > 0$

$$T > t_{\alpha}(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}} > t_{0.05}(9)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2.5-0}{2.655/\sqrt{10-1}} = 2.825 > 1.833 = t_{0.05}(9)$$

有意水準5%で帰無仮説は棄却される

試験成績は上昇したらしい（補習の効果はあったらしい）

母数に関する仮説検定

- 母平均の検定〔t検定〕（母分散が未知の場合）
  - 演習3：今年の生徒は出来がよいか？

数学の定期試験で10人の採点を終えた所，平均が71点で昨年度（65.7点）より5.3点も良い！今年の生徒は出来がよいのだろうか？ 5%有意水準で検定せよ．

70	62	82	73	67	75	85	71	60	65

〔出展：『図解雑学 統計解析』p.202〕

〔帰無仮説〕$\mu = 65.7$

〔対立仮説〕$\mu > 65.7$

$$T > t_{\alpha}(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}} > t_{0.05}(9)$$

$$\Leftrightarrow \frac{71.0-65.7}{7.694/\sqrt{10-1}} = 2.067 > 1.833 = t_{0.05}(9)$$

有意水準5%で帰無仮説は棄却される

今年の生徒は昨年度よりも出来が良いらしい．

母数に関する仮説検定

- 母分散の検定〔χ^2検定〕
  - 例：製品のばらつき検査

目標重量25kgの製品の重量のばらつきが大きいことがわかり修理した．修理後の製品を無作為抽出した結果が以下．修理前の分散が9kg²のとき，この製品は性能が向上したといえるか？

24　26　27　22　26

〔出展：『なるほど統計学』p.132〕

修理後は性能が向上したと考えられる
⇒ 分散は小さくなったはず
⇒ 片側（下側）検定

$$S^2 \to \chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2}$$

〔帰無仮説〕$\sigma^2=9$
〔対立仮説〕$\sigma^2<9$

確率変数χ^2は自由度n-1のχ^2分布に従う

母数に関する仮説検定

- 母分散の検定〔χ^2検定〕
  - 例：製品のばらつき検査

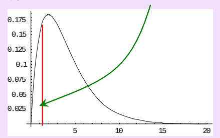
有意水準5%の棄却域を表す不等式

$$\chi^2 < 1.064$$

$$\Leftrightarrow \frac{nS^2}{\sigma^2} < 1.064$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\times 3.2}{9} = 1.78 \not< 1.064$$

χ^2分布：片側(下側)5%棄却域



有意水準5%で帰無仮説は棄却できない

この製造機械が修理後によくなったと結論できない．

母数に関する仮説検定

- 母分散の検定〔χ^2検定〕
  - 演習：小学校の知能テスト

ある小学校の入学時知能テストの結果は平均50，分散36だった．本年度入学児童25名を無作為抽出したところ平均53，分散48だった．本年度入学児の揃い方は例年と違うか？

〔出展：『統計学入門』p.242〕

〔帰無仮説〕$\sigma^2=36$
〔対立仮説〕$\sigma^2\neq 36$

有意水準10%棄却域

$$\begin{cases} \chi^2 \le \chi^2_{0.95}(24) = 13.848, \\ \chi^2 \ge \chi^2_{0.05}(24) = 36.415 \end{cases}$$

$$\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{25\times 48}{36} = 33.33\cdots$$

有意水準10%で帰無仮説は棄却できない

今年度入学児童が例年と違うとはいえない．

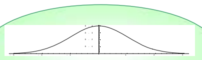
2標本検定 two-sample test

- **母平均の差**の検定
  - 2つの正規母集団について母平均の差の検定
    - 母分散が既知の場合 → Z 検定
    - 母分散が未知だが等しい場合 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma$ → t 検定
    - 母分散が未知で等しくない場合 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ → ウェルチの検定
- **母分散の比**の検定
  - 2つの正規母集団について母分散の比の検定 → F 検定

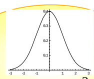
2標本検定 two-sample test

2つの母平均に「差がある」か「ない」かの検定

- **母平均の差**の検定
  - 2つの正規母集団について母平均の差の検定



$N(\mu_1,\sigma_1^2)$



$N(\mu_2,\sigma_2^2)$

m個 無作為抽出 $X_1,X_2\cdots,X_m$

n個 無作為抽出 $Y_1,Y_2\cdots,Y_n$

標本平均: $\bar{X}\sim N(\mu_1,\sigma_1^2/m)$　　標本平均: $\bar{Y}\sim N(\mu_2,\sigma_2^2/n)$

両側検定の場合
〔帰無仮説〕 $\mu_1=\mu_2$ ←2つの正規母集団の母平均に差がない
〔対立仮説〕 $\mu_1\neq\mu_2$ ←2つの正規母集団の母平均に差がある

片側検定の場合
〔帰無仮説〕 $\mu_1=\mu_2$ ←2つの正規母集団の母平均に差がない
〔対立仮説〕 $\mu_1>\mu_2$ (or $\mu_1<\mu_2$) ←2つの正規母集団の母平均に差がある

2標本検定 two-sample test

- **母平均の差**の検定
  - 2標本の標本平均の差の標本分布

$$\begin{cases}\bar{X}\sim N(\mu_1,\sigma_1^2/m)\\ \bar{Y}\sim N(\mu_2,\sigma_2^2/n)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}E(\bar{X}-\bar{Y})=E(\bar{X})-E(\bar{Y})=\mu_1-\mu_2\\ V(\bar{X}-\bar{Y})=V(\bar{X})+(-1)^2V(\bar{Y})=V(\bar{X})+V(\bar{Y})=\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n})$$

  - この検定の例：医薬の効果の検証
    - 患者を新薬を使った治療を行うグループ（処理群）とそれ以外（対照群）に分け，グループで結果に差があるかどうか（新薬の効果があるかどうか）を検定する．

2標本検定 two-sample test

- 母平均の差の検定（母分散が既知のとき）
  - 標本平均の差の標本分布

Z検定

$$Z=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}\sim N(0,1)$$

2標本検定 two-sample test

- 母平均の差の検定（母分散が未知だが等しい $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma$）
  - 標本平均の差の標本分布

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})\sigma^2)$$

  - 合併分散 pooled variance

$$s^2=\frac{(m-1)s_1^2+(n-1)s_2^2}{m+n-2}$$

ただし， s_1^2, s_2^2 は不偏推定量

$$\begin{cases} s_1^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X-\bar{X})^2, \\ s_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(Y-\bar{Y})^2 \end{cases}$$

  - 補足:『合併分散は不偏推定量である』

$$\left(\begin{aligned} \because) E(s^2)=E\left(\frac{(m-1)s_1^2+(n-1)s_2^2}{m+n-2}\right)&=\frac{(m-1)E(s_1^2)+(n-1)E(s_2^2)}{m+n-2} \\ &=\frac{(m-1)\sigma^2+(n-1)\sigma^2}{m+n-2}=\sigma^2 \end{aligned}\right)$$

2標本検定 two-sample test

- 母平均の差の検定（母分散が未知だが等しい $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma$）

$$\begin{cases} Z=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{1/m+1/n}}\sim \mathrm{N}(0,1), \\ \chi^2=\frac{(m+n-2)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m+n-2) \end{cases}$$

（ただし，Zとχ^2は独立）

$$\Rightarrow\ T=\frac{Z}{\sqrt{\chi^2/m+n-2}}$$

$$=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{1/m+1/n}}\Bigg/\sqrt{\frac{s^2}{\sigma^2}}$$

$$=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{s\sqrt{1/m+1/n}}\sim t_\alpha(m+n-2)$$

t検定

2標本検定 two-sample test

- **母平均の差の検定**（母分散が未知だが等しい $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma$）
  - 例：苗木の生長における2社の肥料の違い
    ある苗木の生長について2社の肥料に違いがあるか？

A社の肥料	24.3	25.2	20.4	26.1	22.1	23.4	24.2	20.9	24.7	23.7	21.6	23.4	20.2
B社の肥料	21.3	19.4	22.3	17.2	18.3	20.3	21.4	23.6	21.1	21.3	20.3	19.5	

標本平均値＝ A社の肥料 23.092 / B社の肥料 20.500　不偏分散値＝ A社の肥料 3.579 / B社の肥料 3.029

⇨ 5％有意水準で両側検定
（〔帰無仮説〕$\mu_1=\mu_2$〔対立仮説〕$\mu_1\neq\mu_2$）

$$s^2=\frac{(m-1)s_1^2+(n-1)s_2^2}{m+n-2}=\frac{12\times3.579+11\times3.029}{13+12-2}=3.316$$

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{s\sqrt{1/m+1/n}}=\frac{4.500-5.389}{1.821\sqrt{1/13+1/12}}=3.556$$

*t*検定

$T=3.556>2.069=t_{0.025}(23)$ より，仮説を棄却

2標本検定 two-sample test

- **母平均の差の検定**（母分散が未知で等しくない $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$）
  - 標本平均の差の標本分布
    - どのように工夫しても，2つの母分散に拠らない統計量を作れない
      ↓
    - 標本平均の差の正確な分布を求められない
      ↓
    - 近似的に分布を求める〔ウェルチの近似法〕

ウェルチの検定

$$\hat{T}=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{s_1^2/m+s_2^2/n}}\sim t_\alpha(\nu^*)$$

ただし，ν^*は$\nu=\dfrac{\left(s_1^2/m+s_2^2/n\right)^2}{\dfrac{\left(s_1^2/m\right)^2}{m-1}+\dfrac{\left(s_2^2/n\right)^2}{n-1}}$に最も近い整数

2標本検定 two-sample test

- **母平均の差の検定**（母分散が未知で等しくない $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$）
  - 例：2つの鉱山から採れる鉱石に含まれる物質の含有量
    各鉱山から採れる鉱石の物質含有量に差があるか？

〔出展：『パソコンによるデータマイニング』p.132〕

第1鉱区	4.9	3.9	4.7	4.3	5.8	4.2	4.4	3.3	5.5	4.0
第2鉱区	5.2	5.0	5.3	6.9	5.0	4.9	4.4	6.5	5.3	

標本平均値＝ 第1鉱区 4.500 / 第2鉱区 5.389　不偏分散値＝ 第1鉱区 0.564 / 第2鉱区 0.636

⇨ 5％有意水準で両側検定
（〔帰無仮説〕$\mu_1=\mu_2$〔対立仮説〕$\mu_1\neq\mu_2$）

ウェルチの検定

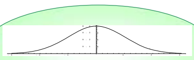
$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{s_1^2/m+s_2^2/n}}=\frac{4.500-5.389}{\sqrt{0.564/10+0.636/9}}=-2.493$$

$\nu=\dfrac{\left(s_1^2/m+s_2^2/n\right)^2}{\dfrac{\left(s_1^2/m\right)^2}{m-1}+\dfrac{\left(s_2^2/n\right)^2}{n-1}}=16.517$ より，自由度17のt分布を考える

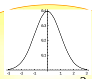
$T=-2.493<-2.110=-t_{0.025}(17)$ より，仮説を棄却

2標本検定 two-sample test

- <u>母分散の比</u>の検定〔F検定〕
  - 2つの正規母集団について母分散の比の検定



$N(\mu_1,\sigma_1^2)$



$N(\mu_2,\sigma_2^2)$

m個 無作為抽出 $X_1, X_2 \cdots, X_m$

$$\chi_1^2 = \frac{mS_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(m-1)$$

n個 無作為抽出 $Y_1, Y_2 \cdots, Y_n$

$$\chi_2^2 = \frac{nS_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n-1)$$

両側検定の場合
〔帰無仮説〕$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ←2つの正規母集団の母分散に差がない
〔対立仮説〕$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ←2つの正規母集団の母分散に差がある

片側検定の場合
〔帰無仮説〕$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ←2つの正規母集団の母分散に差がない
〔対立仮説〕$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ←2つの正規母集団の母分散に差がある
$(or\ \ \sigma_1^2 < \sigma_2^2)$

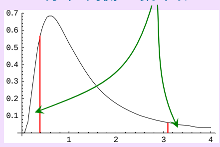
2標本検定 two-sample test

- <u>母分散の比</u>の検定〔F検定〕
  - F分布とフィッシャーの分散比

$$\begin{cases} \chi_1^2 = \dfrac{mS_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(m-1), \\ \chi_2^2 = \dfrac{nS_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n-1) \end{cases}$$

(ただしχ_1^2とχ_2^2は独立)

F分布：両側5%棄却域



$$F = \frac{\chi_1^2 / m-1}{\chi_2^2 / n-1} = \frac{mS_1^2 / (m-1)\sigma_1^2}{nS_2^2 / (n-1)\sigma_2^2}$$

$$= \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad \sim F(m-1, n-1)$$

フィッシャーの分散比

自由度(m-1, n-1)のF分布に従う

2標本検定 two-sample test

- <u>母分散の比</u>の検定〔F検定〕
  - 例題：2つの工作機械の製品バラツキ検査

機械Ⅰ	100.46	100.35	100.36	100.48	100.39	100.72	100.42	100.68	100.86
	100.57	100.59	100.46	100.32	100.46	100.72	100.62		
機械Ⅱ	100.33	100.12	100.35	100.89	100.90	100.31	100.46	100.12	100.43
	100.88	100.28	100.08	100.42	100.11	100.16	100.71	100.26	100.18

不偏分散値＝ 機械Ⅰ 0.02475
機械Ⅱ 0.07752

5%有意水準で両側検定
(〔帰無仮説〕$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, 〔対立仮説〕$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)

$$F = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1 \cdot \frac{0.02475}{0.07752} = 0.319$$

$$\wedge$$

$$F_{0.975}(15,17) = \frac{1}{F_{0.025}(17,15)} = \frac{1}{2.723} = 0.367$$

より，仮説は棄却される

2標本検定 two-sample test

- 母分散の比の検定〔F検定〕
  - F分布表からのF値の求め方

F分布表はαが通常「0.1,0.05,0.25,0.01,0.005」のときの表のみ表示されていて，下側(左側)パーセント点は表示されていない．そこで…

$$F_{1-\alpha}(m,n) = \frac{1}{F_{\alpha}(n,m)}$$

であることを利用して求める．

  - 例：自由度(10,13)のF分布の下側(左側)5%点

$$F_{0.95}(10,13) = \frac{1}{F_{0.05}(13,10)} = \frac{1}{2.671} = 0.374$$

適合度検定

- 適合度のχ^2検定〔χ^2-test of goodness of fit〕

仮定された理論上の確率分布に対し，標本から求められた度数が適合するか否かを検証する．

例：さいころ投げ

さいころを300回投げると理論上は1～6の目が50回ずつ出る（さいころの目は一様分布となる）．実際に300回投げると…

賽の目	1	2	3	4	5	6	合計
観測度数	47	52	46	53	47	55	300

〔帰無仮説〕さいころの目の出方に偏りがない(一様分布に従う)
〔対立仮説〕さいころの目の出方に偏りがある(一様分布に従わない)

適合度検定：
母集団分布の従う確率分布について立てた帰無仮説を検証する

適合度検定

- 適合度の測定

例：さいころ投げ
〔帰無仮説〕さいころの目の出方に偏りがない(一様分布に従う)
〔対立仮説〕さいころの目の出方に偏りがある(一様分布に従わない)

	賽の目	1	2	3	4	5	6	合計
f_i	観測度数	47	52	46	53	47	55	300 (n)
p_i	理論確率	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1
np_i	理論度数	50	50	50	50	50	50	300

k

K.Pearsonの適合度基準

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i}$$

（nが十分大きければ）自由度k-1のχ^2分布に従う

$f_1, f_2, \cdots, f_k$ はk個の確率変数だが，$f_1 + f_2 + \cdots + f_k \equiv n$ より，自由度は1つ減る

適合度検定

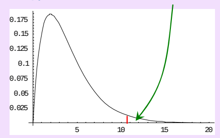
- 適合度の測定

例:さいころ投げ

有意水準5%棄却域を表す不等式

$$\chi^2 > \chi^2_\alpha(k-1) = \chi^2_{0.05}(5)$$

χ²分布:上側5%棄却域



$$\chi^2 = \frac{(47-50)^2}{50} + \frac{(52-50)^2}{50} + \cdots + \frac{(55-50)^2}{50}$$

$$= 1.44 > \chi^2_{0.05}(5) = 11.070 \times$$

より，棄却域にないので，帰無仮説は棄却できない

このさいころは、目の出方に偏りがない（一様分布に従う）といえるようだ

適合度検定

- 適合度の χ²検定〔χ²-test of goodness of fit〕

例:メンデルの法則〔えんどう豆の形質遺伝〕

表現型	黄色・丸い	黄色・しわ	緑色・丸い	緑色・しわ	計
観測度数	315	101	108	32	556
理論確率	9/16	3/16	3/16	1/16	1
理論度数	312.75	104.25	104.25	34.75	556
度数差	2.25	−3.25	3.75	−2.75	

〔出展:『統計学入門』p.245〕

〔帰無仮説〕 えんどう豆の表現型はメンデルの法則に適合している

〔対立仮説〕 えんどう豆の表現型はメンデルの法則に適合していない

$$\chi^2 = 0.470 > 7.815 = \chi^2_{0.05}(3) \times$$

より，5%有意水準の棄却域にないので，帰無仮説は棄却できない

えんどう豆の表現型はメンデルの法則に適合しているようだ

独立性の検定

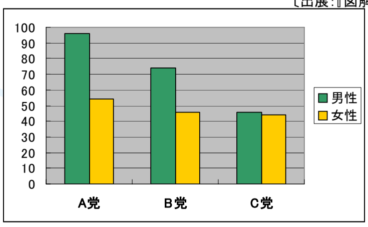
- 独立性の χ²検定〔χ²-test for independence〕

2つの属性の間に関係があるかどうかを検証する

例:支持政党に男女差があるか？

支持政党	A党	B党	C党	合計
男性	96	74	46	216
女性	54	46	44	144
合計	150	120	90	360

〔出展:『図解雑学 統計解析』p.224〕



支持政党に男女差があるか？

独立性の検定

- 独立性の測定

例：支持政党に男女差があるか？
〔帰無仮説〕支持政党に男女差がない ⇒ ともに全体比率に等しい
〔対立仮説〕支持政党に男女差がある

観測度数

支持政党	A党	B党	C党	合計
男性	96	74	46	216
女性	54	46	44	144
合計	150	120	90	360

f_{ij}　$f_{i\bullet}$　n

理論度数

支持政党	A党	B党	C党	合計
男性	90	72	54	216
女性	60	48	36	144
合計	150	120	90	360

$f_{\bullet j}$

この差を適合度検定

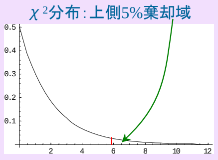
独立性の基準

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(f_{ij} - f_{i\bullet}f_{\bullet j}/n)^2}{f_{i\bullet}f_{\bullet j}/n}$$

（nが十分大きければ）
自由度(r-1)(c-1)の
χ²分布に従う

独立性の検定

χ²分布：上側5%棄却域



- 独立性の測定

例：支持政党に男女差があるか？
有意水準5％棄却域を表す不等式

$$\chi^2 > \chi^2_\alpha((r-1)(c-1))$$

$$\chi^2 = \frac{(96-90)^2}{90} + \frac{(74-72)^2}{72} + \cdots + \frac{(44-36)^2}{36}$$

$$= 4.102 > \chi^2_{0.05}(2) = 5.991$$ ✕

より，棄却域にないので，帰無仮説は棄却できない

支持政党に男女間の差があるとはいえない

独立性の検定

- 独立性の χ²検定〔χ²-test for independence〕

演習：某工学部の期末試験成績：代数と解析の成績に関係があるか？
〔出展：『統計学入門』p.248〕

観測度数

代数＼解析	A	B	C	合計
A	4	2	3	9
B	8	4	6	18
C	6	3	6	15
合計	18	9	15	42

理論度数

代数＼解析	A	B	C	合計
A	3.86	1.93	3.21	9
B	7.71	3.86	6.43	18
C	6.43	3.21	5.36	15
合計	18	9	15	42

〔帰無仮説〕 代数と解析の成績に関係がない
〔対立仮説〕 代数と解析の成績に関係がある

$$\chi^2 = 0.19 > 9.488 = \chi^2_{0.05}(4)$$ ✕

より，5％有意水準の棄却域にないので，帰無仮説は棄却できない

代数と解析の成績には関係があるとはいえない

適合度検定・独立性の検定

- 演習1：サイコロの目の出方に偏りがあるか？　有意水準5%で検定せよ.

賽の目	⚀⚁	⚂⚃	⚄⚅
観測度数	40	65	45

- 演習2：コーヒーの嗜好に違いがあるか？　有意水準5%で検定せよ.

モカ＼キリマンジャロ	大好き	好き	嫌い	大嫌い	計
大好き	8	5	6	9	28
好き	8	5	9	5	27
嫌い	2	8	1	2	13
大嫌い	2	7	3	0	12
計	20	25	19	16	80

参考文献

- 東大教養学部統計学教室編 「統計学入門」東大出版会（1991）
- 東大教養学部統計学教室編 「自然科学の統計学」東大出版会（1992）
- 鈴木達三・高橋宏一「標本抽出の計画と方法」放送大学（1991）
- 永田靖「サンプルサイズの決め方」朝倉書店（2003）
- 村上雅人「なるほど統計学」海鳴社（2002）
- 丹慶勝市「図解雑学 統計解析」ナツメ社（2003）
- 高橋信[著]・トレンドプロ[マンガ]「マンガでわかる統計学」オーム社（2004）