

データ分布と予測

需要予測

一時系列分析と回帰分析

堀田敬介
2007/1/19,Fri.

需要予測

Contents

○ 需要予測

- 需要予測とは？
- 予測誤差と正確性の測定法

○ 時系列分析

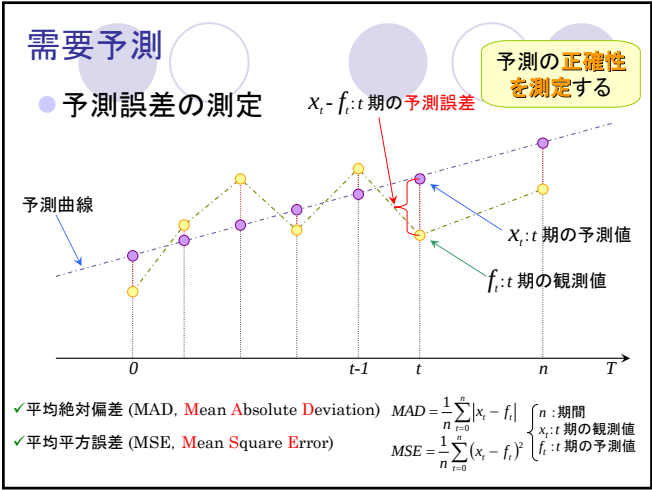
- 4種類の変動要素
- 傾向変動の分析: 傾向曲線の種類, 移動平均, 指数平滑
- 循環変動の分析:
- 季節変動の分析: 期別平均法, 対移動平均比率法

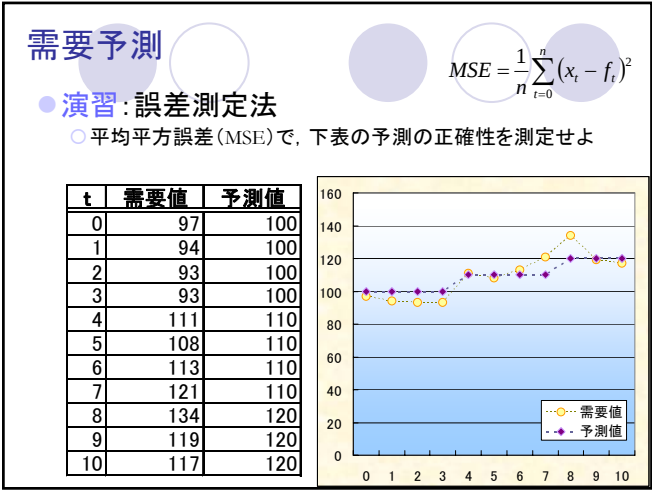
○ 回帰分析

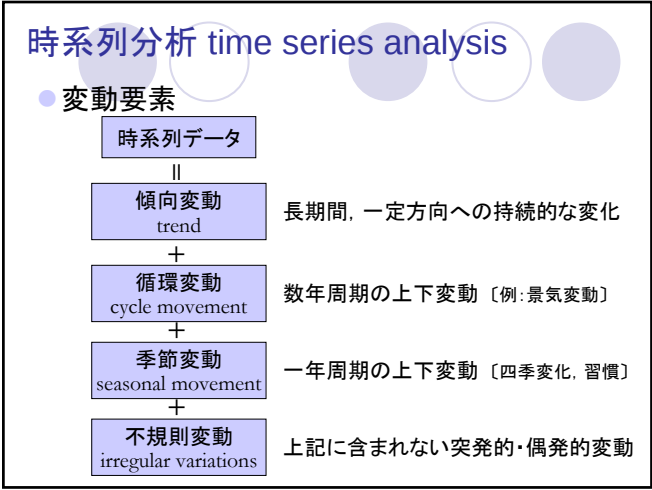
- 最小二乗法
- モデルの適合度: 決定係数, 分散分析とt検定

需要予測

● 需要予測とは？

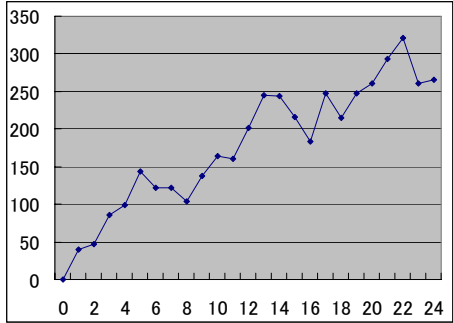




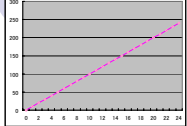
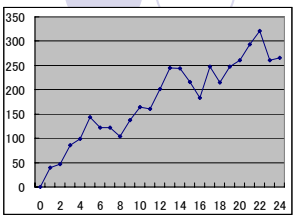


時系列分析

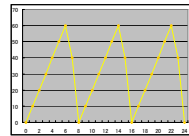
- 変動要素
 - 例：四半期ごとの6年間のある需要値



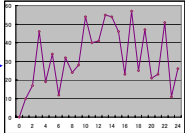
時系列分析



傾向変動

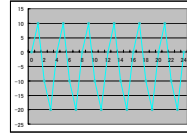


循環変動



予測不能？

不規則変動



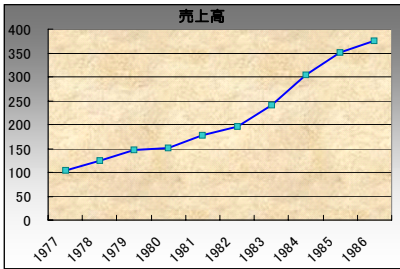
季節変動

予測可能？

時系列分析

- 傾向変動の分析
 - 移動平均法

年次	売上高
1977	104
1978	124
1979	146
1980	152
1981	177
1982	196
1983	240
1984	304
1985	352
1986	376



時系列分析

● 傾向変動の分析

○ 移動平均法による傾向線

$$141 = \frac{104 + 124 + 146 + 152 + 177}{5}$$

年次	売上高	移動平均値
1977	104	
1978	124	
1979	146	141
1980	152	159
1981	177	182
1982	196	214
1983	240	254
1984	304	294
1985	352	
1986	376	

売上高

時系列データから部分的な不規則性を排除し、全体的な傾向をみる

時系列分析

● 傾向変動の分析

○ 移動平均法による予測

事前の数個の平均を当期の予測値とする

年次	売上高	移動平均値	予測誤差	誤差二乗
1977	104			
1978	124			
1979	146			
1980	152	125	27	747
1981	177	141	36	1320
1982	196	158	38	1419
1983	240	175	65	4225
1984	304	204	100	9933
1985	352	247	105	11095
1986	376	299	77	5980

$$125 = \frac{104 + 124 + 146}{3}$$

MSE= 4960

時系列分析

● 演習: 移動平均法による予測

移動平均法により、売上高の3期移動平均、5期移動平均による予測値を求め、誤差を計算せよ。

期	売上高	3期	5期	誤差	誤差
1	11,800				
2	10,404				
3	8,925				
4	10,600	10,376		224	
5	12,285	9,976		2,309	
6	11,009	10,603	10,803	406	206
7	9,213	11,298	10,645	-2,085	-1,432
8	11,286	10,836	10,406	450	880
9	13,350	10,503	10,879	2,847	2,471
10	11,270	11,283	11,429	-13	-159
11	10,266	11,969	11,226	-1,703	-960
12	12,138	11,629	11,077	509	1,061

時系列分析

- 傾向変動の分析
 - 指数平滑法
$$y_{i+1} = \alpha d_i + (1 - \alpha)y_i$$

平滑化定数

1959 R.G.ブラウン(米)
当期の需要が前期の
需要に強く影響を受け
るときに用いる

★ 平滑化定数は0.3前後
★ 初期の予測値は
過去のデータの平均など

次期予測値 当期需要 当期予測値

期	売上高	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.4$	誤差	誤差	誤差
1	210	196.2	196.2	196.2	13.80	13.80	13.80
2	206	199.0	200.3	201.7	7.04	5.66	4.28
3	181	200.4	202.0	203.4	-19.37	-21.04	-22.43
4	201	196.5	195.7	194.5	4.51	5.27	6.54
5	192	197.4	197.3	197.1	-5.40	-5.31	-5.08
6	186	196.3	195.7	195.0	-10.32	-9.72	-9.05
7	190	194.3	192.8	191.4	-4.25	-2.80	-1.43
8	208	193.4	192.0	190.9	14.60	16.04	17.14
9	190	196.3	196.8	197.7	-6.32	-6.77	-7.71
10	220	195.1	194.7	194.6	24.94	25.26	25.37
11	223	200.0	202.3	204.8	22.95	20.68	18.22
12	175	204.6	208.5	212.1	-29.64	-33.52	-37.07

MSE	
$\alpha = 0.2$	255.79
$\alpha = 0.3$	276.33
$\alpha = 0.4$	297.29

時系列分析

- 演習: 指数平滑法

次の時系列需要データについて、平滑化定数 $\alpha = 0.2$ および 0.3 として指数平滑法で予測値を求め、誤差評価せよ。ただし、初期予測値は 147.6 とせよ。

期	売上高	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.3$	誤差	誤差
1	150	147.6	147.6	2.40	2.40
2	160	148.1	148.3	11.92	11.68
3	145	150.5	151.8	-5.46	-6.82
4	155	149.4	149.8	5.63	5.22
5	165	150.5	151.3	14.50	13.66
6	150	153.4	155.4	-3.40	-5.44
7	170	152.7	153.8	17.28	16.19
8	175	156.2	158.7	18.83	16.33

MSE	
$\alpha = 0.2$	135.54
$\alpha = 0.3$	120.14

時系列分析

- 季節変動の分析

時系列データに季節調整を施し、季節調整データをつくる。

時系列データ → 季節調整 → 季節調整データ

季節変動を含む 季節変動を含まない

- 季節調整法
 - 期別平均法
 - 対移動平均比率法
 - ...

時系列分析

- 季節変動の分析
 - 期別平均法による季節調整

年次	季節	売上高
1	春	96
1	夏	116
1	秋	106
1	冬	157
2	春	115
2	夏	134
2	秋	126
2	冬	180
3	春	148
3	夏	162
3	秋	153
3	冬	204
4	春	162
4	夏	185
4	秋	171
4	冬	224

春夏秋冬で2次元に並べ替え

年次\季節	春	夏	秋	冬
元 1	96	116	106	157
2	115	134	126	180
3	148	162	153	204
4	162	185	171	224

時系列分析

- 季節変動の分析
 - 期別平均法による季節調整

$$\begin{cases} M_i = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l d_{ij}, \\ S_i = M_i / \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k M_i, \\ \hat{d}_{ij} = \frac{d_{ij}}{S_i} \end{cases}$$

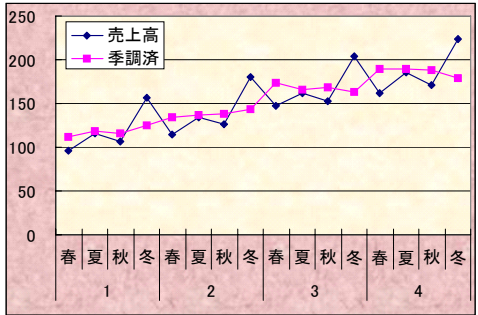
d_{ij} $i = 1, 2, \dots, k$ $j = 1, \dots, l$

年次\季節	春	夏	秋	冬
元 1	96	116	106	157
2	115	134	126	180
3	148	162	153	204
4	162	185	171	224
季毎合計				
	521	597	556	765
季毎平均				
	130.3	149.3	139.0	191.3
季節指数				
	0.854	0.979	0.912	1.255
季調済 1	112.4	118.5	116.2	125.1
2	134.6	136.9	138.2	143.5
3	173.2	165.5	167.8	162.6
4	189.6	189	187.5	178.5

M_i S_i $\hat{d}_{ij}$

時系列分析

- 季節変動の分析
 - 期別平均法による季節調整

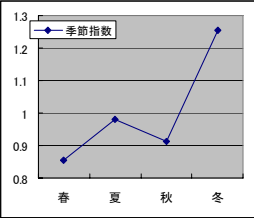


時系列分析

● 季節変動の分析

○ 期別平均法

による季節調整



年次\季節	春	夏	秋	冬
元	96	116	106	157
2	115	134	126	180
3	148	162	153	204
4	162	185	171	224

II

季節	1	2	3	4
季調済み	112.4	118.5	116.2	125.1
2	134.6	136.9	138.2	143.5
3	173.2	165.5	167.8	162.6
4	189.6	189	187.5	178.5

+

季節変動	1	2	3	4
1	-16.4	-2.5	-10.2	31.9
2	-19.6	-2.9	-12.2	36.5
3	-25.2	-3.5	-14.8	41.4
4	-27.6	-4.0	-16.5	45.5

時系列分析

● 季節変動の分析

○ 対移動平均比率法による季節調整

年次	季節	売上高	4項移動平均	2項移動平均
1	春	96		
	夏	116		
	秋	106	118.75	121.13
	冬	157	123.50	125.75
2	春	115	128.00	130.50
	夏	134	133.00	135.88
	秋	126	138.75	142.88
	冬	180	147.00	150.50
3	春	148	154.00	157.38
	夏	162	160.75	163.75
	秋	153	166.75	168.50
	冬	204	170.25	173.13
4	春	162	176.00	178.25
	夏	185	180.50	183.00
	秋	171	185.50	
	冬	224		

春夏秋冬で2次元に並べ替え

年次\季節	春	夏	秋	冬
元	96	116	106	157
2	115	134	126	180
3	148	162	153	204
4	162	185	171	224
2項移動平均			121.1	125.8
2	130.5	135.9	142.9	150.5
3	157.4	163.8	168.5	173.1
4	178.3	183.0		

時系列分析

○ 対移動平均比率法

年次\季節	春	夏	秋	冬
元	96	116	106	157
2	115	134	126	180
3	148	162	153	204
4	162	185	171	224
2項移動平均			121.1	125.8
2	130.5	135.9	142.9	150.5
3	157.4	163.8	168.5	173.1
4	178.3	183.0		
対移動平均比率			0.875	1.249
5			0.881	1.196
6	0.881	0.986	0.882	1.178
7	0.940	0.989	0.908	1.178
8	0.909	1.011		
季毎平均	0.910	0.995	0.888	1.208
季節指数	0.910	0.995	0.888	1.207
季調済み	105.5	116.6	119.4	130.1
2	126.4	134.7	141.9	149.1
3	162.7	162.8	172.3	169.0
4	178.1	185.9	192.6	185.6

d_{ij}

M_i

S_i

$\hat{d}_{ij}$

対移動平均比率
= 元 / 2項移動平均

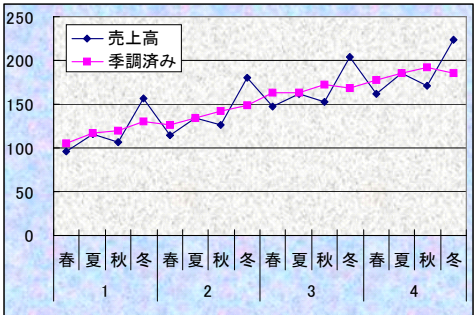
季毎平均 M_i
= 対移動平均比率の
季節毎平均

季節指数 S_i
= M_i / M_i の平均

季調済み
= 元 / 季節指数

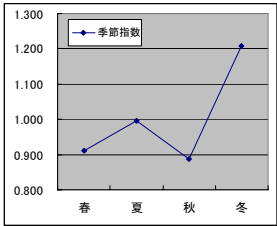
時系列分析

- 季節変動の分析
 - 対移動平均比率法による季節調整



時系列分析

- 季節変動の分析
 - 対移動平均比率法による季節調整



年次\季節	春	夏	秋	冬
元 1	96	116	106	157
2	115	134	126	180
3	148	162	153	204
4	162	185	171	224

II

季調済み	1	105.5	116.6	119.4	130.1
	2	126.4	134.7	141.9	149.1
	3	162.7	162.8	172.3	169.0
	4	178.1	185.9	192.6	185.6

+

季節変動	1	-9.5	-0.6	-13.4	26.9
	2	-11.4	-0.7	-15.9	30.9
	3	-14.7	-0.8	-19.3	35.0
	4	-16.1	-0.9	-21.6	38.4

時系列分析

- 演習: 季節変動の分析
- 右の5年間、四半期ごと
時系列データについて、
期別平均法、および
対移動平均比率法による
季節調整を行え

年次	季節	売上高
1	春	31
	夏	26
	秋	28
	冬	35
2	春	33
	夏	28
	秋	31
	冬	37
3	春	34
	夏	30
	秋	33
	冬	43
4	春	38
	夏	32
	秋	40
	冬	45
5	春	39
	夏	35
	秋	47
	冬	49

時系列分析

● 循環変動の分析

回帰直線による理論値など

循環変動
= 元 / 傾向変動 × 100

t	元	傾向変動	循環変動
1985	103.17	105.0	98.3
1986	101.42	106.4	95.3
1987	111.46	107.9	103.3
1988	113.49	109.3	103.8
1989	117.26	110.8	105.9
1990	116.34	112.2	103.7
1991	111.21	113.7	97.8
1992	112.19	115.1	97.4
1993	115.23	116.6	98.8
1994	110.97	118.1	94.0
1995	123.72	119.5	103.5
1996	128.26	121.0	106.0
1997	114.88	122.4	93.8
1998	113.76	123.9	91.8
1999	122.41	125.3	97.7
2000	126.57	126.8	99.8
2001	135.52	128.2	105.7
2002	138.33	129.7	106.7
2003	124.47	131.1	94.9
2004	129.99	132.6	98.0
2005	138.95	134.0	103.7

時系列分析

● 傾向変動の分析

○ 傾向曲線の種類 I

● 多項式

一次関数

二次関数

指数

指数関数

一次関数

$y = ax + b$

二次関数

$y = ax^2 + bx + c$

指数関数

$y = a \cdot b^x (b > 1)$

指数関数

$y = a \cdot b^x (0 < b < 1)$

指数関数

$y = K - a \cdot b^x$

時系列分析

● 傾向変動の分析

○ 傾向曲線の種類 II

● 成長曲線

ゴンベルツ曲線 Gompertz curve

ロジスティック曲線 Logistic curve

ゴンベルツ曲線

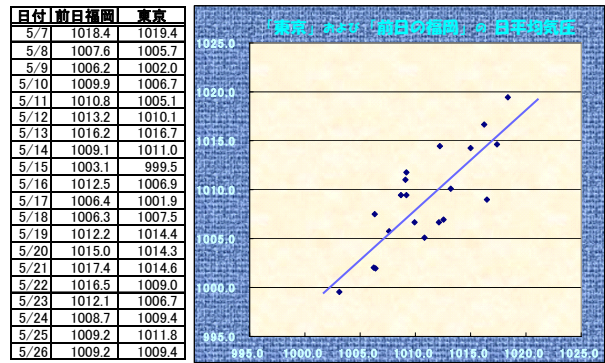
$y = K \cdot a^{b^x}$

ロジスティック曲線

$y = \frac{K}{1 + e^{-bx}}$

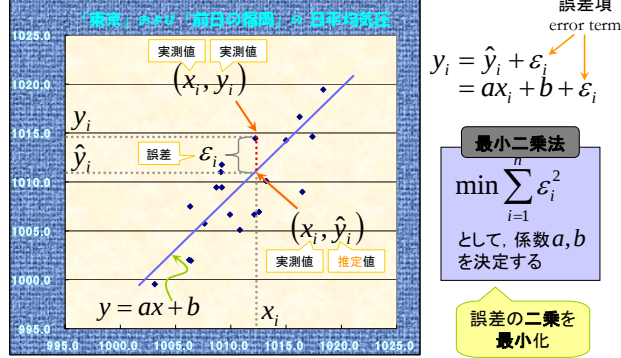
回帰分析 regression analysis

● 回帰分析とは？



回帰分析 regression analysis

● 最小二乗法



回帰分析 regression analysis

● 最小二乗法

$y_i = \hat{y}_i + \epsilon_i = ax_i + b + \epsilon_i$

↑ ↑ ↑

実測値 推定値 誤差

★ 誤差項の二乗和を最小化して得られる、 a, b の最小二乗推定量 $\hat{a}, \hat{b}$

$$\begin{cases} \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \\ \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \cdot \bar{x} \end{cases}$$

回帰分析 regression analysis

● 参考: 最小二乗推定値の導出

$$\min \sum_i \varepsilon_i^2 = \sum_i (y_i - b - ax_i)^2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_i (y_i - b - ax_i) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_i (y_i - b - ax_i)x_i = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} nb + (\sum x_i)a = \sum y_i, \\ (\sum x_i)b + (\sum x_i^2)a = \sum x_i y_i \end{cases}$$

正規方程式
normal equation

この正規方程式を解くと、偏回帰係数 $\hat{a}, \hat{b}$ が得られる

回帰分析 regression analysis

● 最小二乗法

○ 例題の回帰方程式

$$\begin{cases} \hat{b} = 329.7 \div 335.6 = 0.9822, \\ \hat{a} = 1009.1 - 0.9822 \times 1011.0 = 16.09 \end{cases}$$
$$\Rightarrow y = 16.09 + 0.9822x$$
$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{b} - \hat{a} \cdot x_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

回帰残差
residual

誤差項の分散 $s^2 = \frac{1}{n-2} \sum \hat{\varepsilon}_i^2$
は回帰方程式の当てはまりのよさを表す
S: 推定値の標準誤差 standard error of estimates

n-2で割るのは推定時に自由度が2失われるから

回帰分析 regression analysis

● 最小二乗法

○ 例題: 東京と福岡前日の気圧の回帰分析

東京

前日福岡

回帰残差

前日福岡 残差グラフ

Confidential

11

参考文献

- 東京大学出版会「統計学入門」東京大学出版会
- 宮川公男ほか「入門経営科学」実教出版
- 荒木勉「Excelで学ぶ経営科学入門シリーズⅠー需要予測ー」実教出版
- 荒木勉ほか「Excelで学ぶ経営科学入門シリーズⅡーデータ解析ー」実教出版
- 浅利英吉ほか「パソコンによるデータマイニング」日刊工業新聞社
