

データ分布と予測

需要予測 — 時系列分析と回帰分析 —

堀田 敬介
2007/1/19, Fri.

需要予測

- Contents
 - 需要予測
 - 需要予測とは？
 - 予測誤差と正確性の測定法
 - 時系列分析
 - 4種類の変動要素
 - 傾向変動の分析: 傾向曲線の種類, 移動平均, 指数平滑
 - 循環変動の分析:
 - 季節変動の分析: 期別平均法, 対移動平均比率法
 - 回帰分析
 - 最小二乗法
 - モデルの適合度: 決定係数, 分散分析とt検定

需要予測

- 需要予測とは？

需要予測

- 予測誤差の測定

予測の**正確性**を測定する

$x_t - f_t$: t期の予測誤差
 x_t : t期の予測値
 f_t : t期の観測値

✓ 平均絶対偏差 (MAD, Mean Absolute Deviation) $MAD = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^n |x_t - f_t|$ $\left\{ \begin{array}{l} n: \text{期間} \\ x_t: t \text{ 期の観測値} \\ f_t: t \text{ 期の予測値} \end{array} \right.$
 ✓ 平均平方誤差 (MSE, Mean Square Error) $MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^n (x_t - f_t)^2$

需要予測

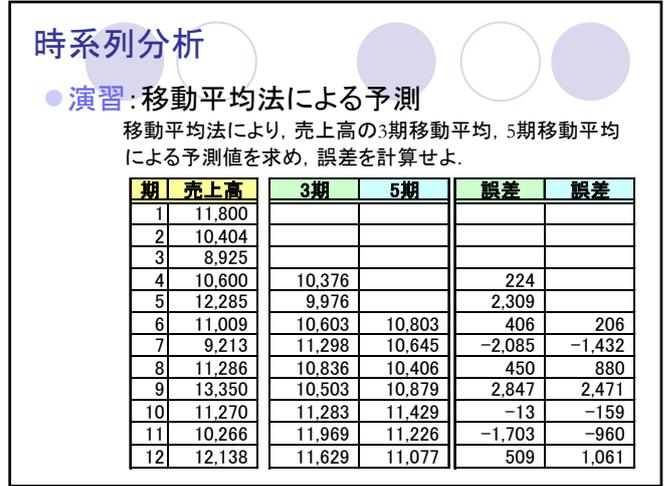
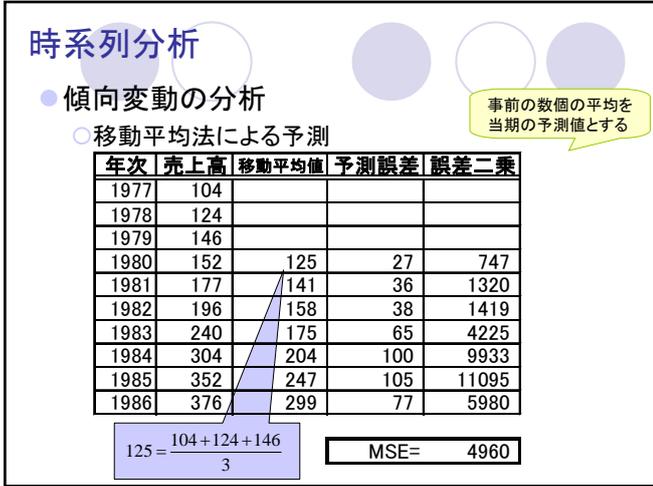
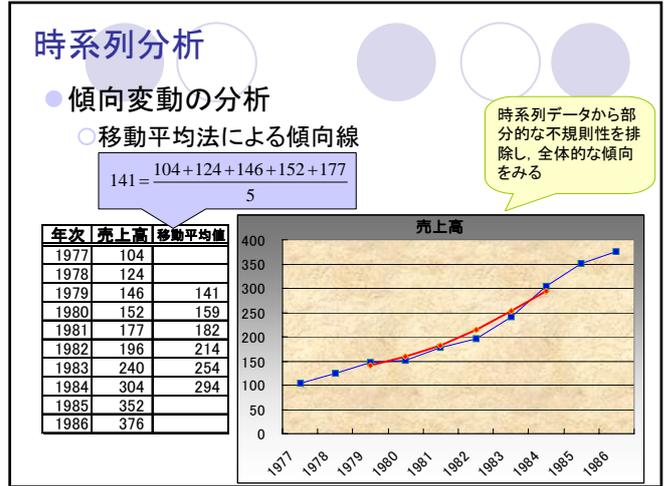
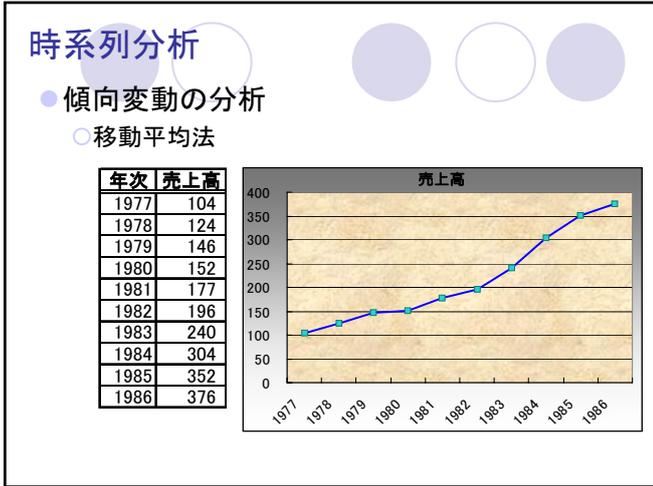
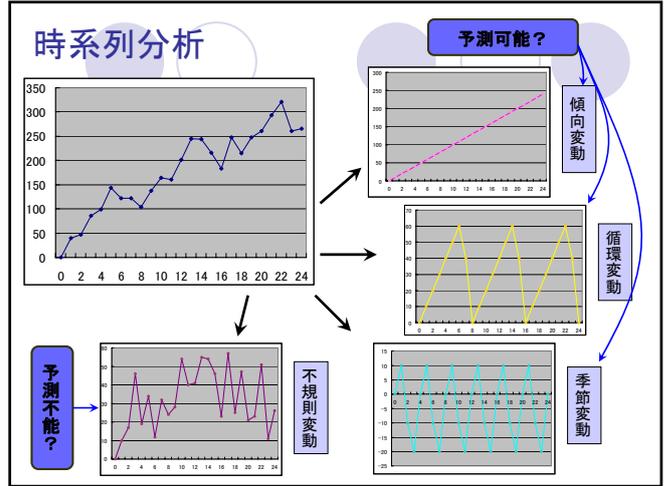
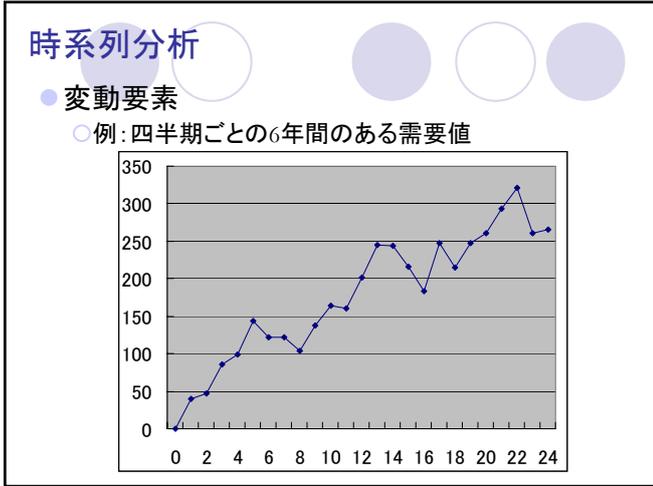
$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^n (x_t - f_t)^2$

- 演習: 誤差測定法
 - 平均平方誤差 (MSE) で, 下表の予測の正確性を測定せよ

| t | 需要値 | 予測値 |
|----|-----|-----|
| 0 | 97 | 100 |
| 1 | 94 | 100 |
| 2 | 93 | 100 |
| 3 | 93 | 100 |
| 4 | 111 | 110 |
| 5 | 108 | 110 |
| 6 | 113 | 110 |
| 7 | 121 | 110 |
| 8 | 134 | 120 |
| 9 | 119 | 120 |
| 10 | 117 | 120 |

時系列分析 time series analysis

- 変動要素
 - 時系列データ
 - ||
 - 傾向変動 trend: 長期間, 一定方向への持続的な変化
 - +
 - 循環変動 cycle movement: 数年周期の上下変動 [例: 景気変動]
 - +
 - 季節変動 seasonal movement: 一年周期の上下変動 [四季変化, 習慣]
 - +
 - 不規則変動 irregular variations: 上記に含まれない突発的・偶発的変動



時系列分析

- 傾向変動の分析
 - 指数平滑法

$$y_{i+1} = \alpha d_i + (1 - \alpha) y_i$$

平滑化定数

1959 R.G.ブラウン(米)
当期の需要が前期の需要に強く影響を受けるときに用いる

★ 平滑化定数は0.3前後
★ 初期の予測値は過去のデータの平均など

| 期 | 売上高 | $\alpha=0.2$ | $\alpha=0.3$ | $\alpha=0.4$ | 誤差 | 誤差 | 誤差 |
|----|-----|--------------|--------------|--------------|--------|--------|--------|
| 1 | 210 | 196.2 | 196.2 | 196.2 | 13.80 | 13.80 | 13.80 |
| 2 | 206 | 199.0 | 200.3 | 201.7 | 7.04 | 5.66 | 4.28 |
| 3 | 181 | 200.4 | 202.0 | 203.4 | -19.37 | -21.04 | -22.43 |
| 4 | 201 | 196.5 | 195.7 | 194.5 | 4.51 | 5.27 | 6.54 |
| 5 | 192 | 197.4 | 197.3 | 197.1 | -5.40 | -5.31 | -5.08 |
| 6 | 186 | 196.3 | 195.7 | 195.0 | -10.32 | -9.72 | -9.05 |
| 7 | 190 | 194.3 | 192.8 | 191.4 | -4.25 | -2.80 | -1.43 |
| 8 | 208 | 193.4 | 192.0 | 190.9 | 14.60 | 16.04 | 17.14 |
| 9 | 190 | 196.3 | 196.8 | 197.7 | -6.32 | -6.77 | -7.71 |
| 10 | 220 | 195.1 | 194.7 | 194.6 | 24.94 | 25.26 | 25.37 |
| 11 | 223 | 200.0 | 202.3 | 204.8 | 22.95 | 20.68 | 18.22 |
| 12 | 175 | 204.6 | 208.5 | 212.1 | -29.64 | -33.52 | -37.07 |

| MSE | |
|--------------|--------|
| $\alpha=0.2$ | 255.79 |
| $\alpha=0.3$ | 276.33 |
| $\alpha=0.4$ | 297.29 |

時系列分析

- 演習: 指数平滑法

次の時系列需要データについて、平滑化定数 $\alpha=0.2$ および 0.3 として指数平滑法で予測値を求め、誤差評価せよ。ただし、初期予測値は 147.6 とせよ。

| 期 | 売上高 | $\alpha=0.2$ | $\alpha=0.3$ | 誤差 | 誤差 |
|---|-----|--------------|--------------|-------|-------|
| 1 | 150 | 147.6 | 147.6 | 2.40 | 2.40 |
| 2 | 160 | 148.1 | 148.3 | 11.92 | 11.68 |
| 3 | 145 | 150.5 | 151.8 | -5.46 | -6.82 |
| 4 | 155 | 149.4 | 149.8 | 5.63 | 5.22 |
| 5 | 165 | 150.5 | 151.3 | 14.50 | 13.66 |
| 6 | 150 | 153.4 | 155.4 | -3.40 | -5.44 |
| 7 | 170 | 152.7 | 153.8 | 17.28 | 16.19 |
| 8 | 175 | 156.2 | 158.7 | 18.83 | 16.33 |

| MSE | |
|--------------|--------|
| $\alpha=0.2$ | 135.54 |
| $\alpha=0.3$ | 120.14 |

時系列分析

- 季節変動の分析

時系列データに季節調整を施し、季調済データをつくる。

時系列データ → 季節調整 → 季調済データ

季節変動を含む → 季節変動を含まない
- 季節調整法
 - 期別平均法
 - 対移動平均比率法
 - ...

時系列分析

- 季節変動の分析
 - 期別平均法による季節調整

| 年次 | 季節 | 売上高 |
|----|----|-----|
| 1 | 春 | 96 |
| 1 | 夏 | 116 |
| 1 | 秋 | 106 |
| 1 | 冬 | 157 |
| 2 | 春 | 115 |
| 2 | 夏 | 134 |
| 2 | 秋 | 126 |
| 2 | 冬 | 180 |
| 3 | 春 | 148 |
| 3 | 夏 | 162 |
| 3 | 秋 | 153 |
| 3 | 冬 | 204 |
| 4 | 春 | 162 |
| 4 | 夏 | 185 |
| 4 | 秋 | 171 |
| 4 | 冬 | 224 |

春夏秋冬で2次元に並べ替え

| 元 | 季節 | 春 | 夏 | 秋 | 冬 |
|---|----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | | 96 | 116 | 106 | 157 |
| 2 | | 115 | 134 | 126 | 180 |
| 3 | | 148 | 162 | 153 | 204 |
| 4 | | 162 | 185 | 171 | 224 |

時系列分析

- 季節変動の分析
 - 期別平均法による季節調整

$$M_i = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l d_{ij}$$

$$S_i = M_i / \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k M_i$$

$$\hat{d}_{ij} = \frac{d_{ij}}{S_i}$$

| 年次 | 季節 | 春 | 夏 | 秋 | 冬 |
|------|----|-------|-------|-------|-------|
| 1 | | 96 | 116 | 106 | 157 |
| 2 | | 115 | 134 | 126 | 180 |
| 3 | | 148 | 162 | 153 | 204 |
| 4 | | 162 | 185 | 171 | 224 |
| 季毎合計 | | 521 | 597 | 556 | 765 |
| 季毎平均 | | 130.3 | 149.3 | 139.0 | 191.3 |
| 季節指数 | | 0.854 | 0.979 | 0.912 | 1.255 |
| 季調済 | 1 | 112.4 | 118.5 | 116.2 | 125.1 |
| | 2 | 134.6 | 136.9 | 138.2 | 143.5 |
| | 3 | 173.2 | 165.5 | 167.8 | 162.6 |
| | 4 | 189.6 | 189 | 187.5 | 178.5 |

時系列分析

- 季節変動の分析
 - 期別平均法による季節調整

時系列分析

- 季節変動の分析
 - 期別平均法による季節調整

| 年次\季節 | 春 | 夏 | 秋 | 冬 |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| 元 | 96 | 116 | 106 | 157 |
| 2 | 115 | 134 | 126 | 180 |
| 3 | 148 | 162 | 153 | 204 |
| 4 | 162 | 185 | 171 | 224 |

| 季調済み | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 112.4 | 118.5 | 116.2 | 125.1 |
| 2 | 134.6 | 136.9 | 138.2 | 143.5 |
| 3 | 173.2 | 165.5 | 167.8 | 162.6 |
| 4 | 189.6 | 189 | 187.5 | 178.5 |

| 季節変動 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------|-------|------|-------|------|
| 1 | -16.4 | -2.5 | -10.2 | 31.9 |
| 2 | -19.6 | -2.9 | -12.2 | 36.5 |
| 3 | -25.2 | -3.5 | -14.8 | 41.4 |
| 4 | -27.6 | -4.0 | -16.5 | 45.5 |

時系列分析

- 季節変動の分析
 - 対移動平均比率法による季節調整

春夏秋冬で2次元に並べ替え

| 年次 | 季節 | 売上高 | 4項移動平均 | 2項移動平均 |
|----|----|-----|--------|--------|
| 1 | 春 | 96 | | |
| | 夏 | 116 | | |
| | 秋 | 106 | 118.75 | 121.13 |
| | 冬 | 157 | 123.50 | 125.75 |
| 2 | 春 | 115 | 128.00 | 130.50 |
| | 夏 | 134 | 133.00 | 135.88 |
| | 秋 | 126 | 138.75 | 142.88 |
| | 冬 | 180 | 147.00 | 150.50 |
| 3 | 春 | 148 | 154.00 | 157.38 |
| | 夏 | 162 | 160.75 | 163.75 |
| | 秋 | 153 | 166.75 | 168.50 |
| | 冬 | 204 | 170.25 | 173.13 |
| 4 | 春 | 162 | 176.00 | 178.25 |
| | 夏 | 185 | 180.50 | 183.00 |
| | 秋 | 171 | 185.50 | |
| | 冬 | 224 | | |

| 年次\季節 | 春 | 夏 | 秋 | 冬 |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| 元 | 96 | 116 | 106 | 157 |
| 2 | 115 | 134 | 126 | 180 |
| 3 | 148 | 162 | 153 | 204 |
| 4 | 162 | 185 | 171 | 224 |

| 2項移動平均 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | | | 121.1 | 125.8 |
| 2 | 130.5 | 135.9 | 142.9 | 150.5 |
| 3 | 157.4 | 163.8 | 168.5 | 173.1 |
| 4 | 178.3 | 183.0 | | |

時系列分析

- 対移動平均比率法

| 年次\季節 | 春 | 夏 | 秋 | 冬 |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| 元 | 96 | 116 | 106 | 157 |
| 2 | 115 | 134 | 126 | 180 |
| 3 | 148 | 162 | 153 | 204 |
| 4 | 162 | 185 | 171 | 224 |

| 2項移動平均 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | | | 121.1 | 125.8 |
| 2 | 130.5 | 135.9 | 142.9 | 150.5 |
| 3 | 157.4 | 163.8 | 168.5 | 173.1 |
| 4 | 178.3 | 183.0 | | |

| 対移動平均比率 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | | | | 0.875 |
| 2 | 0.881 | 0.986 | 0.882 | 1.196 |
| 3 | 0.940 | 0.989 | 0.908 | 1.178 |
| 4 | 0.909 | 1.011 | | |

| 季毎平均 | 0.910 | 0.995 | 0.888 | 1.208 |
|------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 0.910 | 0.995 | 0.888 | 1.207 |

| 季節指数 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 105.5 | 116.6 | 119.4 | 130.1 |
| 2 | 126.4 | 134.7 | 141.9 | 149.1 |
| 3 | 162.7 | 162.8 | 172.3 | 169.0 |
| 4 | 178.1 | 185.9 | 192.6 | 185.6 |

| 季調済み | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 105.5 | 116.6 | 119.4 | 130.1 |
| 2 | 126.4 | 134.7 | 141.9 | 149.1 |
| 3 | 162.7 | 162.8 | 172.3 | 169.0 |
| 4 | 178.1 | 185.9 | 192.6 | 185.6 |

| 季節変動 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------|-------|------|-------|------|
| 1 | -9.5 | -0.6 | -13.4 | 26.9 |
| 2 | -11.4 | -0.7 | -15.9 | 30.9 |
| 3 | -14.7 | -0.8 | -19.3 | 35.0 |
| 4 | -16.1 | -0.9 | -21.6 | 38.4 |

時系列分析

- 季節変動の分析
 - 対移動平均比率法による季節調整

時系列分析

- 季節変動の分析
 - 対移動平均比率法による季節調整

| 年次\季節 | 春 | 夏 | 秋 | 冬 |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| 元 | 96 | 116 | 106 | 157 |
| 2 | 115 | 134 | 126 | 180 |
| 3 | 148 | 162 | 153 | 204 |
| 4 | 162 | 185 | 171 | 224 |

| 季調済み | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 105.5 | 116.6 | 119.4 | 130.1 |
| 2 | 126.4 | 134.7 | 141.9 | 149.1 |
| 3 | 162.7 | 162.8 | 172.3 | 169.0 |
| 4 | 178.1 | 185.9 | 192.6 | 185.6 |

| 季節変動 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------|-------|------|-------|------|
| 1 | -9.5 | -0.6 | -13.4 | 26.9 |
| 2 | -11.4 | -0.7 | -15.9 | 30.9 |
| 3 | -14.7 | -0.8 | -19.3 | 35.0 |
| 4 | -16.1 | -0.9 | -21.6 | 38.4 |

時系列分析

- 演習: 季節変動の分析
 - 右の5年間、四半期ごと時系列データについて、期別平均法、および対移動平均比率法による季節調整を行え

| 年次 | 季節 | 売上高 |
|----|----|-----|
| 1 | 春 | 31 |
| | 夏 | 26 |
| | 秋 | 28 |
| | 冬 | 35 |
| 2 | 春 | 33 |
| | 夏 | 28 |
| | 秋 | 31 |
| | 冬 | 37 |
| 3 | 春 | 34 |
| | 夏 | 30 |
| | 秋 | 33 |
| | 冬 | 43 |
| 4 | 春 | 38 |
| | 夏 | 32 |
| | 秋 | 40 |
| | 冬 | 45 |
| 5 | 春 | 39 |
| | 夏 | 35 |
| | 秋 | 47 |
| | 冬 | 49 |

時系列分析

- 循環変動の分析

| t | 元 | 傾向変動 | 循環変動 |
|------|--------|-------|-------|
| 1985 | 103.17 | 105.0 | 98.3 |
| 1986 | 101.42 | 106.4 | 95.3 |
| 1987 | 111.46 | 107.9 | 103.3 |
| 1988 | 113.49 | 109.3 | 103.8 |
| 1989 | 117.26 | 110.8 | 105.9 |
| 1990 | 116.34 | 112.2 | 103.7 |
| 1991 | 111.21 | 113.7 | 97.8 |
| 1992 | 112.19 | 115.1 | 97.4 |
| 1993 | 115.23 | 116.6 | 98.8 |
| 1994 | 110.97 | 118.1 | 94.0 |
| 1995 | 123.72 | 119.5 | 103.5 |
| 1996 | 128.26 | 121.0 | 106.0 |
| 1997 | 114.88 | 122.4 | 93.8 |
| 1998 | 113.76 | 123.9 | 91.8 |
| 1999 | 122.41 | 125.3 | 97.7 |
| 2000 | 126.57 | 126.8 | 99.8 |
| 2001 | 135.52 | 128.2 | 105.7 |
| 2002 | 138.33 | 129.7 | 106.7 |
| 2003 | 124.47 | 131.1 | 94.9 |
| 2004 | 129.99 | 132.6 | 98.0 |
| 2005 | 138.95 | 134.0 | 103.7 |

循環変動 = 元 / 傾向変動 × 100

回帰直線による理論値など

時系列分析

- 傾向変動の分析
- 傾向曲線の種類 I

- 多項式
 - 一次関数 $y = ax + b$
 - 二次関数 $y = ax^2 + bx + c$
- 指数
 - 指数関数 $y = a \cdot b^x (b > 1)$
 - 指数関数 $y = a \cdot b^x (0 < b < 1)$
 - 指数関数 $y = K - a \cdot b^x$

時系列分析

- 傾向変動の分析
- 傾向曲線の種類 II

- 成長曲線
 - ゴンペルツ曲線 Gompertz curve $y = K \cdot a^{b^x}$
 - ロジスティック曲線 Logistic curve $y = \frac{K}{1 + e^{-bx}}$

回帰分析 regression analysis

- 回帰分析とは？

| 日付 | 前日種園 | 東京 |
|------|--------|--------|
| 5/7 | 1018.4 | 1019.4 |
| 5/8 | 1007.6 | 1005.7 |
| 5/9 | 1006.2 | 1002.0 |
| 5/10 | 1009.9 | 1006.7 |
| 5/11 | 1010.8 | 1005.1 |
| 5/12 | 1013.2 | 1010.1 |
| 5/13 | 1016.2 | 1016.7 |
| 5/14 | 1009.1 | 1011.0 |
| 5/15 | 1003.1 | 999.5 |
| 5/16 | 1012.5 | 1006.9 |
| 5/17 | 1006.4 | 1001.9 |
| 5/18 | 1006.3 | 1007.5 |
| 5/19 | 1012.2 | 1014.4 |
| 5/20 | 1015.0 | 1014.3 |
| 5/21 | 1017.4 | 1014.6 |
| 5/22 | 1016.5 | 1009.0 |
| 5/23 | 1012.1 | 1006.7 |
| 5/24 | 1008.7 | 1009.4 |
| 5/25 | 1009.2 | 1011.8 |
| 5/26 | 1009.2 | 1009.4 |

回帰分析 regression analysis

- 最小二乗法

誤差項 error term

$$y_i = \hat{y}_i + \varepsilon_i = ax_i + b + \varepsilon_i$$

最小二乗法 $\min \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ として、係数 a, b を決定する

誤差の二乗を最小化

回帰分析 regression analysis

- 最小二乗法

$$y_i = \hat{y}_i + \varepsilon_i = ax_i + b + \varepsilon_i$$

★ 誤差項の二乗和を最小化して得られる、 a, b の最小二乗推定量 \hat{a}, \hat{b}

$$\hat{b} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \cdot \bar{x}$$

回帰分析 regression analysis

- 参考: 最小二乗推定値の導出

$$\min \sum_i \varepsilon_i^2 = \sum_i (y_i - b - ax_i)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_i (y_i - b - ax_i) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_i (y_i - b - ax_i)x_i = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} nb + (\sum x_i)a = \sum y_i, \\ (\sum x_i)b + (\sum x_i^2)a = \sum x_i y_i \end{cases} \quad \text{正規方程式 normal equation}$$

この正規方程式を解くと、偏回帰係数 \hat{a}, \hat{b} が得られる

回帰分析 regression analysis

- 最小二乗法
 - 例題の回帰方程式

$$\begin{cases} \hat{b} = 329.7 \div 335.6 = 0.9822, \\ \hat{a} = 1009.1 - 0.9822 \times 1011.0 = 16.09 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 16.09 + 0.9822x$$

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{b} - \hat{a} \cdot x_i \quad (i=1, \dots, n)$$

↑ 回帰残差 residual

誤差項の分散 $s^2 = \frac{1}{n-2} \sum \hat{\varepsilon}_i^2$

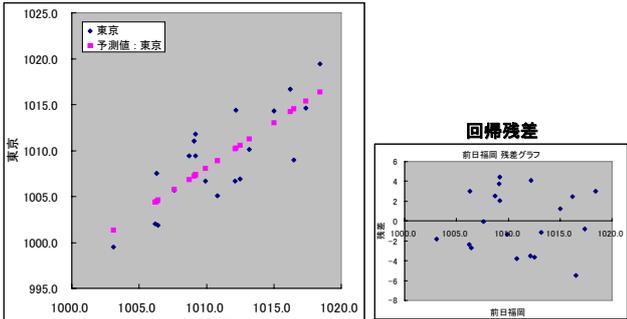
は回帰方程式の当てはまりのよさを表す

S: 推定値の標準誤差 standard error of estimates

n-2で割るのは推定時に自由度が失われるから

回帰分析 regression analysis

- 最小二乗法
- 例題: 東京と福岡前日の気圧の回帰分析



東京 (y-axis) vs 前日福岡 (x-axis)

Legend: ● 東京, ● 予測値・東京

右側: 前日福岡 残差グラフ (残差 y-axis vs 前日福岡 x-axis)

参考文献

- 東京大学出版会「統計学入門」東京大学出版会
- 宮川公男ほか「入門経営科学」実教出版
- 荒木勉「Excelで学ぶ経営科学入門シリーズ I ー需要予測ー」実教出版
- 荒木勉ほか「Excelで学ぶ経営科学入門シリーズ II ーデータ解析ー」実教出版
- 浅利英吉ほか「パソコンによるデータマイニング」日刊工業新聞社