

意思決定科学

線形計画法概観(復習)

情報学部
堀田敬介

2006/10/3, Tue.

目次

- 線形計画法
 - 数理モデル
 - 図的解法, 単体法による解法
 - 双対問題, 双対定理

数理モデル

- 例題: 効率的なアルバイト
 - 時給1200円の清掃作業, 時給900円のウェ이터2つ.
 - 各仕事を行うとストレスがたまるが, 各々5, 3である.

¥1,200/h
5 stress

¥900/h
3 stress

- 週末に5時間, アルバイトをする時間を取ることができる.
- 健康のため, ストレス許容量は21である.

さて, この条件のもとで, 最大のアルバイト料を得るにはどちらのアルバイトをどれだけすればいいか?

時給1200円 ≥ 時給900円
だから, 5時間全てを清掃作業で!

でも...,
ストレス: 5×5=25 > 21(許容量)

数理モデル

- 解説: 効率的なアルバイト
 - 時給1200円の清掃作業, 時給900円のウェ이터2つ.
 - 各仕事を行うとストレスがたまるが, 各々5, 3である.
 - 週末に5時間, アルバイトをする時間を取ることができる.
 - 健康のため, ストレス許容量は21である.

定式化

max. 1200x₁ + 900x₂

s. t. x₁ + x₂ ≤ 5

5x₁ + 3x₂ ≤ 21

x₁, x₂ ≥ 0

アルバイト代最大化

アルバイト時間制約

許容ストレス制約

アルバイト時間は非負

数理モデル

線形計画法, LP; Linear Program

数理モデル

- 解説: どう解くか? —その1—

max. 1200x₁ + 900x₂

s. t. x₁ + x₂ ≤ 5

5x₁ + 3x₂ ≤ 21

x₁, x₂ ≥ 0

図的解法

最適解: (x₁, x₂) = (3, 2)

ウェ이터を3時間
清掃作業を2時間

最適値: ¥5,400

図的解法が使えるのは2次元(頑張って3次元)まで. それ以上の高次元ではどうするの?

数理モデル

- 解説: どう解くか? —その2—

max. 4x₁ + 3x₂

s. t. x₁ + x₂ ≤ 5

5x₁ + 3x₂ ≤ 21

x₁, x₂ ≥ 0

単体法 (simplex method)

reduced cost

nonbasic variable

basic variable

pivot

ratio test

simplex tableau

Confidential

1



演習2-1: 主問題と双対問題

- 以下の線形計画問題に対する双対問題を示せ

(P)
$$\begin{aligned} \max. \quad & 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 5 \\ & -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq -2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

双対定理

弱双対定理

任意の実行可能解 $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ について,

$$4x_1 + 3x_2 \leq 5y_1 + 21y_2$$

が成り立つ

(P)	$\begin{aligned} \max. \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$	(D)	$\begin{aligned} \min. \quad & 5y_1 + 21y_2 \\ \text{s. t.} \quad & y_1 + 5y_2 \geq 4 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 3 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$
-----	--	-----	--

証明

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\leq (y_1 + 5y_2)x_1 + (y_1 + 3y_2)x_2 \\ &= (x_1 + x_2)y_1 + (5x_1 + 3x_2)y_2 \leq 5y_1 + 21y_2 \end{aligned}$$

一般的には...

双対定理

双対定理

主問題(P)に最適解 (x_1^*, x_2^*) が存在するならば, 双対問題(D)にも最適解 (y_1^*, y_2^*) が存在し, 最適値は等しい, 即ち,

$$4x_1^* + 3x_2^* = 5y_1^* + 21y_2^*$$

が成り立つ

(P)	$\begin{aligned} \max. \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$	(D)	$\begin{aligned} \min. \quad & 5y_1 + 21y_2 \\ \text{s. t.} \quad & y_1 + 5y_2 \geq 4 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 3 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$
-----	--	-----	--

証明略

一般的には...

双対定理

相補性定理

主問題(P)と双対問題(D)の実行可能解 $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ が(P), (D)の最適解であるための必要十分条件は,

$$\begin{cases} x_1(y_1 + 5y_2 - 4) = 0 \\ x_2(y_1 + 3y_2 - 3) = 0 \end{cases}, \begin{cases} y_1(5 - x_1 - x_2) = 0 \\ y_2(21 - 5x_1 - 3x_2) = 0 \end{cases}$$

が成立することである.

(P)	$\begin{aligned} \max. \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$	(D)	$\begin{aligned} \min. \quad & 5y_1 + 21y_2 \\ \text{s. t.} \quad & y_1 + 5y_2 \geq 4 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 3 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$
-----	--	-----	--

証明略

一般的には...

双対理論からの解法の考察

(i)~(iii)全てを満たす $(x_1^*, x_2^*), (y_1^*, y_2^*)$ が(主・双対)最適解

- (対称型の)主・双対線形計画問題を解くことは

(i)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 21 \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0$$

主実行可能条件

(ii)
$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 \geq 4 \\ y_1 + 3y_2 \geq 3 \end{cases} \quad y_1, y_2 \geq 0$$

双対実行可能条件

(iii)
$$\begin{cases} x_1(y_1 + 5y_2 - 4) = 0 \\ x_2(y_1 + 3y_2 - 3) = 0 \end{cases}, \begin{cases} y_1(5 - x_1 - x_2) = 0 \\ y_2(21 - 5x_1 - 3x_2) = 0 \end{cases}$$

相補性条件

を満たす解 $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ を見つけること.

(主)単体法 (simplex method)

(i), (iii)を満たしつつ, (ii)の成立で終了

双対単体法 (dual simplex method)

(ii), (iii)を満たしつつ, (i)の成立で終了

(主双対)内点法 (primal-dual IPM)

(i), (ii)を満たしつつ, (iii)の成立で終了

注: 反復中 (i), (ii)を満たさないなどバリエーションがある

一般的には...

演習3:

双対定理

- 以下のLPについて, 双対問題を作成し, 弱双対定理が成り立っていることを確認せよ
- また, 単体法により最適解を求め, 双対定理, 相補性定理が成り立っていることを確認せよ

(P)
$$\begin{aligned} \max. \quad & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 8 \\ & 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

一般的には...

参考文献

- 今野浩「線形計画法」日科技連(1987)
- 反町洋一「線形計画法の実際」産業図書(1992)
- H.P.Williams「数理計画モデルの作成法」産業図書(1995)
- 大山達雄「最適化モデル分析」日科技連(1993)
- 福島雅夫「数理計画入門」朝倉書店(1996)
- 田村明久・村松正和「最適化法」共立出版(2002)
- 藤田宏・今野浩・田邊國士「最適化法」岩波書店(1994)
- 小島正和・土谷隆・水野道治・佐野博「中点法」

演習1解答：最適生産量問題

max. $7x_1 + 4x_2 + 5x_3$
s. t. $6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 2500$
 $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 3000$
 $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1800$
 $5x_1 + x_2 + 9x_3 \leq 5000$
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	ratio test
Obj	7	4	5	0	0	0	0	0	
s_1	6	2	3	1	0	0	0	2500	416.6667
s_2	3	2	5	0	1	0	0	3000	1000
s_3	4	3	2	0	0	1	0	1800	450
s_4	5	1	9	0	0	0	1	5000	1000

↓

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	ratio test
Obj	1	0	-2	0	0	0	0	2917	1250
s_1	0	1	-0.5	1	0	0	0	416.7	1750
s_2	0	0	3.5	-1	1	0	0	1750	80
s_3	0	0	1.7	0	-1	1	0	133.3	-4375
s_4	0	0	-1	0	0	0	1	2917	

↓

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	ratio test
Obj	1	0	0	0	0.5	0	0	3050	780
s_1	0	1	0	1	0	-0.1	0	390	477.1429
s_2	0	0	0	0	3.5	-1	-1	1670	80
s_3	0	0	1	0	-0.5	1	0	80	456.9231
s_4	0	0	0	0	6.5	-1	0	2970	

↓

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	ratio test
Obj	1	0	0	0	0.2	1.1	0.2	3735	
s_1	0	1	0	0	0.4	0	-0.1	161.5	
s_2	0	0	0	0	0.5	1	-1	10.77	
s_3	0	0	1	0	-0.5	0	0.8	80	
s_4	0	0	0	1	-0.1	0.1	0.2	456.9	

双対問題：一般的な書式

主問題(P) Primal

$$\begin{aligned} \max. & c_1x_1 + \dots + c_nx_n \\ \text{s. t.} & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

目的関数：最大化
制約式：m本
変数：n個

双対問題(D) Dual

$$\begin{aligned} \min. & b_1y_1 + \dots + b_my_m \\ \text{s. t.} & a_{11}y_1 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ & \vdots \\ & a_{1n}y_1 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n \\ & y_1, \dots, y_m \geq 0 \end{aligned}$$

目的関数：最小化
制約式：n本
変数：m個

対称型の主・双対問題

双対問題：行列表記

主問題(P) Primal

$$\begin{aligned} \max. & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1, \dots, m) \\ & x_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n) \end{aligned}$$

max. $c^T x$
s.t. $Ax \leq b$
 $x \geq 0$

双対問題(D) Dual

$$\begin{aligned} \min. & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j=1, \dots, n) \\ & y_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \end{aligned}$$

min. $b^T y$
s.t. $A^T y \leq c$
 $y \geq 0$

対称型の主・双対問題

双対定理

- 弱双対定理
任意の実行可能解 $x_i (i=1, \dots, n), y_j (j=1, \dots, m)$ について,

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\begin{aligned} \max. & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1, \dots, m) \\ & x_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (P)$$

$$\begin{aligned} \min. & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j=1, \dots, n) \\ & y_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (D)$$

- 証明

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j & \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j \quad (\because x_j \geq 0, \forall j) \\ & = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i \end{aligned}$$

双対定理

- 双対定理
主問題(P)に最適解 $x_i^* (i=1, \dots, n)$ が存在するならば、
双対問題(D)にも最適解 $y_j^* (j=1, \dots, m)$ が存在し、最適値は等しい、即ち、

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned} \max. & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1, \dots, m) \\ & x_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (P)$$

$$\begin{aligned} \min. & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j=1, \dots, n) \\ & y_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (D)$$

- 証明略

双対定理

相補性定理

主問題(P)と双対問題(D)の実行可能解 $x_i (i=1,\dots,n), y_j (j=1,\dots,m)$ が, (P)(D)の最適解であるための必要十分条件は,

$$x_j (\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - c_j) = 0 \quad (j=1,\dots,n)$$

$$y_i (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) = 0 \quad (i=1,\dots,m)$$

が成立することである.

$$\begin{aligned} \max. & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1,\dots,m) \\ & x_j \geq 0 \quad (j=1,\dots,n) \end{aligned} \quad (P)$$

$$\begin{aligned} \min. & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j=1,\dots,n) \\ & y_i \geq 0 \quad (i=1,\dots,m) \end{aligned} \quad (D)$$

証明略

双対理論からの解法の考察

(i)~(iii)全てを満たす $x_i (i=1,\dots,n), y_j (j=1,\dots,m)$ が(主・双対)最適解

(対称型の)主・双対線形計画問題を解くことは

(i) $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1,\dots,m), \quad x_j \geq 0 \quad (j=1,\dots,n)$ 主実行可能条件

(ii) $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j=1,\dots,n), \quad y_i \geq 0 \quad (i=1,\dots,m)$ 双対実行可能条件

(iii) $\begin{cases} x_j (\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - c_j) = 0 & (j=1,\dots,n) \\ y_i (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) = 0 & (i=1,\dots,m) \end{cases}$ 相補性条件

を満たす $x_i (i=1,\dots,n), y_j (j=1,\dots,m)$ を見つけること.

- (主)単体法 (simplex method) (i), (iii)を満たしつつ, (ii)の成立で終了
- 双対単体法 (dual simplex method) (ii), (iii)を満たしつつ, (i)の成立で終了
- (主双対)内点法 (primal-dual IPM) (i), (ii)を満たしつつ, (iii)の成立で終了

注:反復中 (i), (ii)を満たさないなどバリエーションがある