

意思決定科学:ゲーム理論1

情報学部 堀田敬介

2006/10/28,Sat.~

Contents

🍰 ケーキを仲良く！

🔍 アルゴリズムと解の性質

The Steinhaus' loan divider procedure

The Banach-Knaster last-dimisher procedure

🎲 ゲーム理論とは何か？

🎲 ゲームの定義

🎲 2人非協力零和ゲーム

🔍 ミニマックス原理と均衡解

🔍 純粋戦略と混合戦略 ミニマックス定理

🔍 2人零和ゲームと線形計画

ケーキを仲良く

Bob と Carol にケーキ(丸々1個！)を買ってきた。
2人に均等に与えたいのだが、2人は自分の分が
相手より小さいと不満を言い、けんかになる。



どうしたら
いいだろう？



仮定: The cake is divisible: it can be cut at any point without destroying its value.

ケーキを仲良く

◆ You Cut, I Choose !

- Bobにケーキを切らせ, Carolにケーキを選ばせる

ただし、これはこの問題の「解」ではなく「アルゴリズム」!

◆ 解は...

- Bob divides the cake into two pieces, between which he is indifferent; and Carol chooses what she considers to be the larger piece. (from "Fair Division", p.9)

One divides,
the other chooses.

ケーキを仲良く

◆ 解の持つ2つの性質

- proportionality (An allocation is proportional.)
 - Each thinks he or she received a portion that has size or value of at least $1/n$.
- envy-freeness (An allocation is envy-free.)
 - Every player thinks he or she receives a portion that is at least tied for largest, or tied for most valuable and, hence, does not envy any other player.

プレイヤーが二人の場合は等価

ケーキを仲良く

◆ さて、何で解はあんなのだろうか？

- Bobの戦略
 - 均等(とBobが思う通り)に切る
 - 不均等(とBobが思うとおり)に切る.
- Carolの戦略
 - $1/2$ 以上(とCarolが思う方)のケーキを取る.
 - $1/2$ 以下(とCarolが思う方)のケーキを取る.

ケーキを仲良く

協力はずに、
自分の利得最大
(非協力的)

2人非協力零和ゲーム

プレイヤーは2人

自分の利得が相
手の損失(零和)

- ◆ 2人の利得表
 - Bobの利得表

Bob\Carol	1/2以上取る	1/2以下取る
不均等	小ケーキ	大ケーキ
均等	1/2ケーキ	1/2ケーキ
 - Carolの利得表

Bob\Carol	1/2以上取る	1/2以下取る
不均等	大ケーキ	小ケーキ
均等	1/2ケーキ	1/2ケーキ

ケーキを仲良く

- ◆ ミニマックス原理
 - Bobの利得表(=Carolの損失表)

Bob\Carol	1/2以上	1/2以下	Min	Max
不均等	小	大	小	1/2
均等	1/2	1/2	1/2	
Max	1/2	大		
Min		1/2		

Bob : マキシミン戦略: 最大(Max) 最小保証利得(Min)
Carol: ミニマックス戦略: 最小(Min) 最大保証損失(Max)

ケーキを仲良く (3人いたら?)

H. Steinhaus, 1948

- ◆ The Steinhaus' lone-divider procedure (3 players)
 1. Bob がケーキを1/3(とBobが思う通り)に切る
 2. Carol が acceptable cake とそうでないものを指摘
(少なくとも1つは acceptable cake があるという条件で)
 3. Ted も Carol と同様のことを行う。
 4. Case1: Carol(or Ted)が2個以上 acceptable cake がある
Ted → Carol → Bob の順にケーキを取る
 5. Case2: Carol, Tedとも acceptable cake が高々1個
Carol, Tedとも acceptable でないケーキを Bob にあげて、残りの
ケーキについて2人で[divide-and-choose]を行う。

call a piece acceptable to a player
if he or she thinks the piece is at least 1/3 of the cake.

ケーキを仲良く（3人いたら？）

- ◆ The Steinhaus' loan-divider procedure (3 plays)
 - proportional division を保証する各プレイヤーの戦略
 - Bobはちょうど1/3(とBobが思う) piece に切る
 - Carol, Ted は acceptable cake を取る
 - envy-free ではない
 - case1: Bob, Ted は誰も妬まないが, Carol は Ted を妬む可能性がある。(Tedが, 彼女が考える acceptable cake の大きい方を取る可能性がある)
 - case2: Carol, Ted は誰も妬まないが, Bob は Carol か Ted のいずれかを妬む可能性がある。(Carol と Ted の [divide-and-choose] の結果が Bob から見て 50-50 に思えない場合, 2人のいずれかが1/3以上(とBobが思う) cake を得るので)

ケーキを仲良く（n人いたら？）

- H.W. Kuhn, 1967
- ◆ Kuhn が The Steinhaus' loan-divider procedure (3 plays) を n人版に拡張
 - (Frobenius & König の combinatorial theorem に基づくアルゴリズム)
 - (4人版は Steinhaus も気づいていたらしい)
 - ◆ The Banach-Knaster last-diminisher procedure
 - (Steinhaus が 1948年に2人(彼の学生, ポーランド人)のアイデアを論文の形で発表)

◆

ケーキを仲良く

- S. Banach-B. Knaster, mid-1940
- ◆ The Banach-Knaster last-diminisher procedure (n players)
 - The partners being ranged A,B,C,...,N. A cuts from the cake an arbitrary part. B has now the right, but is not obliged, to diminish the slice cut off. Whatever he does, C has the right (without obligation) to diminish still the already diminished (or not diminished) slice, and so on up to N. The rule obliges the "last-diminisher" to take as his part the slice he was the last to touch. This partner thus disposed of, the remaining n-1 persons start the same game with the remainder of the cake. After the number of participants has been reduced to two, they apply the classical [divide-and-choose] rule for halving the remainder. (from "Fair Division", p.35 [Steinhaus' description 1948 p.102])

ケーキを仲良く

- ◆ The last-dimisher procedure
 - proportional division を保証する各プレイヤーの戦略
 - 切るプレイヤーがちょうど $1/n$ と考える piece に切ること
 - envy-free ではない
 - 理由: 例えば, ゲームを先に抜けたプレイヤーAが, ある段階で切られたケーキが $1/n$ より大きい(とAが思う)ときでもそれを阻止できない. 結果として $1/n$ より大きいケーキが誰か(B)に行く(とAが思う)ので, AはBを妬む.

ゲーム理論とは何か？

- ◆ ゲーム的状况 game situations
 - 複数の意思決定主体(プレイヤー)が存在し, 各々目的を持ち, その実現を目指して相互に依存しあっている状況
- ◆ ゲーム理論 game theory
 - ゲーム的状况を数理モデルを用いて定式化し, プレイヤー間の利害の対立と協力を分析する理論

J. von Neumann & O. Morgenstern
『ゲーム理論と経済行動』(1944)



John von Neumann (1903-1957)
2004年11月9日(火)取得の情報

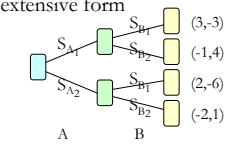
ゲーム理論とは何か？

- ◆ プレイヤー player
 - 意思決定し, 行動する主体. (2人, 3人, ..., n人, ..., ∞)
 - 例: 個人, 複数の個人から成る組織, 政党, 国家, ...
- ◆ 戦略 strategy
 - プレイヤーが取りうる行動. (有限, 無限)
- ◆ 利得と利得関数 payoff
 - 各プレイヤーの戦略決定後, ゲームは終了し, 結果が出る. 結果に対する各プレイヤーの何らかの評価値. 利得 payoff, 効用 utility.
- ◆ 協力の可能性
 - 各プレイヤーは自由に自己の判断で行動.
 - 協力ゲーム: 十分にコミュニケーション可能で, 合意の上で戦略を決定.
 - 非協力ゲーム: 各自の独立な判断により, 戦略を決定.

ゲーム理論とは何か？

◆ ゲームの表現形式

- 展開形 extensive form
- 戦略形 strategic form, 標準形 normal form



A \ B	S _{B1}	S _{B2}
S _{A1}	3	1
S _{A2}	-4	6

ゲーム理論とは何か？

◆ ゲームの定義 (戦略形 n 人ゲーム)

$$G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N})$$

$$\begin{cases} N = \{1, 2, \dots, n\} & \text{: プレイヤーの集合} \\ S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}\} & \text{: プレイヤー } i \text{ の戦略集合} \\ f_i : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow R & \text{: プレイヤー } i \text{ の利得関数} \end{cases}$$

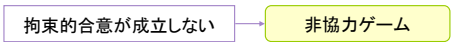
各プレイヤーは自己の利得最大化を目指し、
Gは全てのプレイヤーの共有知識とする。

ゲーム理論とは何か？

◆ 非協力ゲームと協力ゲーム

- 各プレイヤーの戦略決定における前提
- $$S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}\} \quad (i \in N)$$

1. プレイヤー間には、各プレイヤーがとるべき戦略について、強制力のある取り決めは存在しない。



2. 全てのプレイヤー間に、とるべき戦略についての合意が成り立ち、それに基づいて戦略決定する。



2人非協力零和ゲーム

- ◆ ゲームのルール
 - プレイヤーの数は2人 $N = \{1,2\}$
 - 各プレイヤーは、独立に戦略を決定(非協力)
 - プレイヤーの利得の和は、常に零(零和) $\forall (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2, f_1(s_1, s_2) + f_2(s_1, s_2) = 0$
 - ゲームは1回限り
 - 各プレイヤーは戦略決定時に、他のプレイヤーがどの戦略をとるかは知らない
 - 各プレイヤーの取りうる戦略は有限
 - $S_1 = \{s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1m}\}$
 - $S_2 = \{s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2n}\}$

2人非協力零和ゲーム

- ◆ 利得行列 payoff matrix
 - 零和ゲーム, 即ち, $\forall (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2, f_1(s_1, s_2) + f_2(s_1, s_2) = 0$ なので, $a_{ij} = f_1(s_i, s_j) = -f_2(s_i, s_j)$
 - とおくと, 取りうる戦略と利得の関係を行列Aで表せる

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

利得行列

2人非協力零和ゲーム

- ◆ Example1:
 - Λ君とBさんがトランプで簡単なゲームをしている。双方とも予め2枚のカードを持っており、1回だけ1枚のカードを出し、カードの目の差を利得としてもらえるというゲームである。さて、Λ君は「スペードの4」「ハートの7」の2枚、Bさん「クラブの2」「ダイヤの10」の2枚のカードを持っていることが互いに分かっている時、2人はどのようなカードを出すべきか？

Λ君の利得表

A \ B	クラブの2	ダイヤの10
スペードの4	2	-6
ハートの7	5	-3

Bさんの利得表

A \ B	クラブの2	ダイヤの10
スペードの4	-2	6
ハートの7	-5	3

ゲームの解: (ハートの7, ダイヤの10)

ゲームの値

2人非協力零和ゲーム



◆ Example2:

- A君とBさんがゲームをしている。それぞれ3つずつの戦略があり、A君の利得表は以下の通りである。2人は、各々どんな戦略をとるべきか？

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}
s _{A1}	-2	4	-1
s _{A2}	2	2	1
s _{A3}	4	-3	0

2人非協力零和ゲーム

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}
s _{A1}	-2	4	-1
s _{A2}	2	2	1
s _{A3}	4	-3	0

◆ ミニマックス原理 minimax principle

- Example2でプレイヤーAの思考
 - 戦略s_{A1}を取ったときの最悪の事態は
 $\min(-2, 4, -1) = -2$ (プレイヤーBが戦略s_{B1}を取る)
 - 戦略s_{A2}を取ったときの最悪の事態は
 $\min(2, 2, 1) = 1$ (プレイヤーBが戦略s_{B3}を取る)
 - 戦略s_{A3}を取ったときの最悪の事態は
 $\min(4, -3, 0) = -3$ (プレイヤーBが戦略s_{B2}を取る)

最大化プレイヤー

⇒ 戦略s_{A2}を取る (最悪でも利得1が保証される)

もっと良い利得を得ることができるのか？

2人非協力零和ゲーム

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}
s _{A1}	-2	4	-1
s _{A2}	2	2	1
s _{A3}	4	-3	0

◆ ミニマックス原理 minimax principle

- Example2でプレイヤーAがBの立場で思考
 - Bが戦略s_{B1}を取ったとき、Aである自分は戦略s_{A3}を取る
 $\max(-2, 2, 4) = 4$
 - Bが戦略s_{B2}を取ったとき、Aである自分は戦略s_{A1}を取る
 $\max(4, 2, -3) = 4$
 - Bが戦略s_{B3}を取ったとき、Aである自分は戦略s_{A2}を取る
 $\max(-1, 1, 0) = 1$

⇒ 戦略s_{B3}を取る (最悪でも損失1で済む)

Aは戦略s_{A2}を取るとき、利得1を得られ、それ以外の戦略を取ると利得が1以下になる。

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス原理

• Example2:

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}	min	max	
s _{A1}	-2	4	-1	-2	1	
s _{A2}	2	2	1	1		
s _{A3}	4	-3	0	-3		
max	4	4	1	1		
min						

保証水準 security level

保証水準 security level

ミニマックス値
minimax value
 $v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$

ミニマックス原理
minimax principle
〔最小化プレイヤーの行動原理〕

$v_1 = v_2$

マキシミン値
maximin value
 $v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$

マキシミン原理
maximin principle
〔最大化プレイヤーの行動原理〕

2人非協力零和ゲーム

◆ 均衡点とゲームの値

• 2人のプレイヤーがともにミニマックス原理に基づいて行動すると、どうなるのか？

2人共に勝つことはあり得ない！

↓

何らかの意味での均衡に到達

$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} = 1$

2人零和ゲームが
「厳密に決定される strictly determined」
「厳密に確定的である」

(s_{A2}*, s_{B3}*) : ゲームの均衡点 equilibrium point

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}
s _{A1}	-2	4	-1
s _{A2}	2	2	1
s _{A3}	4	-3	0

やむをえない...

しかたない...

演習1:

◆ プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える。プレイヤーA, Bがそれぞれミニマックス原理に基づいて戦略決定をすると、ゲームの解はどうか？ (1), (2)それぞれのゲームについて考えよ

(1)

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}
s _{A1}	3	1	-1
s _{A2}	-1	0	2
s _{A3}	5	2	3

(2)

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}
s _{A1}	5	6	4
s _{A2}	1	8	2
s _{A3}	7	2	3

Confidential

9

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

• Example3:

• A君とBさんがゲームをしている。それぞれ3つずつの戦略があり、A君の利得表は以下の通りである。2人は、各々どんな戦略をとるべきか？

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}
s _{A1}	-4	2	0
s _{A2}	4	3	1
s _{A3}	1	-3	2

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

• Example3:

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}	min	max	
s _{A1}	-4	2	0	-4	1	
s _{A2}	4	3	1	1		
s _{A3}	1	-3	2	-3		
max	4	3	2	$1 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$ $2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$ ✕		
min	2					

マキシミン戦略

ミニマックス戦略

ミニマックス均衡点が存在しない！？

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

• Proposition1: 利得行列A=[a_{ij}]が与えられた時,

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$$

ゲームは常に厳密に決定されるとは限らない！

↓

いかなる場合に均衡点が存在し、ゲームが厳密に確定的であるか？

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

• 鞍点 saddle point

• 行列 $A=[a_{ij}]$ において、任意の i, j に対し、
 $a_{ij_0} \leq a_{i_0j_0} \leq a_{i_0j}$
が成り立つとき、 (i_0, j_0) をこの行列の鞍点といい、 $a_{i_0j_0}$ を鞍点値という。

$$A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i_01} & \cdots & a_{i_0j_0} & \cdots & a_{i_0n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj_0} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$a_{ij_0} \leq a_{i_0j_0} \leq a_{i_0j}$

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

• Theorem1:

• (行列)ゲームが厳密に確定的であるための必要十分条件は、その利得行列Aに少なくとも1つの鞍点が存在すること。
またこのとき、鞍点が均衡点。

• 最適戦略 optimal strategy

• 均衡点 (i^*, j^*) は鞍点なので、プレイヤーAが戦略 i^* を用いると、プレイヤーBがいかなる戦略をとっても少なくとも $v(A)$ を得ることができ、また、Bが戦略 j^* を取る限り、Aは戦略を変えても利得を増加させることはできない。

➡

戦略 i^* がAの最適戦略

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

• Theorem2:

• 厳密に確定的な零和ゲームにおいて、均衡点が複数ある場合、各均衡点の値は等しい。また、 (i^*, j^*) , (i_0, j_0) が均衡点ならば、 (i^*, j_0) , (i_0, j^*) も均衡点である。

i_0

i^*

$a_{i_0j_0}$

$a_{i^*j_0}$

$a_{i_0j^*}$

$a_{i^*j^*}$

均衡戦略は交換可能

Confidential

11

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

• Example3:

		s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}
s_{A1}	-4	2	0	
s_{A2}	4	3	1	
s_{A3}	1	-3	2	

完全予見は不可能！
決断は下さねばならない！

主体的な賭、
最適な賭の確率

期待効用原理

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

• Example3:

		q_1	q_2	q_3
p_1	s_{A1}	-4	2	0
p_2	s_{A2}	4	3	1
p_3	s_{A3}	1	-3	2

$p_i \geq 0, (i = 1, 2, 3)$
 $p_1 + p_2 + p_3 = 1$
 $q_j \geq 0, (j = 1, 2, 3)$
 $q_1 + q_2 + q_3 = 1$

プレイヤーBが各戦略をとったときの、プレイヤーAの期待効用

$$\begin{cases} E_1(p, s_{B_1}) = -4p_1 + 4p_2 + p_3 \\ E_1(p, s_{B_2}) = 2p_1 + 3p_2 - 3p_3 \\ E_1(p, s_{B_3}) = p_2 + 2p_3 \end{cases}$$

よって、Bが各戦略を (q_1, q_2, q_3) の確率でとったときの、Aの期待効用

$$E_1(p, q) = E_1(p, s_{B_1})q_1 + E_1(p, s_{B_2})q_2 + E_1(p, s_{B_3})q_3$$

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

• Example3:

		q_1	q_2	q_3
p_1	s_{A1}	-4	2	0
p_2	s_{A2}	4	3	1
p_3	s_{A3}	1	-3	2

純粋戦略
pure strategy

混合戦略
mixed strategy

プレイヤーAが各戦略をとったときの、プレイヤーBの期待効用

$$\begin{cases} E_2(s_{A_1}, q) = -4q_1 + 2q_2 \\ E_2(s_{A_2}, q) = 4q_1 + 3q_2 + q_3 \\ E_2(s_{A_3}, q) = q_1 - 3q_2 + 2q_3 \end{cases}$$

Aが各戦略を (p_1, p_2, p_3) の確率でとったときの、Bの期待効用

$$E_2(p, q) = E_2(s_{A_1}, q)p_1 + E_2(s_{A_2}, q)p_2 + E_2(s_{A_3}, q)p_3$$

まとめると、プレイヤーA, Bがそれぞれ確率 $(p_1, p_2, p_3), (q_1, q_2, q_3)$ で各戦略をとったとき、各プレイヤーの期待効用は以下ようになる。

$$\begin{cases} E_1(p, q) = E_1(p, s_{B_1})q_1 + E_1(p, s_{B_2})q_2 + E_1(p, s_{B_3})q_3 \\ E_2(p, q) = E_2(s_{A_1}, q)p_1 + E_2(s_{A_2}, q)p_2 + E_2(s_{A_3}, q)p_3 \end{cases}$$

また、このとき明らかに、以下が成り立つ。

$E(p, q) := E_1(p, q) = E_2(p, q)$

プレイヤーAは期待効用最大化！
プレイヤーBは期待損失最小化！

2人非協力零和ゲーム

◆ 支配戦略

• Example3:

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}
s _{A1}	-4	2	0
s _{A2}	4	3	1
s _{A3}	1	-3	2

被支配戦略
→ s_{A1}
支配戦略
→ s_{A2}

戦略の支配 domination of strategies

プレイヤー i の戦略 h, k について、
戦略 h が戦略 k を支配するとは、
任意の s_{-i} ∈ S_{-i} に対して、
 $f_i(s_{-i}, h) > f_i(s_{-i}, k)$
が成立すること。

• =だと「同等」
• ≥かつ≠だと「弱支配」
補足) 通常は、被弱支配戦略は
除去しない → 共有地の悲劇

支配する
dominate

被支配戦略除去の原理

「支配される戦略は用いない」

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}
s _{A2}	4	3	1
s _{A3}	1	-3	2

補足: 被支配戦略除去の原理による均衡点が存在
→ ゲームは支配可解 dominance solvable

2人非協力零和ゲーム

◆ 最適混合戦略

• Example3:

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E(\mathbf{p}, s_{B_2})q_2 + E(\mathbf{p}, s_{B_3})q_3$$
$$= (3p_2 - 3p_3)q_2 + (p_2 + 2p_3)q_3$$
$$= (3p_2 - 3(1 - p_2))q_2 + (p_2 + 2(1 - p_2))(1 - q_2)$$
$$= (p_2 \quad 1 - p_2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ 1 - q_2 \end{pmatrix} = -E_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

$\begin{cases} E(\mathbf{p}, (1, 0)) = 6p_2 - 3 \\ E(\mathbf{p}, (0, 1)) = -p_2 + 2 \end{cases}$

△の最適戦略 $\mathbf{p}^* = (0, 5/7, 2/7)$

$$\begin{cases} E((1, 0), \mathbf{q}) = 2q_2 + 1 \\ E((0, 1), \mathbf{q}) = -5q_2 + 2 \end{cases}$$

□の最適戦略 $\mathbf{q}^* = (0, 1/7, 6/7)$

$(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$: 均衡解

2人非協力零和ゲーム

◆ 最適混合戦略

• Example3:

A \ B	s _{B2}	s _{B3}
s _{A2}	3	1
s _{A3}	-3	2

player A

player B

Exp

player A

player B

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (3p_2 - 3(1 - p_2))q_2 + (p_2 + 2(1 - p_2))(1 - q_2)$$

(4)

$A \setminus B$	s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}
s_{A1}	3	2	4
s_{A2}	-1	3	0
s_{A3}	2	1	-2

$$q_1 + \cdots + q_n = 1$$
$$\max_p \min_q E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq \min_q \max_p E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

が成立すること。 B が q^* の時、 A は p^* にするのが利得最大

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

Theorem5

$v(A)$ がゲームの値, (p^*, q^*) が均衡点であるための必要十分条件は

$$\forall i, j, E(s_{A_i}, q^*) \leq E(p^*, q^*) \leq E(p^*, s_{B_j})$$

が成立すること.

$$\forall i = 1, \dots, m, \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^* \leq E(p^*, q^*)$$

$$\forall j = 1, \dots, n, E(p^*, q^*) \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^*$$

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

Example4

		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
$A \setminus B$		s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}	s_{B4}	s_{B5}
p_1	s_{A1}	-2	-1	2	3	3
p_2	s_{A2}	5	2	4	-1	0
	s_{A3}	4	1	3	-2	-1

$E(p, s_{B_1}) = -2p_1 + 5p_2 = -7p_1 + 5$
 $E(p, s_{B_2}) = -p_1 + 2p_2 = -3p_1 + 2$
 $E(p, s_{B_3}) = 2p_1 + 4p_2 = -2p_1 + 4$
 $E(p, s_{B_4}) = 3p_1 - p_2 = 4p_1 - 1$
 $E(p, s_{B_5}) = 3p_1$

$p^* = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, 0)$

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

Example5: 一般の 2×2 ゲーム

		q_1	q_2
$A \setminus B$		s_{B1}	s_{B2}
p_1	s_{A1}	a_{11}	a_{12}
p_2	s_{A2}	a_{21}	a_{22}

鞍点が存在すればそれが均衡点。
なければ、混合戦略を考えるが、
このとき、必ず $E(p, s_{B_1})$ と $E(p, s_{B_2})$ 及
び $E(s_{A_1}, q)$ と $E(s_{A_2}, q)$ は交点を持つ。

均衡点

$(p_1^*, p_2^*) = \left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}}, \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}} \right)$

$(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}}, \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}} \right)$

$$\begin{cases} E(p, s_{B_1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 \\ E(p, s_{B_2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 \\ E(s_{A_1}, q) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 \\ E(s_{A_2}, q) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 \end{cases}$$

演習3:

◆ プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える.
プレイヤーA, Bがそれぞれ期待効用原理に基づいて戦略決定
をすると, ゲームの解はどうなるか?

(1)

A \ B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	4	-2
s_{A_2}	-3	3

(2)

A \ B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	3	1
s_{A_2}	-1	5

2人非協力零和ゲーム

◆ 2人零和ゲームと線形計画法

• プレイヤーAの利得行列と混合戦略 p

p_1

p_2

$\vdots$

p_m

a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

$$\begin{cases} E(p, s_{B_1}) = \sum_{i=1}^m a_{i1} p_i \geq u \\ E(p, s_{B_2}) = \sum_{i=1}^m a_{i2} p_i \geq u \\ \vdots \\ E(p, s_{B_n}) = \sum_{i=1}^m a_{in} p_i \geq u \end{cases}$$

➡ max. u

まとめると...

$$\begin{aligned} \max. & u \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \geq u \quad (j=1, \dots, n) \\ & \sum_{i=1}^m p_i = 1 \\ & p_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \end{aligned}$$

2人非協力零和ゲーム

◆ 2人零和ゲームと線形計画法

• プレイヤーBの利得行列と混合戦略 q

q_1

q_m

$\cdots$

q_n

a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

$$\begin{cases} E(s_{A_1}, q) = \sum_{j=1}^n a_{1j} q_j \leq w \\ E(s_{A_2}, q) = \sum_{j=1}^n a_{2j} q_j \leq w \\ \vdots \\ E(s_{A_m}, q) = \sum_{j=1}^n a_{mj} q_j \leq w \end{cases}$$

➡ min. w

まとめると...

$$\begin{aligned} \min. & w \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq w \quad (i=1, \dots, m) \\ & \sum_{j=1}^n q_j = 1 \\ & q_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n) \end{aligned}$$

2人非協力零和ゲーム

◆ 2人零和ゲームと線形計画法

プレイヤーAの問題 (P)

プレイヤーBの問題 (D)

$$\begin{aligned} \max. & u \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \geq u \quad (j=1, \dots, n) \\ & \sum_{i=1}^m p_i = 1 \\ & p_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min. & w \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq w \quad (i=1, \dots, m) \\ & \sum_{j=1}^n q_j = 1 \\ & q_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n) \end{aligned}$$

• Theorem6

(P), (D)の最適解が (p^*, u^*) , (q^*, w^*) のとき, (p^*, q^*) がゲームの均衡点であり, $v:=u^*=w^*$ がゲームの値である

2人非協力零和ゲーム

◆ 2人零和ゲームと線形計画法

• Example6:じゃんけん

A \ B	👉	👎	👀	min	max	
👉	0	2	-7	-7	-2	
👎	-2	0	4	-2		
👀	7	-4	0	-4		
max	7	2	4	マキシミン戦略		
min	2					

$-2 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$

$\times$

$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$

ミニマックス戦略

• 両プレイヤーとも、支配戦略は存在しない。

• 純粋戦略ではミニマックス均衡点は存在しない。

2人非協力零和ゲーム

◆ 2人零和ゲームと線形計画法

• Example6:じゃんけん

A \ B	👉	👎	👀
👉	0	2	-7
👎	-2	0	4
👀	7	-4	0

$$\begin{aligned} \max. & u \\ \text{s.t.} & -2p_2 + 7p_3 \geq u \\ & 2p_1 - 4p_3 \geq u \\ & -7p_1 + 4p_2 \geq u \\ & p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ & p_1, p_2, p_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min. & w \\ \text{s.t.} & 2q_2 - 7q_3 \leq w \\ & -2q_1 + 4q_3 \leq w \\ & 7q_1 - 4q_2 \leq w \\ & q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ & q_1, q_2, q_3 \geq 0 \end{aligned}$$

自己双対線形計画問題
self-dual LP

$(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = (0.538462, 0.153846, 0.307692)$

$(q_1^*, q_2^*, q_3^*) = (0.538462, 0.153846, 0.307692)$

$u^* = 0$

$w^* = 0$

演習4:

- ◆ 硬貨合せゲーム
プレイヤーA, Bが各々100円硬貨を投げて表・裏の出た組合せによって勝ち負けを決めるゲームを考える。両方とも表、あるいは両方とも裏がでたらAの勝ちとし、BはAに100円を支払う。逆に2枚の硬貨の出た面が違う場合はBの勝ちとし、AはBに100円を支払う。このゲームの値はどうなるか？ 期待効用原理の観点で考察せよ。
- ◆ 市場シェアゲーム
2大自動車メーカーA社とB社は、各々RV車を販売している。市場でシェア争いにしのぎを削っていた。現状では、いずれも200万で販売しているが、今後の戦略として、それぞれ価格を「据え置く」か「10%引き」とするかがある。
 - ・ 両社とも「据え置く」場合の純利益が、Aが600億円で、Bが400億円、
 - ・ Aが据え置き、Bが10%引きだと、Aが300億円で、Bが700億円、
 - ・ Aが10%引き、Bが据え置くだと、Aが450億円で、Bが550億円、
 - ・ 両社とも10%引きで販売すると、Aが700億円で、Bが300億円が見込まれる。それぞれの最適戦略はどうなるか？

参考文献

- ◆ S.J. Brams & A.D. Taylor, ``Fair Division'', Cambridge Univ. Press (1996)
- ◆ 鈴木光男「ゲーム理論入門」共立出版(1981,2003(新装版))
- ◆ 鈴木光男「新ゲーム理論」勁草書房(1994)
- ◆ 岡田章「ゲーム理論」有斐閣(1996)
- ◆ 今野浩「線形計画法」日科技連(1987)
- ◆ 中山幹夫・武藤滋夫・舟木由喜彦「ゲーム理論で解く」有斐閣(2000)
- ◆ 武藤滋夫「ゲーム理論入門」日本経済新聞社(2001)
- ◆ 逢沢明「ゲーム理論トレーニング」かんき出版(2003)
- ◆ 今井春雄・岡田章編著「ゲーム理論の応用」勁草書房(2005)
- ◆ R.アクセルロッド「つきあい方の科学」ミネルヴァ書房(1998)
