意思決定科学： ゲーム理論2

情報学部　堀田敬介

2006/11/17,Fri. ～

Contents

- 2人非協力非零和ゲーム
  - 定義：ゲームのルール，双行列
  - 例：囚人のジレンマ，面会ゲーム，恋人達のジレンマ，…
  - 最適応答，Nash均衡点
- Nash均衡点と線形相補性問題（LCP）
- 戦略形ゲームの社会・経済問題への応用例

2人非協力非零和ゲーム

- ゲームのルール
  - プレイヤーの数は2人　$N=\{1,2\}$
  - 各プレイヤーは，独立に自分の戦略を決定（非協力）
  - プレイヤーの利得の和は一定とは限らない（非零和）

  - ゲームは1回限り
  - 各プレイヤーは戦略決定時に，他のプレイヤーがどの戦略をとるかは知らない
  - 純粋戦略の数は有限

$$\begin{cases} S_A=\{s_{A_1},s_{A_2},\cdots,s_{A_m}\} \\ S_B=\{s_{B_1},s_{B_2},\cdots,s_{B_n}\} \end{cases}$$

2人非協力非零和ゲーム

- 双行列ゲーム　　和が零（一定）という条件はない（非零和）
  - 利得関数

$$\forall i,j,\quad f_A(s_{A_i},s_{B_j})=a_{ij},\ \ f_B(s_{A_i},s_{B_j})=b_{ij}$$

  - 利得行列

$$\boldsymbol{A}=[a_{ij}],\ \boldsymbol{B}=[b_{ij}]$$

プレイヤーBの戦略（n個）の利得（右側）

プレイヤーAの戦略（m個）の利得（左側）

$$\begin{bmatrix} (a_{11},b_{11}) & (a_{12},b_{12}) & \cdots & (a_{1n},b_{1n}) \\ (a_{21},b_{21}) & (a_{22},b_{22}) & \cdots & (a_{2n},b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1},b_{m1}) & (a_{m2},b_{m2}) & \cdots & (a_{mn},b_{mn}) \end{bmatrix} =: (A,B)$$

双行列

2人非協力非零和ゲーム

性の戦い，男女の戦い，逢引きのジレンマ，…

- 例1：恋人達のジレンマ **battle of sexes**
  - ある一組のカップルがデートをしたいと思っている
  - 男性は野球観戦を希望し，女性は映画鑑賞がしたい
  - 各々が好きなものを見るより一緒にいることの方が大事

男＼女	野球	映画
野球	(2,1)	(-1,-1)
映画	(-1,-1)	(1,2)

$$\max_i \min_j a_{ij} = -1$$

$$\max_i \min_j b_{ij} = -1$$

互いに支配戦略は持たない
ミニマックス原理に従うと，互いにどちらの戦略でも良い？
（または各戦略のマックスが大きくなる方を選ぶ！？）

2人非協力非零和ゲーム

	男＼女	野球 (q_1)	映画 (q_2)
p_1	野球	(2,1)	(-1,-1)
p_2	映画	(-1,-1)	(1,2)

- 例1：恋人達のジレンマ **battle of sexes**
  - 零和ゲームの時と全く同じやり方で，混合戦略でミニマックス原理に基づき期待利得最大化をしてみると…

$$\begin{cases} E_A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = 2p_1q_1 - p_1q_2 - p_2q_1 + p_2q_2 \\ E_B(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = p_1q_1 - p_1q_2 - p_2q_1 + 2p_2q_2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} E_A(\boldsymbol{p},(1,0)) = 3p_1 - 1 \\ E_A(\boldsymbol{p},(0,1)) = -2p_1 + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} E_B((1,0),\boldsymbol{q}) = 2q_1 - 1 \\ E_B((0,1),\boldsymbol{q}) = -3q_1 + 2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow (\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{q}}) = \left((\tfrac{2}{5},\tfrac{3}{5}),(\tfrac{3}{5},\tfrac{2}{5}) \right),\ \ E_A(\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{5},\ \ E_B(\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{5}$$

ところが…

$$E_A(\boldsymbol{p},\hat{\boldsymbol{q}}) = p_1 - \frac{1}{5} \qquad E_B(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{q}) = -q_1 + \frac{4}{5}$$

Bが $\hat{\boldsymbol{q}}$ をとるならAは $\hat{\boldsymbol{p}}$ ではなく(1,0)にする方が期待利得が高くなる！

Aが $\hat{\boldsymbol{p}}$ をとるならBは $\hat{\boldsymbol{q}}$ ではなく(0,1)にする方が期待利得が高くなる！

均衡しない！

2人非協力非零和ゲーム

2人零和ゲームでは，ミニマックス原理は最適応答原理に帰着

- **Definition 最適応答と最適応答対応**
  - 最適応答 **best response**
    - プレイヤーAの戦略 $\bar{s}_A \in S_A$ が，プレイヤーBの戦略 $s_B \in S_B$ に対する**最適応答**であるとは，以下が成り立つこと

$$f_A(\bar{s}_A, s_B) = \max_{s_A \in S_A} f_A(s_A, s_B) \quad \longleftarrow \text{純粋戦略の場合}$$

$$E_A(\bar{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{q}) = \max_{\boldsymbol{p}} E_A(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \quad \longleftarrow \text{混合戦略の場合}$$

  - 最適応答対応 **best response correspondence**
    - Bの戦略 $s_B \in S_B$ に対するAの最適応答の集合

$$R_A(s_B) = \left\{ \bar{s}_A \in S_A \middle| f_A(\bar{s}_A, s_B) = \max_{s_A \in S_A} f_A(s_A, s_B) \right\} \longleftarrow \text{純粋戦略の場合}$$

$$R_A(\boldsymbol{q}) = \left\{ \boldsymbol{p} \middle| E_A(\bar{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{q}) = \max_{\boldsymbol{p}} E_A(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \right\} \longleftarrow \text{混合戦略の場合}$$

を，**プレイヤーAの最適応答対応**とよび，

$$D_A = \left\{ (s_A, s_B) \middle| s_A \in R_A(s_B), s_B \in S_B \right\}$$

を，プレイヤーAの**最適応答集合**とよぶ

最適応答原理

2人非協力非零和ゲーム

- 最適応答と最適応答対応
  - プレイヤーA，Bが各々最適応答をとる場合，その組の集合は

$$D := D_A \cap D_B \longleftarrow$$

互いに最適応答なら均衡する（$D \neq \varnothing$なら均衡）

となる

- 例：

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	(7,7)	(0,8)	(5,5)
s_{A_2}	(8,0)	(6,6)	(2,7)
s_{A_3}	(4,5)	(3,1)	(6,2)

プレイヤーBの（純戦略での）最適応答

$s_{A_1} \to \max\{7,8,5\} = 8 \quad R_B(s_{A_1}) = \{s_{B_2}\}$

$s_{A_2} \to \max\{0,6,7\} = 7 \quad R_B(s_{A_2}) = \{s_{B_3}\}$

$s_{A_3} \to \max\{5,1,2\} = 5 \quad R_B(s_{A_3}) = \{s_{B_1}\}$

$$D_B = \left\{ (s_{A_2}, s_{B_3}), (s_{A_1}, s_{B_2}), (s_{A_3}, s_{B_1}) \right\}$$

プレイヤーAの（純戦略での）最適応答

$s_{B_1} \to \max\{7,8,4\} = 8 \quad R_A(s_{B_1}) = \{s_{A_2}\}$

$s_{B_2} \to \max\{0,6,3\} = 6 \quad R_A(s_{B_2}) = \{s_{A_2}\}$

$s_{B_3} \to \max\{5,2,6\} = 6 \quad R_A(s_{B_3}) = \{s_{A_3}\}$

$$D_A = \left\{ (s_{A_2}, s_{B_1}), (s_{A_2}, s_{B_2}), (s_{A_3}, s_{B_3}) \right\}$$

$D = \varnothing$ より，純粋戦略のみでは均衡しない

2人非協力非零和ゲーム

Nash均衡点は，零和ゲームの均衡点（鞍点）を含む一般的な概念

- **Definition Nash均衡点 Nash equilibrium point**
  - （混合）戦略の組$(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ が次の条件を満たすとき，$(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ を**Nash均衡点**とよぶ

$$E_A(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*) \geq E_A(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}^*) \quad \forall \boldsymbol{p}$$
$$E_B(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*) \geq E_B(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}) \quad \forall \boldsymbol{q}$$

- **Theorem 1**
  - （混合）戦略の組 $(\hat{p}, \hat{q})$ が互いに最適応答であるならばNash均衡点であり，逆も成り立つ．即ち，Nash均衡点の集合をEとすると，$E = D_A \cap D_B$
- **Theorem 2**
  - （混合）戦略の組$(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ がNash均衡点であるための必要十分条件は

$$E_A(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*) \geq E_A(s_{A_i}, \boldsymbol{q}^*) \quad \forall i = 1, \cdots, m$$
$$E_B(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*) \geq E_B(\boldsymbol{p}^*, s_{B_j}) \quad \forall j = 1, \cdots, n$$

2人非協力非零和ゲーム

- 2人非協力非零和ゲームのNash均衡点

$$\begin{array}{c|cc} & q_1 & q_2 \\ \hline p_1 & (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ p_2 & (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{array} = [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \qquad \begin{cases} p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1 \\ q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

プレイヤーA，Bが混合戦略をとった際の期待利得

$$\begin{aligned} E_A(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) &= \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{q} \\ &= \{(a_{11} - a_{21}) + (a_{22} - a_{12})\} p_1 q_1 - (a_{22} - a_{12}) p_1 + (a_{21} - a_{22}) q_1 + a_{22} \\ &= (\bar{r} + \hat{r}) p_1 q_1 - \hat{r} p_1 + \tilde{r} q_1 + a_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_B(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) &= \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{q} \\ &= \{(b_{11} - b_{21}) + (b_{22} - b_{12})\} p_1 q_1 - (b_{22} - b_{12}) p_1 + (b_{21} - b_{22}) q_1 + b_{22} \\ &= (\bar{c} + \hat{c}) p_1 q_1 - \hat{c} p_1 + \tilde{c} q_1 + b_{22} \end{aligned}$$

Theorem 2 より，

$$\text{Nash均衡点} \Leftrightarrow \begin{cases} E_A(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \geq E_A((1,0), \boldsymbol{q}) \\ E_A(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \geq E_A((0,1), \boldsymbol{q}) \end{cases} \begin{cases} E_B(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \geq E_B(\boldsymbol{p}, (1,0)) \\ E_B(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \geq E_B(\boldsymbol{p}, (0,1)) \end{cases}$$

2人非協力非零和ゲーム

- 2人非協力非零和ゲームのNash均衡点
  - プレイヤーAの最適応答について

$$\begin{cases} E_A(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \geq E_A((1,0), \boldsymbol{q}) \\ E_A(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \geq E_A((0,1), \boldsymbol{q}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{r} + \hat{r}) p_1 q_1 - \hat{r} p_1 + \tilde{r} q_1 + a_{22} \geq (\bar{r} + \hat{r}) q_1 - \hat{r} + \tilde{r} q_1 + a_{22} \\ (\bar{r} + \hat{r}) p_1 q_1 - \hat{r} p_1 + \tilde{r} q_1 + a_{22} \geq \tilde{r} q_1 + a_{22} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \{(\bar{r} + \hat{r}) q_1 - \hat{r}\}(1 - p_1) \leq 0 \\ \{(\bar{r} + \hat{r}) q_1 - \hat{r}\} p_1 \geq 0 \end{cases}$$

故に，$\boldsymbol{p} \in R_A(\boldsymbol{q})$ となるためには，

$(\bar{r} + \hat{r}) q_1 - \hat{r} > 0$となる$q_1$ $\longrightarrow \begin{cases} 1 - p_1 \leq 0 \\ p_1 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow p_1 = 1$

$(\bar{r} + \hat{r}) q_1 - \hat{r} = 0$となる$q_1$ $\longrightarrow \begin{cases} 1 - p_1 : \text{任意} \\ p_1 : \text{任意} \end{cases} \longrightarrow p_1 : \text{任意}$

$(\bar{r} + \hat{r}) q_1 - \hat{r} < 0$となる$q_1$ $\longrightarrow \begin{cases} 1 - p_1 \geq 0 \\ p_1 \leq 0 \end{cases} \longrightarrow p_1 = 0$

2人非協力非零和ゲーム

- 2人非協力非零和ゲームのNash均衡点
  - プレイヤーBの最適応答について

$$\begin{cases} E_B(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \geq E_B(\boldsymbol{p}, (1,0)) \\ E_B(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \geq E_B(\boldsymbol{p}, (0,1)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{c} + \hat{c}) p_1 q_1 - \hat{c} p_1 + \tilde{c} q_1 + b_{22} \geq (\bar{c} + \hat{c}) p_1 - \hat{c} p_1 + \tilde{c}_1 + b_{22} \\ (\bar{c} + \hat{c}) p_1 q_1 - \hat{c} p_1 + \tilde{c} q_1 + b_{22} \geq -\hat{c} p_1 + b_{22} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \{(\bar{c} + \hat{c}) p_1 + \tilde{c}\}(1 - q_1) \leq 0 \\ \{(\bar{c} + \hat{c}) p_1 + \tilde{c}\} q_1 \geq 0 \end{cases}$$

故に，$\boldsymbol{q} \in R_B(\boldsymbol{p})$ となるためには，

$(\bar{c} + \hat{c}) p_1 + \tilde{c} > 0$となる$p_1$ $\longrightarrow \begin{cases} 1 - q_1 \leq 0 \\ q_1 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow q_1 = 1$

$(\bar{c} + \hat{c}) p_1 + \tilde{c} = 0$となる$p_1$ $\longrightarrow \begin{cases} 1 - q_1 : \text{任意} \\ q_1 : \text{任意} \end{cases} \longrightarrow q_1 : \text{任意}$

$(\bar{c} + \hat{c}) p_1 + \tilde{c} < 0$となる$p_1$ $\longrightarrow \begin{cases} 1 - q_1 \geq 0 \\ q_1 \leq 0 \end{cases} \longrightarrow q_1 = 0$

2人非協力非零和ゲーム

- **2人非協力非零和ゲームのNash均衡点**
  - 例：

	q_1	q_2
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}

	A＼B	s_{B_1} (q_1)	s_{B_2} (q_2)
p_1	s_{A_1}	(6,5)	(2,7)
p_2	s_{A_2}	(3,4)	(6,1)

⇒

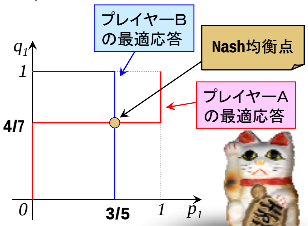
$$\begin{cases} \bar{r} = a_{11} - a_{21} = 6-3=3 \\ \hat{r} = a_{22} - a_{12} = 6-2=4 \\ \tilde{r} = a_{21} - a_{22} = 3-6=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{c} = b_{11} - b_{21} = 5-4=1 \\ \hat{c} = b_{22} - b_{12} = 1-7=-6 \\ \tilde{c} = b_{21} - b_{22} = 4-1=3 \end{cases}$$

$$(\bar{r}+\hat{r})q_1 - \hat{r} = 7q_1 - 4$$

$$\rightarrow \begin{cases} q_1 > 4/7 \rightarrow p_1 := 1 \\ q_1 = 4/7 \rightarrow p_1 : \text{任意} \\ q_1 < 4/7 \rightarrow p_1 := 0 \end{cases}$$

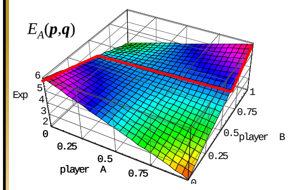
$$(\bar{c}+\hat{c})p_1 + \tilde{c} = -5p_1 + 3$$

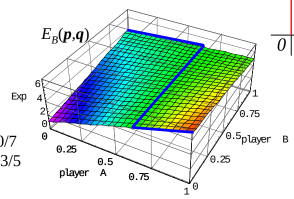
$$\rightarrow \begin{cases} p_1 < 3/5 \rightarrow q_1 := 1 \\ p_1 = 3/5 \rightarrow q_1 : \text{任意} \\ p_1 > 3/5 \rightarrow q_1 := 0 \end{cases}$$



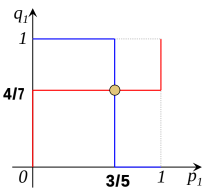
2人非協力非零和ゲーム

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	(6,5)	(2,7)
s_{A_2}	(3,4)	(6,1)





$E_A(\boldsymbol{p},(4/7,3/7))=30/7$
$E_B((3/5,2/5),\boldsymbol{q})=23/5$



2人非協力非零和ゲーム

- **Theorem 3**
  - （混合戦略まで拡大すると，）双行列ゲームには，少なくとも1つNash均衡点が存在する
- **Theorem 4（cf. Theorem 2）**
  - （混合）戦略の組 $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ がNash均衡点であるための必要十分条件は，$(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ が写像 $R_A(\boldsymbol{q}) \times R_B(\boldsymbol{p})$ の不動点であること．即ち，

$$\boldsymbol{p}^* \times \boldsymbol{q}^* \in R_A(\boldsymbol{q}^*) \times R_B(\boldsymbol{p}^*)$$

↑

戦略の組が均衡点であるための必要十分性（Theorem 2, 4など）
の証明は，「Brouwerの不動点定理」「角谷の不動点定理」などから

演習1：

- 次の双行列ゲームのNash均衡点を求めよ

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	(-24, 12)	(4 , 6)
s_{A_2}	(6 , -8)	(-2 , 2)

Coffee Brake!

- **John F. Nash (1928-)**
  - 紹介サイトの情報

Non-Cooperative Games Nash [pdf]

  - **A Beautiful Mind**

いずれも2004年11月9日（火）取得の情報

2人非協力非零和ゲーム

- 例2：囚人のジレンマ **prisoner's dilemma**
  - 2人の凶悪犯が別個に取り調べを受けている
  - 現状では証拠不十分で軽い罪でしか起訴できないため，2人とも3年
  - 各囚人は司法取引を持ちかけられ，応じた方は1年，応じない方は10年，ただし，2人ともが応じた場合は2人とも8年

⇩

A＼B	黙秘	自白
黙秘	(3,3)	(10,1)
自白	(1,10)	(8,8)

注意：値が小さい方が嬉しい！

※司法取引：被告が自分の罪を認める代わりに罪を軽くしてもらうこと

2人非協力非零和ゲーム

- 例2：囚人のジレンマ prisoner's dilemma

	A＼B	黙秘 (q_1)	自白 (q_2)
p_1	黙秘	(3,3)	(10,1)
p_2	自白	(1,10)	(8,8)

注意：値が小さい方が嬉しい！

明らかにもっと良い解がある
Pareto最適でない！

各プレイヤーとも，「自白」が支配戦略！ 結果として，（自白，自白）がNash均衡点であり，ゲームは支配可解

最適応答原理に従って考えても…，

$D_A = \{((0,1),\boldsymbol{q}) | 0 \le q \le 1\}$

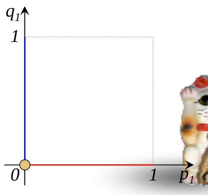
$D_B = \{(\boldsymbol{p},(0,1)) | 0 \le p \le 1\}$

$\longrightarrow D := D_A \cap D_B = \{((0,1),(0,1))\}$

最適応答原理に従ってまじめに計算しても…

$$\begin{cases}(\bar{r}+\hat{r})q_1 - \hat{r} = 0q_1 - 2 < 0 \\ (\bar{c}+\hat{c})p_1 + \tilde{c} = 0p_1 - 2 < 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}p_1 = 0 \\ q_1 = 0\end{cases}$$

注意：±逆で計算



2人非協力非零和ゲーム

- Nash均衡点が最適戦略か？
  - 2人零和ゲーム
    - ミニマックス戦略が最適戦略！ ←行動の指針を与えてくれる
  - 2人非零和ゲーム
    - Nash均衡点が最適戦略を与えるわけではない！
    - ゲームの値が異なる複数の均衡点が存在する場合がある！
    - Nash均衡点は，必ずしもPareto最適ではない！

→ 最適応答原理は不十分かも…！？（しかし他に適切なものがあるか？）

Nash均衡点の精緻化

非協力ゲーム

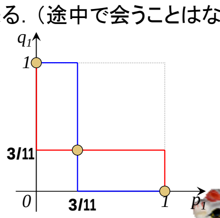
•得られる解の状態を示すことで，何らかの均衡戦略をとるべきことを教える
•均衡状態が複数あることを示すことで，戦略決定判断が困難であることも教える

2人非協力非零和ゲーム

- 例3：面会ゲーム
  - 遠く離れている2人が至急会う必要がある
  - 今居る場所は互いにわかっており，会いに行くか，相手が来るのを待つかの選択が出来る．（途中で会うことはない）

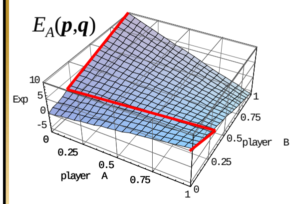
A＼B	行く	待つ
行く	(-6,-6)	(6,10)
待つ	(10,6)	(0,0)

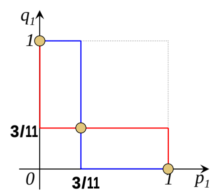
$$\begin{cases}(\bar{r}+\hat{r})q_1 - \hat{r} = -22q_1 + 6 \begin{cases} > 0 \rightarrow p_1 = 1 \\ = 0 \rightarrow p_1 \in [0,1] \\ < 0 \rightarrow p_1 = 0 \end{cases} \\ (\bar{c}+\hat{c})p_1 + \tilde{c} = -22p_1 + 6 \begin{cases} > 0 \rightarrow q_1 = 1 \\ = 0 \rightarrow q_1 \in [0,1] \\ < 0 \rightarrow q_1 = 0 \end{cases}\end{cases}$$

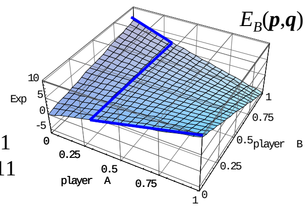


Nash均衡点
((0,1),(1,0)),
((3/11,8/11),(3/11,8/11)),
((1,0),(0,1))

2人非協力非零和ゲーム







$E_A(\boldsymbol{p},(3/11,8/11))=30/11$
$E_B((3/11,8/11),\boldsymbol{q})=30/11$

2人非協力非零和ゲーム

- 例4：弱虫ゲーム chicken game
  - 2人の人間が2台の車をそれぞれ運転する
  - 2人は，お互いに向かって車を走らせる
  - 2台ともそのまま走り続ければ，やがてぶつかり死ぬため，直前で回避してよい．
  - しかし，相手より先によけた（進路を変えた）プレイヤーは「チキン」と罵られ，臆病者のレッテルを貼られる

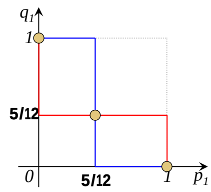
A＼B	避ける	避けない
避ける	(2,2)	(0,9)
避けない	(9,0)	(-5,-5)

2人非協力非零和ゲーム

- 例4：弱虫ゲーム chicken game

A＼B	避ける	避けない
避ける	(2,2)	(0,9)
避けない	(9,0)	(-5,-5)

$$\begin{cases}(\bar{r}+\hat{r})q_1 - \hat{r} = -12q_1 + 5 \begin{cases} > 0 \rightarrow p_1 = 1 \\ = 0 \rightarrow p_1 \in [0,1] \\ < 0 \rightarrow p_1 = 0 \end{cases} \\ (\bar{c}+\hat{c})p_1 + \tilde{c} = -12p_1 + 5 \begin{cases} > 0 \rightarrow q_1 = 1 \\ = 0 \rightarrow q_1 \in [0,1] \\ < 0 \rightarrow q_1 = 0 \end{cases}\end{cases}$$



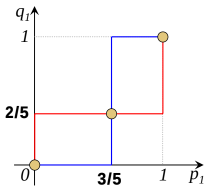
Nash均衡点
((0,1),(1,0)), → (9,0)
((5/12,7/12),(5/12,7/12)), → $E_A(\boldsymbol{p},(5/12,7/12))=10/12$, $E_B((5/12,7/12),\boldsymbol{q})=10/12$
((1,0),(0,1)) → (0,9)

2人非協力非零和ゲーム

- 例1：恋人達のジレンマ **battle of sexes**

男＼女	野球	映画
野球	(2,1)	(-1,-1)
映画	(-1,-1)	(1,2)

$$\begin{cases} (\bar{r}+\hat{r})q_1-\hat{r}=5q_1-2 \begin{cases} >0 \to p_1=1 \\ =0 \to p_1 \in [0,1] \\ <0 \to p_1=0 \end{cases} \\ (\bar{c}+\hat{c})p_1+\tilde{c}=5p_1-3 \begin{cases} >0 \to q_1=1 \\ =0 \to q_1 \in [0,1] \\ <0 \to q_1=0 \end{cases} \end{cases}$$



Nash均衡点
（(**1,0**),(**1,0**)), → (2,1)
（(**3/5,2/5**),(**2/5,3/5**)), → $E_A(\boldsymbol{p},(5/12,7/12))=1/5$, $E_B((5/12,7/12),\boldsymbol{q})=1/5$
（(**0,1**),(**0,1**)) → (1,2)

2人非協力非零和ゲーム

- 例5：純粋戦略全ての組合せが**Nash**均衡

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	(8,8)	(4,8)
s_{A_2}	(8,4)	(4,4)

全ての戦略の組が**Nash**均衡点！

Nash均衡点の精緻化

友情ルール：自分の利得が同じならば，
相手の利得が大きい方の戦略を選ぶ

(s_{A_1},s_{B_1})が均衡点となる

2人非協力非零和ゲーム

- 例6：共有地の悲劇（囚人のジレンマのn人拡張版）
  - 数軒の酪農家が共有の牧草地を所有している．各酪農家が先を争って牛を放牧し，自分の利益最大をはかる限り，牛の数を増やし続けると，待っているのは共有地の荒廃という悲劇である．
  - 単純なモデルでの考察
    - 酪農家は4軒 (i=1,2,3,4)
    - 酪農家iが放牧する牛の数 q_i
    - 各酪農家は3頭まで牛を購入でき，購入価格は全て等しく2
    - 酪農家iの収益をx_iとし，$x_i = q_i\{16-(q_1+q_2+q_3+q_4)\}-2\,q_i$

たくさん放牧すると収益が減る！

i＼others	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
2	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6
3	33	30	27	24	21	18	15	12	9	6

弱支配

Nash均衡点

Nash均衡点と線形相補性問題

- **Definition** 戦略的同等性
  - ゲーム**G**の**Nash**均衡点が**G'**のそれであり，かつその逆も成立するとき，**2**つのゲームは**戦略的に同等**であるという
- **Theorem 5**
  - **2**つの双行列ゲーム**G, G'**において，任意の要素について，

$$\exists\alpha_1>0,\alpha_2>0,\exists\beta_1,\beta_2,\quad \begin{cases} a'_{ij}=\alpha_1 a_{ij}+\beta_1 \\ b'_{ij}=\alpha_2 b_{ij}+\beta_2 \end{cases}$$

という関係があるとき，**G**と**G'**は戦略的に同等である

  - 例：

G

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	(3,-1)	(0,2)
s_{A_2}	(-2,4)	(5,-2)

戦略的同等 ⇔

G'

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	(5,-1)	(-1,8)
s_{A_2}	(-5,14)	(9,-4)

$$\alpha_1=2,\beta_1=-1,\alpha_2=3,\beta_2=2$$

Nash均衡点と線形相補性問題

- **Nash**均衡点を求める

$(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)$ **Nash均衡点**

$\overset{\text{Th.2}}{\Leftrightarrow}$
$$\begin{cases} v_1 := E_A(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) \ge E_A(s_{A_i},\boldsymbol{q}^*) & \forall i=1,\cdots,m \\ v_2 := E_B(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) \ge E_B(\boldsymbol{p}^*,s_{B_j}) & \forall j=1,\cdots,n \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} v_1 \ge \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j^* & \forall i=1,\cdots,m \\ v_2 \ge \sum_{i=1}^{m} b_{ij}p_j^* & \forall j=1,\cdots,n \end{cases}$$

$\overset{\text{Th.5}}{\Leftrightarrow}$
$$\begin{cases} v_1 \ge \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}q_j^* & \forall i=1,\cdots,m \\ v_2 \ge \sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_{ij}p_j^* & \forall j=1,\cdots,n \end{cases}$$
ただし，$(\forall i,j,\ \tilde{a}_{ij},\tilde{b}_{ij}>0)$ → $v_1,v_2>0$

$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} 1 \ge \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\tilde{q}_j & \forall i=1,\cdots,m \\ 1 \ge \sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_{ij}\tilde{p}_i & \forall j=1,\cdots,n \end{cases}$$
ただし，$\begin{cases} \tilde{q}_j := q_j^*/v_1 \\ \tilde{p}_i := p_i^*/v_2 \end{cases}$

→ $\begin{cases} u_i := 1-\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\tilde{q}_j (\ge 0) & (i=1,\cdots,m) \\ w_j := 1-\sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_{ij}\tilde{p}_i (\ge 0) & (j=1,\cdots,n) \end{cases}$ とおく

Nash均衡点と線形相補性問題

- **Proposition 1** 相補性 **complementarity**

$$\begin{cases} u_i := 1-\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\tilde{q}_j \\ w_j := 1-\sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_{ij}\tilde{p}_i \end{cases}$$

$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} u_i\tilde{p}_i = 0 \ (j=1,\cdots,n) \\ \sum_{j=1}^{n} w_j\tilde{q}_j = 0 \ \ (i=1,\cdots,m) \end{cases}$ が成立

まとめると…

Nash均衡点が存在する $\Leftrightarrow$

$$\left| \begin{array}{l} u_i := 1-\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}q_j \ \ (i=1,\cdots,m) \\ w_j := 1-\sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_{ij}p_i \ \ (j=1,\cdots,n) \\ \sum_{i=1}^{m} u_i p_i = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} w_j q_j = 0 \\ u_i, p_i \ge 0 \ (i=1,\cdots,m) \\ w_j, q_j \ge 0 \ (j=1,\cdots,n) \end{array} \right.$$

を満たす $\begin{array}{l} u_i, p_i (i=1,\cdots,m) \\ w_j, q_j (j=1,\cdots,n) \end{array}$ が存在

Nash均衡点と線形相補性問題

- **LCP, Linear Complementarity Problem**

$$\left|\begin{array}{l} u_i := 1-\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}q_j \ \ (i=1,\cdots,m) \\ w_j := 1-\sum_{i=1}^{m}\tilde{b}_{ij}p_i \ \ (j=1,\cdots,n) \\ \sum_{i=1}^{m} u_i p_i = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} w_j q_j = 0 \\ u_i, p_i \ge 0 \ \ (i=1,\cdots,m) \\ w_j, q_j \ge 0 \ \ (j=1,\cdots,n) \end{array}\right.$$

を満たす解 $\begin{cases} u_i, p_i (i=1,\cdots,m) \\ w_j, q_j (j=1,\cdots,n) \end{cases}$

↓

$\begin{cases} p_i^* := p_i / \sum_i p_i \\ q_j^* := q_j / \sum_j q_j \end{cases}$ がNash均衡点

⇕

$$\left|\begin{array}{l} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}, \\ \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} = 0, \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \ge \boldsymbol{0} \end{array}\right.$$

ただし，

$$\boldsymbol{x} := \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} := \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{z} := \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{M} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

B=-AだとLP ⇔ 零和ゲーム

Lemke法（M≧0）
内点法（M：PSD,P_0,…）

戦略形ゲームの応用 （岡田章『ゲーム理論』p.49-59等）

- 応用例1：クールノー複占市場
  - 2企業（i=1,2）が同質な財を生産し，同一市場に供給している
  - 企業iの供給量q_i(≧0) → 財の価格 $p=\max\{a-b(q_1+q_2), 0\}$, (a,b>0)
  - 企業iの費用関数 $C_i(q_i)= c_i q_i$, $(0<c_i<a)$ 限界費用
  - 企業iの利潤関数 $\pi_i(q_1, q_2)=pq_i - c_i q_i$ 各企業は利潤最大化したい！

クールノー・ナッシュ均衡 Cournot-Nash equilibrium

$$(q_1^*, q_2^*): C.N.eq. \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1(q_1^*, q_2^*) = \max_{q_1 \ge 0} \pi_1(q_1, q_2^*) \\ \pi_2(q_1^*, q_2^*) = \max_{q_2 \ge 0} \pi_2(q_1^*, q_2) \end{cases}$$

  - 企業i（=1,2）の企業j（≠i）に対する最適応答対応

$$\pi_i(q_1,q_2) = \begin{cases} (a-c_i-b(q_1+q_2))q_i & \text{if } 0 \le q_i < a/b - q_j \\ -c_i q_i & \text{if } a/b - q_j \le q_i \end{cases}$$

p>0　p=0

$$\Rightarrow q_i^* = \begin{cases} \dfrac{a-c_i}{2b} - \dfrac{q_j}{2} & \text{if } 0 \le q_i \le \dfrac{a-c_i}{b} \\ 0 & \text{if } \dfrac{a-c_i}{b} < q_i \end{cases} \quad \left[(\because) \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 0, \frac{\partial^2 \pi_i}{\partial q_i^2} < 0 \quad (i=1,2) \right]$$

戦略形ゲームの応用

- 応用例1：クールノー複占市場

$$\begin{cases} \dfrac{a-c_i}{2b} - \dfrac{q_j}{2} & \text{if } 0 \le q_i \le \dfrac{a-c_i}{b} \\ 0 & \text{if } \dfrac{a-c_i}{b} < q_i \end{cases}$$

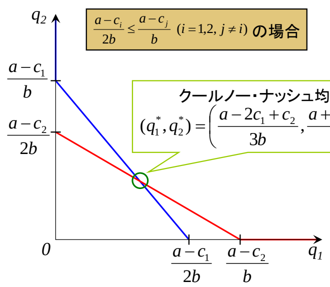
財の価格

$$p^* = \frac{a+c_1+c_2}{3}$$

各企業の利潤

$$\begin{cases} \pi_1(q_1^*, q_1^*) = \dfrac{(a-2c_1+c_2)^2}{9b} \\ \pi_2(q_1^*, q_1^*) = \dfrac{(a+c_1-2c_2)^2}{9b} \end{cases}$$

$\dfrac{a-c_i}{2b} \le \dfrac{a-c_j}{b} \ (i=1,2,\ j \ne i)$ の場合



クールノー・ナッシュ均衡点

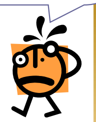
$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{a-2c_1+c_2}{3b}, \frac{a+c_1-2c_2}{3b} \right)$$

パレート最適ではない

例：$c_1=c_2$の時，$q_1=q_2=(a-c)/4b$ とした方が，どちらの企業もより多くの利潤が得られる

戦略形ゲームの応用

- 応用例2：寄付金ゲーム
  - ある町の町長が，公共事業のため，n人の住人に寄付を募る
  - 各住人は，寄付額 0円～1000円 を自分の好きな分だけ寄付
  - 寄付総額の2倍を，n人の住人に均等に分配する
  - 住人i (=1,…,n) の戦略（寄付額）：x_i　(0≦x_i≦1000)
  - 住人i (=1,…,n) の利得関数：　$u_i(x_1,\cdots,x_n) = 2\sum_{k=1}^{n} x_k - x_i$



n>2 の時，戦略 x_i*=0 が，他の戦略 x_i >0 に対する支配戦略となる！

→ 戦略の組 $\boldsymbol{x}$*=(0,…,0) が唯一の均衡点，即ち，誰も寄付しない！

パレート最適ではない

全ての住人が**1000**円寄付すると，全ての住民の利得は**1000**円であり，均衡点より望ましい

しかし，$\boldsymbol{x}$=(1000,…,1000)では，どの住民も裏切る動機を持つ

$$u_i(0, x_{-i}) = 2000\frac{n-1}{n} (>1000)$$

ただ乗り free-riding:
　他人の貢献を利用して個人的利益を得る行為

戦略形ゲームの応用

- 応用例3：電力消費ゲーム
  - ある都市で，n人の住人がクーラーを所持．暑い日の出来事
  - 各住人i (=1,…,n)の戦略と，その費用，及び効用は，
    - 戦略：低温設定（x_i=α），電力消費1000W，効用U
    - 戦略：中温設定（x_i=β），電力消費500W，効用u　　(U>u>0)
  - この都市の停電確率は，総電力量をQとしたとき， 停電臨界点

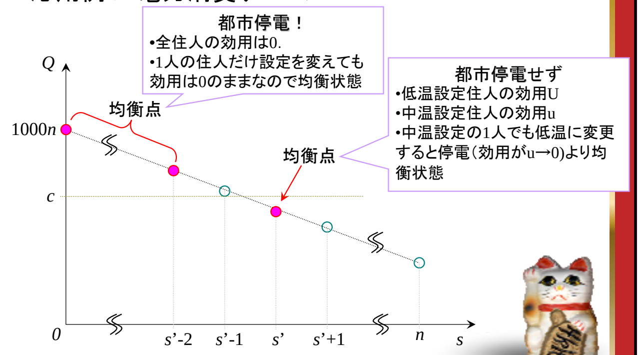
$$P(Q) = \begin{cases} 0 & (\text{if } 0 \le Q \le c) \\ 1 & (\text{if } c < Q) \end{cases} \quad \text{where } 500n < c < 1000n$$

  - 節電する住人の数をs (0≦s≦n)とすると，総電力消費量は
    - $Q(s) := 500s + 1000(n-s)=1000n-500s$
  - 住人i の効用は
    - $u_i(x_1,\cdots,x_n) = \begin{cases} 0 & (\text{if } c < Q(s)) \\ U & (\text{if } Q(s) \le c, x_i = \alpha) \\ u & (\text{if } Q(s) \le c, x_i = \beta)) \end{cases}$

→ 減少関数$Q(s)$について，$Q(s')$≦c≦$Q(s'-1)$ を満たすs'が唯一定まり，0≦s*≦s'-2, s*=s'を満たす全てのsが均衡点

戦略形ゲームの応用

- 応用例3：電力消費ゲーム



戦略形ゲーム

2人のプレイヤーが互いに相手と異なる戦略を交互に取る，即ち，(C,D)→(D,C)→(C,D)→…とするときの期待利得が，協調行動(C,C)の利得より小さい状況

- 囚人のジレンマ型ゲーム

A＼B	C	D
C	(S_1, S_2)	(W_1, B_2)
D	(B_1, W_2)	(T_1, T_2)

ただし，B_i (best) > S_i (second) > T_i (third) > W_i (worst)

さらに $S_i = \frac{B_i + W_i}{2}\ (i=1,2)$ も満たすならば，『**標準的な囚人のジレンマ型ゲーム**』とよばれる

$$\begin{cases} \bar{r} = S_1 - B_1(<0),\ \hat{r} = T_1 - W_1(>0),\ \tilde{r} = B_1 - T_1(>0) \\ \bar{c} = S_2 - W_2(>0),\ \hat{c} = T_2 - B_2(<0),\ \tilde{c} = W_2 - T_2(<0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\bar{r} + \hat{r}| \le |\hat{r}| \\ |\bar{c} + \hat{c}| = |(S_2 - W_2) + (T_2 - B_2)| \\ \qquad\quad = |(S_2 - B_2) - (W_2 - T_2)| \le |W_2 - T_2| = |\tilde{c}| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} < 0 \\ (\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1^* = 0 \\ q_1^* = 0 \end{cases} \quad \to \text{Nash均衡は (D,D)}$$

$$\begin{cases} f_1(q_2) := (\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} \\ f_2(p_1) := (\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(q_2) > 0 \to p_1 = 1 \\ f_1(q_2) = 0 \to p_1 \in [0,1], \\ f_1(q_2) < 0 \to p_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f_2(p_1) > 0 \to q_2 = 1 \\ f_2(p_1) = 0 \to q_2 \in [0,1] \\ f_2(p_1) < 0 \to q_2 = 0 \end{cases}$$

戦略形ゲーム

- 演習：
  - 身近な所，あるいは社会において，囚人のジレンマと同じ状況となっていると思われる例を2つ上げよ．

参考文献

- 鈴木光男「ゲーム理論入門」共立出版（1981, 2003（新装版））
- 鈴木光男「新ゲーム理論」勁草書房（1994）
- 岡田章「ゲーム理論」有斐閣（1996）
- 今野浩「線形計画法」日科技連（1987）
- R. Axelrod, 松田裕之訳「つきあい方の科学」ミネルヴァ書房（1998）
- ……