Logo

意思決定科学：ゲーム理論3

情報学部　堀田敬介

2006/12/1,Fri.

Contents

協力ゲームの理論

- 2人交渉ゲーム
  - 交渉問題（bargaining problem）
    - 交渉を行う　←何らかの共通の認識をもつ
    - 共通の認識を明確に定義し，交渉のルールと解を求める
  - 例：恋人達のジレンマ
    - 事前に話し合いを行う
      - ジャンケンで勝った方，強く主張した方，くじ引き，etc…

男＼女	野球	映画
野球	(2, 1)	(-1,-1)
映画	(-1,-1)	(1, 2)


  - 結合純戦略（joint pure strategy）
    - （野球，野球），（野球，映画），（映画，野球），（映画，映画）
  - 結合混合戦略（joint mixed strategy）
    - $z=(z_{11},z_{12},z_{21},z_{22})$ ，$\begin{cases} z_{11}+z_{12}+z_{21}+z_{22}=1 \\ z_{11},z_{12},z_{21},z_{22}\geq 0 \end{cases}$

協力ゲームの理論

- 結合混合戦略と実現可能集合
  - 双行列　$G=(a_{ij},b_{ij})$ $(i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n)$
  - 結合混合戦略
    - 結合純戦略(i,j)がとられる確率を z_{ij}としたときの確率分布

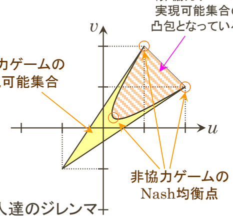
$$z=(z_{11},z_{12},\cdots,z_{mn}) \quad ,\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}=1 \\ z_{ij}\geq 0 \ \ (i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n) \end{cases}$$

    - 結合（混合）戦略集合：$Z=\{z\}$
  - 二人の期待利得

$$u(z)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_{ij}$$

$$v(z)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}z_{ij}$$

  - 実現可能集合（到達可能集合）
    - $R=\{(u(z),v(z))\mid z\in Z\}$



協力ゲームの理論

- 交渉の基準点

交渉 → 成功　利得

≧

交渉 →(決裂) 失敗　利得＝最悪の場合でも保証される利得
＝maximin値

交渉が不成功に終わったとしても期待できる保証水準
＝交渉の基準点

$$\begin{cases} c_1 := \max\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j \\ c_2 := \max\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i b_{ij} q_j \end{cases}$$

- 例：恋人達のジレンマ

交渉 → 成功　・デート成立

交渉 →(決裂) 失敗　・家に帰って不貞寝　$(c_1,c_2)=(0,0)$
・非協力ゲームをやる　$(c_1,c_2)=(1/5,1/5)$

交渉の基準点

協力ゲームの理論

- 2人交渉ゲーム
  - 演習：


A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	(6, 7)	(0, 9)
s_{A_2}	(9, 0)	(2, 3)

1. （協力）実現可能集合を描いてみよう
2. このゲームを協力ゲームの出発点として，交渉の基準点を考えよう

協力ゲームの理論

- 交渉問題の要素と定式化
  - プレイヤーの集合 $N = \{1,2,\dots,n\}$
  - 交渉の基準点 $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2,\dots, c_n)$ ← 交渉不成立の場合の保証水準
  - 実現可能集合 $S = \{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2,\dots, x_n) \}$
    - Sの満たすべき性質
      1. n次元Euclid空間の有界閉凸集合
      2. 基準点 $\boldsymbol{c}$ は S に含まれる
      3. S には，任意の i について，$x_i > c_i$ なる点を少なくとも1つ含む

    ※プレイヤーに $\boldsymbol{c}$ の共通認識があるとき，$\boldsymbol{c}$を交渉の基準点とよぶ
    （ここでは c は所与とする）
  - 交渉問題　$(N, S, \boldsymbol{c})$
  - 交渉の妥結点　$\boldsymbol{s} = (s_1, s_2,\dots, s_n)$
    - 交渉問題 $(N, S, \boldsymbol{c})$ が与えられたとき，全てのプレイヤーが納得する S に属するただ一つの点 $\boldsymbol{s}$ が選び出されたとき，その点 $\boldsymbol{s}$
  - 交渉解　F: $(N, S, \boldsymbol{c}) \to \boldsymbol{s}$
    - 交渉問題 $(N, S, \boldsymbol{c})$ が与えられたとき，$(N, S, \boldsymbol{c})$ に対してただ一つの妥結点 $\boldsymbol{s}$ を対応させるルール

    交渉のルールが共通認識となっていれば，基準点を定める交渉となる！

協力ゲームの理論

- 交渉の妥結点の満たすべき公準（その1）
  - 公準1：個人合理性
    - $\boldsymbol{x}$ が個人合理的 ⇔ $x_i \geq c_i$ $(i=1,\dots,n)$
    - $F(N, S, \boldsymbol{c})$ の妥結点 $\boldsymbol{s}$ が個人合理的のとき，F は個人合理的であるという

    交渉成立時は，交渉不成立時に保証される利得 $\boldsymbol{c}$ より多くの利得が保証されねばならない
  - 公準2：強個人合理性
    - $\boldsymbol{x}$ が強個人合理的 ⇔ $x_i > c_i$ $(i=1,\dots,n)$
    - $F(N, S, \boldsymbol{c})$ の妥結点 $\boldsymbol{s}$ が強個人合理的のとき，F は強個人合理的であるという
  - 公準3：パレート最適性（共同合理性，効率性）
    - 交渉の妥結点 $F(N, S, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{s}$ はパレート最適でなければならない
  - 公準4：弱パレート最適性
    - 交渉の妥結点 $F(N, S, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{s}$ は弱パレート最適でなければならない

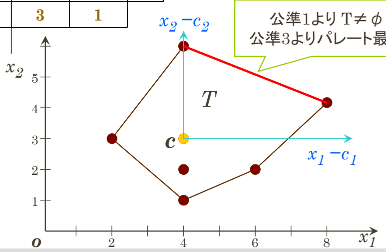
協力ゲームの理論

- 交渉領域
  - $T = \{ \boldsymbol{s} \in S \mid \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{c} \}$
  - 例：

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	min	max
s_{A_1}	(8, 4)	(2, 3)	(4, 1)	2	4
s_{B_2}	(6, 2)	(4, 6)	(4, 2)	4	
min	2	3	1		
max	3				

公準1より T≠φ
公準3よりパレート最適

各々のmaximinを
交渉の基準点 $\boldsymbol{c} = (4, 3)$
とする



協力ゲームの理論

- Nash交渉解
  - Nash積
    $$\prod_{i\in N}(x_i-c_i)=(x_1-c_1)\times\cdots\times(x_n-c_n)$$
    各プレイヤーについて，基準点からの利得の増分の積
  - Nash交渉解
    - 交渉問題 $(N, S, \boldsymbol{c})$ のNash交渉解は，Nash積を最大にする S の点 $\boldsymbol{s}$
      $$(s_1-c_1)\times\cdots\times(s_n-c_n)=\max_{x\in S,x\geq c}(x_1-c_1)\times\cdots\times(x_n-c_n)$$
      $$\text{or } N(S,\boldsymbol{c})=\arg\max\left\{\prod_{i\in N}(x_i-c_i)\ \middle|\ \boldsymbol{x}\in S,\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{c}\right\}$$

Nash交渉解は，利得の測定法から独立なので，プレイヤー毎に利得を正一次変換しても変わらない．（効用の個人間比較を排除）

← 基準点を 0 に変換して考えることが出来る

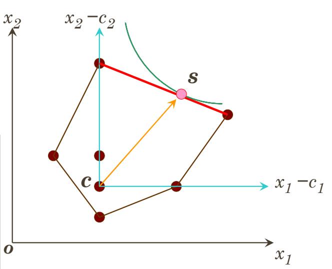
協力ゲームの理論

- Nash交渉解
  $$(s_1-c_1)\times\cdots\times(s_n-c_n)=\max_{x\in S,x\geq c}(x_1-c_1)\times\cdots\times(x_n-c_n)$$
  - 例：

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	(8, 4)	(2, 3)	(4, 1)
s_{B_2}	(6, 2)	(4, 6)	(4, 2)

基準点 $\boldsymbol{c} = (4, 3)$ とする
↑ 各々のmaximin

演習：$y_1=1/2x_1$という正一次変換を施して考えてみよう！
・共同合理性（パレート最適）を満たす部分は？
・基準点 $\boldsymbol{c}$ は？
　さらに $z_1=y_1-2$, $z_2=x_2-3$ としたとき，
・Nash解はどう書けるか？
・妥結点を求めもとの問題の妥結点を出そう！



協力ゲームの理論

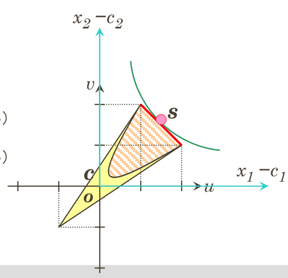
- Nash交渉解
  - 例：交渉力（bargaining power）
    $$(x_1-c_1)^a\times(x_2-c_2)^b,\quad [a\geq 0,b\geq 0,a+b>0]$$

男＼女	野球	映画
野球	(2, 1)	(-1,-1)
映画	(-1,-1)	(1, 2)

・$a > b$ の時（プレイヤーAの方が交渉力が強い）

・$a < b$ の時（プレイヤーBの方が交渉力が強い）

・$a = b$ の時（双方の交渉力が等しい）
　Nash交渉解：$(u^*,v^*) = (3/2, 3/2)$



協力ゲームの理論

- 交渉の妥結点の満たすべき公準(その2)
  - 公準5:利得の正一次変換からの独立性
    - 利得を測定する単位や尺度を変えても本質的に変わらない

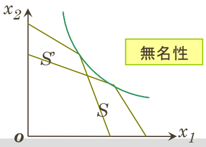
基準点を c=0 と出来る

  - 公準6:対称性
    - 例えば，2人交渉問題(S)において，『交渉領域 S が y=x に関して対称ならば，ルール F による妥結点における2人の利得が等しい』を満たす
    - 一般には，実現可能集合 S の任意の置換 $\pi(S) = \{\ \pi(x)\ |\ x \in S\ \}$ に対し，『$\pi(S) = S \ \Rightarrow\ F_i(S) = F_j(S)$ for all i, j』を満たす

プレイヤーの番号を付替えても，交渉領域が変化しないとき，全てのプレイヤーの受け取る利得が同じ

  - 公準7:無名性(匿名性)
    - 交渉問題 (N, S, $\boldsymbol{0}$) において，
$$F[\pi(S)] = \pi[F(S)]$$

プレイヤーの番号を付替えた時，交渉領域が変化したとしても，妥結点におけるプレイヤーの受け取る利得が番号の付け方に独立，例え匿名にしても変わらない



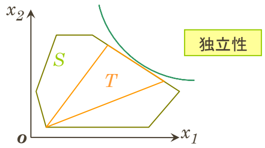
協力ゲームの理論

- 交渉の妥結点の満たすべき公準(その3)
  - 公準8:無関連な代替案からの独立性
    - 交渉問題 (N, S, $\boldsymbol{0}$) と妥結点 $\boldsymbol{s}$ において，
$$T \subset S,\ F(S) \in T \ \Rightarrow\ F(S) \in F(T)$$

交渉の場を (S, $\boldsymbol{c}$) から (T, $\boldsymbol{c}$) に変えても妥結点 $\boldsymbol{s}$ は変わらない

  - 公準9:全体と部分との整合性
    - 交渉問題 (N, S) の解 F について，$F(T)$=t とする．$M \subset N$ を考え，妥結点 t の N-M 人の利得を固定し，Mのプレイヤーだけの交渉問題 (M, S) を考える．このとき，解 F によって M のプレイヤーの利得は，(N, S) でも (M, S) でも変わらない．

整合性を持たないと，プレイヤーが色々な部分集合に分かれて交渉が始まってしまう！



協力ゲームの理論

- Nash交渉解の一意性
  - Nashの定理 (1950)
    - 2人交渉問題のNash交渉解は，次の5つの公準を満たす唯一の解
      - 個人合理性(公準1)，パレート最適性(公準3)，利得測定法からの独立性(公準5)，対称性(公準6)，無関連な代替案からの独立性(公準8)
  - Rothの定理 (1977)
    - 任意の交渉問題において，Nash交渉解は次の4つの公準を満たす唯一の解
      - 強個人合理性(公準2)，利得測定法からの独立性(公準5)，対称性(公準6)，無関連な代替案からの独立性(公準8)
    - 任意の交渉問題において，次の3つの公準
      - 利得測定法からの独立性(公準5)，対称性(公準6)，無関連な代替案からの独立性(公準8)

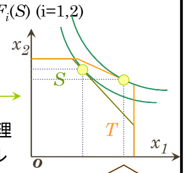
    を満たすのはNash解か，非合意解 $F(S) = \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ のみ．
  - Lensbergの定理 (1985)
    - 任意の交渉問題において，Nash交渉解は次の5つの公準を満たす唯一の解
      - 個人合理性(公準1)，パレート最適性(公準3)，利得測定法からの独立性(公準5)，無名性(公準7)，全体と部分との整合性(公準9)

協力ゲームの理論

交渉問題の理想点：
$M(S)$=$(M(S)_1, M(S)_2)$
$M(S)_i$:交渉領域S内でのプレイヤーiの利得上限(最大限度額)

- 交渉の妥結点の満たすべき公準(その4)
  - 公準10:個人単調性
    - 2つの交渉問題 (N, S, $\boldsymbol{c}$)，(N, T, $\boldsymbol{c}$) において，解Fが個人単調
$\stackrel{\Delta}{\longleftrightarrow}$ $T \supset S$, かつ $M(T)_i$=$M(S)_i$ (i=1,2) $\Rightarrow$ $F_i(T) \geqq F_i(S)$ (i=1,2)

・公準8への批判
・Nash解は公準10を満たさないという批判



- Kalai & Smorodinsky解
  - 交渉領域Sのパレート最適解集合と，交渉基準点$\boldsymbol{c}$と理想点$M(S)$とを結ぶ直線との交点を妥結点とするルール
  - Kalai&Smorodinskyの定理(1975)
    - 任意の2人交渉問題において，Kalai&Smorodinsky解は次の5つの公準を満たす唯一の解
      - 個人合理性(公準1)，パレート最適性(公準3)，利得測定法からの独立性(公準5)，対称性(公準6)，個人単調性(公準10)

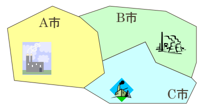
交渉領域がSからTに**拡大**したのに，Nash解ではプレイヤー2の利得が**減少**！

協力ゲームの理論

- 例題
  - → [例題6.1] [2] p.151～
  - → [例題6.2] [2] p.155～

協力ゲームの理論

- 提携と配分
  - 例題:ゴミ処理場建設([数学セミナー](2004/8) p.32～)
    - 3市が各々独自に建設 … A=5億円，B=3億円，C=2億円
    - 共同施設の建設 … A+B=7.2億円，B+C=4.8億円，C+A=6.6億円，A+B+C=8億円



例えば，A市とB市はそれぞれ独自に建設する(5億＋3億＝8億)
よりも，提携して共同施設を建設(7.2億)したほうが安い．
→ 0.8億円の得をするということ！

協力関係を結んだプレイヤーのグループ＝**提携**
提携が作られることによって得られる便益の値を与える関数＝**特性関数**

協力ゲームの理論

- 提携と配分
  - 定義：提携ゲーム
    - ゲームのルール
      - （1）プレイヤー $N=\{1,2,\ldots,n\}$
      - （2）N の任意の部分集合は提携可能
      - （3）譲渡可能効用が存在し，提携内で別払い可能
      - 〔別払いのあるゲーム(games with sidepayment)〕

譲渡可能効用(transformable utility)が存在 ＝ 利得の一部をプレイヤー間で自由に譲渡でき，A→Bへ譲渡したときの，Aの損失とBの利得が等しい

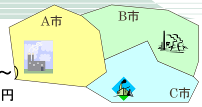
プレイヤーの間で利得を自由に譲渡可能

- 任意の提携 S にたいし，実数値を対応させる関数 $v(S)$ が存在
  - v：特性関数(characteristic function)
  - $v(S)$：提携 S のもつ提携値

(N, v)：提携形ゲーム (coalitional game)

協力ゲームの理論

- 提携と配分
  - 例題：ゴミ処理場建設（[数学セミナー](2004/8) p.32〜）
    - 3市が各々独自に建設 … A=5億円，B=3億円，C=2億円
    - 共同施設の建設 … A+B=7.2億円，B+C=4.8億円，C+A=6.6億円，A+B+C=8億円



プレイヤーの集合：$N=\{A, B, C\}$
実現可能な提携：$2^N=\{\phi, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A,B\}, \{B,C\}, \{C,A\}, \{A,B,C\}\}$
特性関数：$v(\phi)=v(\{A\})=v(\{B\})=v(\{C\})=0$
$v(\{A,B\})=(5+3)-7.2=0.8$
$v(\{B,C\})=(3+2)-4.8=0.2$
$v(\{C,A\})=(2+5)-6.6=0.4$
$v(\{A,B,C\})=(5+3+2)-8=2$

$$\left\{\begin{array}{l} v(\{A\})+v(\{B\})=0<0.8=v(\{A,B\}) \\ v(\{B\})+v(\{C\})=0<0.2=v(\{B,C\}) \\ v(\{C\})+v(\{A\})=0<0.4=v(\{C,A\}) \\ v(\{A,B\})+v(\{C\})=0.8<2=v(\{A,B,C\}) \\ v(\{B,C\})+v(\{A\})=0.2<2=v(\{A,B,C\}) \\ v(\{C,A\})+v(\{B\})=0.4<2=v(\{A,B,C\}) \end{array}\right\}$$

$S\cap T=\phi$

vが**優加法的**(supperadditive)
互いに素な任意の提携 S, T について以下が成立する特性関数v
$v(S\cup T)\geq v(S)+v(T)$

相交わらない2つの提携は，各々別個に行動するより共に行動した方が得られる便益が大きい（小さくはならない）ということ

だから提携すればよい
問題は「**配分**」をどうするかとなる

協力ゲームの理論

- 提携と配分
  - 定義：配分(imputation)
    - 提携形ゲーム (N, v)
    - プレイヤー i の利得 x_i 利得ベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2,\ldots, x_n)$
    - 実現可能集合 R

$$R=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\ \middle|\ \sum_{i\in N}x_i\leq v(N)\right\}$$

- 実現可能集合の点 $\boldsymbol{x}$ が交渉領域にあるための条件
  - （1）**個人合理性** $x_i\geqq v(\{i\})$
  - （2）**全体合理性** $\sum_{i\in N}x_i=v(N)$

各プレイヤーの利得は単独行動で獲得可能な値以上

全プレイヤーの協力で得られる値 $v(N)$は，全て配分されねばならない

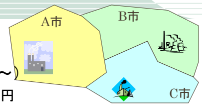
全体合理性を満たす利得ベクトルは実現可能領域でパレート最適になっている

準配分 (preimputation)
全体合理性を満たす利得ベクトル

配分 (imputation)
個人合理性と全体合理性を満たす利得ベクトル

協力ゲームの理論

- 提携と配分
  - 例題：ゴミ処理場建設（[数学セミナー](2004/8) p.32〜）
    - 3市が各々独自に建設 … A=5億円，B=3億円，C=2億円
    - 共同施設の建設 … A+B=7.2億円，B+C=4.8億円，C+A=6.6億円，A+B+C=8億円



プレイヤーの集合：$N=\{A, B, C\}$

実現した提携の例：$\{A,B,C\}$　その特性関数の値：$v(\{A,B,C\})=(5+3+2)-8=2$

（1）**個人合理性** $x_i\geqq v(\{i\})$
（2）**全体合理性** $\sum_{i\in N}x_i=v(N)$

・どんな配分がよい？
・どんな配分が考えられる？

配分の例：$(x_A, x_B, x_C)=(1, 0.5, 0.5)$
　（1）個人合理性を満たしている：$x_A\geqq v(\{A\})=0$，$x_B\geqq v(\{B\})=0$，$x_C\geqq v(\{C\})=0$
　（2）全体合理性を満たしている：$x_A+x_B+x_C=v(\{A,B,C\})=2$
配分の例：$(x_A, x_B, x_C)=(0.6, 0.8, 0.4)$
　（1）個人合理性を満たしている：$x_A\geqq v(\{A\})=0$，$x_B\geqq v(\{B\})=0$，$x_C\geqq v(\{C\})=0$
　（2）全体合理性を満たしている：$x_A+x_B+x_C=v(\{A,B,C\})=2$

協力ゲームの理論

- 例題
  - 多数決ゲーム
    - プレイヤーは3人　　$N=\{1,2,3\}$
    - 12万円が贈られてきた．多数決で分け，多数派が全てとって良い．
    - 提携集合 2^N
    - 多数派の提携 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$
    - 特性関数
      $v(\phi)=0$, $v(\{i\})=0$ $(i=1,2,3)$, $v(\{1,2\})=v(\{2,3\})=v(\{3,1\})=12$, $v(\{1,2,3\})=12$
    - 提携値
      $v=(\,v(S)\mid S\subset N\,)=(\,0, 0, 0, 0, 12, 12, 12, 12\,)$
    - 利得ベクトルの集合
      $X=\{\,\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)\,\}\subset R^3$

例1：提携 $\{1,2\}$ が成立 → $\boldsymbol{x}=(6, 6, 0)$
例2：提携 $\{1,3\}$ が成立 → $\boldsymbol{x}=(6, 0, 6)$

ゲームの結果として考えられる利得ベクトルの集合
$K=\{(6, 6, 0), (6, 0, 6), (0, 6, 6)\}$

協力ゲームの理論

- コア(core)

ゲーム (N,v) → 配分の集合 $X=\{\,\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)\,\}$ ＝ 交渉領域 $\xrightarrow{\text{交渉}}$ ある配分に到達

- 配分の支配
  - 提携 S において，配分 $\boldsymbol{x}$ が配分 $\boldsymbol{y}$ を支配するとは，次の2条件が成立すること
    - （1）有効条件　：$\sum_{i\in S}x_i\leq v(S)$
    - （2）選好条件　：$x_i>y_i$，$(\forall i\in S)$

提携 S は $\boldsymbol{x}$ の有効集合(effective set)

つまり，提携 S にとって，配分 $\boldsymbol{x}$ は S の力だけで実現可能！

提携 S にとって，配分 $\boldsymbol{y}$ を支配する配分 $\boldsymbol{x}$ が存在するとき，
「提携 S は配分 $\boldsymbol{y}$ を**拒否**する(**block**)」
or
「配分 $\boldsymbol{y}$ は提携 S にとって**改善可能**」
という

交渉の過程で，ある提携にとって支配される配分は，その提携によって拒否され，排除される．

支配されない配分が残る

コア

協力ゲームの理論

$S \cap T = \phi$

vが優加法的(supperadditive)
互いに素な任意の提携 S, T について以下が成立する特性関数v
$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$$

- コア
  - ゲーム (N, v) において，いかなる配分にも支配されない配分の集合

⇕

- コア（別定義）
  - ゲーム (N, v) が優加法的であるとき，提携合理性を満たす配分の集合

$$C(v) := \left\{ \boldsymbol{x} \in X \;\middle|\; \sum_{i \in S} x_i \geq v(S),\ \forall S \subset N \right\}$$

$v(S) - \sum_{i \in S} x_i$ を提携 S の配分 $\boldsymbol{x}$ に対する**不満**とよぶ.

コアとはいかなる提携に対しても不満を与えない配分の集合

提携合理性（個人合理性の拡張）
任意の提携 S について以下を満たす配分 $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$

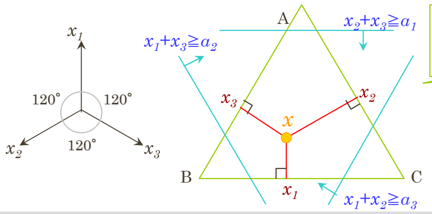
補足:Theorem
各プレイヤーのとりうる純戦略が有限な協力ゲームの特性関数は優加法的

協力ゲームの理論

- 例題
  - 3人ゲームのコア

$$C(v) := \left\{ \boldsymbol{x} \in X \;\middle|\; \sum_{i \in S} x_i \geq v(S),\ \forall S \subset N \right\}$$

- $N = (1, 2, 3)$
- $v(\phi) = 0,\ v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$
  $v(\{1, 2\}) = a_3,\ v(\{2, 3\}) = a_1,\ v(\{3, 1\}) = a_2,$ （ただし，$0 \leqq a_i \leqq 1,\ i=1,2,3$）
  $v(\{1, 2, 3\}) = 1$
- ゲームの配分 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ とすると，$x_i \geqq 0\ (i=1,2,3),\ x_1+x_2+x_3=1$



正三角形ABCが，このゲームの配分の集合 X を表す

Theorem
3人ゲーム(N, v)のコアが空出ないための必要十分条件は，
$v(\{1,2\})+v(\{2,3\})+v(\{3,1\}) \leqq 2v(\{1,2,3\})$

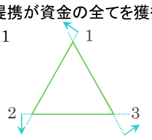
協力ゲームの理論

Theorem
本質的定和n人ゲーム(N, v)のコアは空

- ・加法的(additive) ⇔ $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$
- ・非本質的(inessential) ⇔ 加法的 v を持つ協力ゲーム
- ・本質的(essential) ⇔ そうでない協力ゲーム

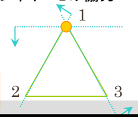
- 演習：
  - 以下の各ゲーム（全て優加法的）において，v を全て書き出し，コアを見つけよう．ただし，$v(N)=1,\ v(\phi)=0$ とする.

（1）3人定和ゲーム（[4] p.25 例3.2）
- 一定量の資金を3人の多数決で分ける．多数派提携が資金の全てを獲得.
  - $v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\}) = v(\{2,3\}) = v(\{3,1\}) = 1$
  - $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\phi) = 0$
  - → コア $C(v) = \phi$



（2）3人拒否権ゲーム（[4] p.26 例3.3）
- 一定量の資金を3人の多数決で分ける．多数派提携が資金の全てを獲得.
- ただし，プレイヤー1には拒否権があり，資金の獲得にはプレイヤー1の協力が必要．即ち，プレイヤー2，3だけでは資金の獲得不可能.
  - $v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 1$
  - $v(\{2,3\}) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\phi) = 0$
  - → コア $C(v) = \{\ (1,0,0)\ \}$

2,3が1との提携をめぐって競争すると，1が全部を得てしまう



協力ゲームの理論

- 演習：
  （3）家購入ゲーム（[4] p.26 例3.4）

N={1,2,3,4}

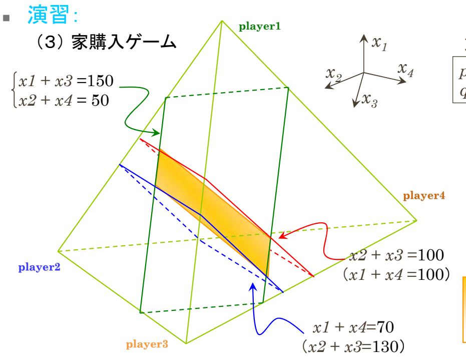
評価額の差が最も大きくなるように売却し，その差の和で v を計算

$v(\{1,2,3,4\}) = 200,$
$v(\{1,2,3\}) = 150,\ v(\{1,2,4\}) = 70,\ v(\{1,3,4\}) = 150,\ v(\{2,3,4\}) = 100,$
$v(\{1,2\}) = 0,\ v(\{1,3\}) = 150,\ v(\{1,4\}) = 70,\ v(\{2,3\}) = 100,\ v(\{2,4\}) = 50,\ v(\{3,4\}) = 0,$
$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{4\}) = v(\phi) = 0$

→ コア
$C(v) = \{\ \boldsymbol{x} \in X \mid x1 + x3 = 150,\ x2 + x4 = 50,\ x1 + x4 \geqq 70,\ x2 + x3 \geqq 100\ \}$

協力ゲームの理論

- 演習：
  （3）家購入ゲーム



取引価格

p : player1 ⇔ player3
q : player2 ⇔ player4

とすると…

⇩

$$\begin{cases} x1 = p - 1000 \\ x2 = q - 900 \\ x3 = 1150 - p \\ x4 = 950 - q \end{cases}$$

⇩

$120 \leqq p\text{-}q \leqq 150$
$1000 \leqq p \leqq 1150$
$900 \leqq q \leqq 950$

$C(v) = \{\ \boldsymbol{x} \in X \mid x1 + x3 = 150,\ x2 + x4 = 50,\ x1 + x4 \geqq 70,\ x2 + x3 \geqq 100\ \}$

協力ゲームの理論

- コアの存在条件（線形計画法に基づく）
  - ゲーム (N, v) において，コアが非空となる必要十分条件

$$\exists \boldsymbol{x} \in X, \begin{cases} \sum_{i \in N} x_i = v(N), \\ \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\ \ (\phi \neq \forall S \subsetneq N) \end{cases}$$

(P)
$$\begin{array}{|l} \min. z = \sum_{i \in N} x_i \\ s.t. \sum_{i \in S} x_i \geq v(S),\ \ \phi \neq \forall S \subsetneq N \end{array}$$

(D)
$$\begin{array}{|l} \max. \omega = \sum_{\phi \neq S \subsetneq N} \gamma_S v(S) \\ s.t. \sum_{i \in S,\ \phi \neq S \subsetneq N} \gamma_S = 1\ \ (i \in N) \\ \qquad \gamma_S \geq 0\ \ (\phi \neq \forall S \subsetneq N) \end{array}$$

(P), **(D)**共に実行可能で最適解 z^*, w^* を持ち，$z^* = w^*$.
また，『$z^* \leqq v(N)$ ⇔ コアが非空』

⇨

Theorem
ゲーム(N, v)において，非空なコアが存在するための必要十分条件は，双対問題**(D)**の制約を満たす非負ベクトルγ_Sに対し
$$\sum_{\phi \neq S \subsetneq N} \gamma_S v(S) \leq v(N)$$

協力ゲームの理論

- 仁（nucleolus）（Schmeidler,1969）
  - 提携 S と 配分 $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$ について

$$e(S,\boldsymbol{x}) := v(S) - \sum_{i\in S} x_i$$

【注：コアでは $\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)$ より不満は常に0か負】

を「配分$\boldsymbol{x}$ に対して 提携S が持つ**不満**（excess）」という

  - 配分 $\boldsymbol{x}$ に対して，全員集合Nと 空集合 ϕを除く 2^n-2 個の提携の不満の量を大きい順に並べる.

$$\theta_1(\boldsymbol{x}) \geq \theta_2(\boldsymbol{x}) \geq \dots \geq \theta_{2^n-2}(\boldsymbol{x})$$

【注：全員集合の不満$e(N,\boldsymbol{x})=0$（∵）全体合理性）
空集合の不満 $e(\phi,\boldsymbol{x})=0$（∵）$v(\phi)=0$）】

  - 2つの配分 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ について
    「$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{y}$ より**受容的**（acceptable）である」とは，以下が成り立つこと.

$$\exists k \in \{1,\cdots,2^n-2\}, \begin{cases} \theta_1(\boldsymbol{x}) \geq \theta_2(\boldsymbol{x}) \geq \dots \geq \theta_{k-1}(\boldsymbol{x}) \geq \theta_k(\boldsymbol{x}) \geq \cdots \\ \quad \| \qquad\quad \| \qquad \cdots \qquad \| \qquad\quad \wedge \\ \theta_1(\boldsymbol{y}) \geq \theta_2(\boldsymbol{y}) \geq \dots \geq \theta_{k-1}(\boldsymbol{y}) \geq \theta_k(\boldsymbol{y}) \geq \cdots \end{cases}$$

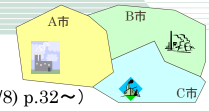
それよりも許容的な配分が存在しない配分を**仁**という　**最大不満の最小化**

コアは複数存在したり，空集合だったりする.
仁は，常にただ一つの配分を与える解である.
コアが非空のときは，仁はコアに含まれる.

不満の量を大きい順に比較していき，最初に異なるところで小さい方が好ましい（＝許容的）と考える

協力ゲームの理論

費用分担問題における仁の応用
「滑走路使用料の決定」（岡田p.360参）



- 仁
  - 例題：ゴミ処理場建設（[数学セミナー](2004/8) p.32～）
    - 3市が各々独自に建設 … A=5億円，B=3億円，C=2億円
    - 共同施設の建設 … A+B=7.2億円，B+C=4.8億円，C+A=6.6億円，A+B+C=8億円

$$\begin{cases} e(\{A,B\},\boldsymbol{x})=v(\{A,B\})-(x_A+x_B)=0.8-(x_A+x_B) \\ e(\{B,C\},\boldsymbol{x})=v(\{B,C\})-(x_B+x_C)=0.2-(x_B+x_C) \\ e(\{C,A\},\boldsymbol{x})=v(\{C,A\})-(x_C+x_A)=0.4-(x_C+x_A) \\ e(\{A\},\boldsymbol{x})=v(\{A\})-x_A=-x_A \\ e(\{B\},\boldsymbol{x})=v(\{B\})-x_B=-x_B \\ e(\{C\},\boldsymbol{x})=v(\{C\})-x_C=-x_C \end{cases}$$

ただし，全体合理性から
$x_A+x_B+x_C=v(N)=2$

最大不満最小化

LPを有限回繰り返し解くことで仁を得る

最小コアを求めるLP

$$\begin{aligned} \min.\ & \varepsilon \\ \text{s.t.}\ & 0.8-(x_A+x_B) \leq \varepsilon \\ & 0.2-(x_B+x_C) \leq \varepsilon \\ & 0.4-(x_C+x_A) \leq \varepsilon \\ & -x_A \leq \varepsilon \\ & -x_B \leq \varepsilon \\ & -x_C \leq \varepsilon \\ & x_A+x_B+x_C = 2 \end{aligned}$$

最適値：$\varepsilon^*=-0.6$
最適解：$(x_A,x_B,x_C)=(0.8,0.6,0.6)$

任意の配分 $\boldsymbol{x}$ について，不満が $\varepsilon=-0.6$に一致する提携 S を除く.
（$e(S,\boldsymbol{x})=-0.6$ となる S を除く）
そのうえで，同様のLPを作って解く. 以下，この繰り返し.

例では $\begin{cases} -\varepsilon \leq x_A \leq \varepsilon+1.8 \\ -\varepsilon \leq x_B \leq \varepsilon+1.6 \\ -\varepsilon \leq x_C \leq \varepsilon+1.2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.6 \leq x_A \leq 1.2 \\ 0.6 \leq x_B \leq 1.0 \\ 0.6 \leq x_C \leq 0.6 \end{cases}$

より，$e(\{A,B\},\boldsymbol{x})=e(\{C\},\boldsymbol{x})=-0.6$なので，提携{A,B}と{C}の式を除く.

$$\begin{aligned} \min.\ & \varepsilon \\ \text{s.t.}\ & -\varepsilon \leq x_A \leq \varepsilon+1.8 \\ & -\varepsilon \leq x_B \leq \varepsilon+1.6 \\ & x_A+x_B = 1.4 \end{aligned}$$

最適値：$\varepsilon^*=-0.7$
最適解：$(x_A,x_B)=(0.7,0.7)$

唯一配分の仁
$(x_A,x_B,x_C)=(0.7,0.7,0.6)$

協力ゲームの理論

- シャープレイ値（Shapley value）
  - 提携に対するプレイヤーの貢献度をもとにした解
  - プレイヤーが1人ずつ加わり全員提携を作る順列を考える
  - プレイヤーが加わることにより新たに獲得できる量を**貢献度**とする
    全員提携の順列が$\{1,2,\dots,i\text{-}1,i,\dots\}$のとき，
    i番目に加わるプレイヤーの貢献度 ＝ $v(\{1,2,\dots,i\text{-}1,i\})-v(\{1,2,\dots,i\text{-}1\})$
  - n!個の全ての順列が当確率で起こるときの，プレイヤーの貢献度の期待値をそのプレイヤーの**シャープレイ値**という
    - プレイヤー i のシャープレイ値

$$\tilde{\varphi}_i = \sum_{S \supseteq N,} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}(v(S)-v(S-\{i\}))$$

プレイヤー i を含む提携 S を固定したとき，
提携 S-{i} のメンバー数＝|S|-1
N/S のプレイヤー数＝n-|S|
より，提携 S-{i} +{i}+N/Sの順列の総数は(|S|-1)!(n-|S|)!通り.
故に i が最後に参加して提携 S となる確率が(|S|-1)!(n-|S|)!/n!

$\underbrace{○○\cdots○}_{\text{S-1}}\ i\ \underbrace{○○\cdots○}_{n\text{-}|S|}$

  - 補足：シャープレイ値は4つの公準を満たす唯一の解である
  - 補足：vが優加法的なら個人合理性も満たし配分となる

$$\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_2, \cdots, \tilde{\varphi}_n)$$

公準1：全体合理性
公準2：ナルプレイヤーの零評価
公準3：対称性
公準4：加法性

シャープレイ値も仁と同様，唯一の解を与える
コア・仁が「不満」をもとにしているのに対し，シャープレイ値は「貢献度」をもとにした解

コアに含まれるとは限らない

協力ゲームの理論

- シャープレイ値
  - 例題：ゴミ処理場建設（[数学セミナー](2004/8) p.32～）
    - 3市が各々独自に建設 … A=5億円，B=3億円，C=2億円
    - 共同施設の建設 … A+B=7.2億円，B+C=4.8億円，C+A=6.6億円，A+B+C=8億円

全体提携の順列	貢献度		
	A	B	C
A←B←C	0.0	0.8	1.2
A←C←B	0.0	1.6	0.4
B←A←C	0.8	0.0	1.2
B←C←A	1.8	0.0	0.2
C←A←B	0.4	1.6	0.0
C←B←A	1.8	2.0	0.0
合計	4.8	4.2	3.0

$$\begin{cases} v(\phi) = v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0 \\ v(\{A,B\}) = (5+3)-7.2 = 0.8 \\ v(\{B,C\}) = (3+2)-4.8 = 0.2 \\ v(\{C,A\}) = (2+5)-6.6 = 0.4 \\ v(\{A,B,C\}) = (5+3+2)-8 = 2 \end{cases}$$

各プレイヤーのシャープレイ値

$$\begin{cases} \phi_A = 4.8/6 = 0.8 \\ \phi_B = 4.2/6 = 0.7 \\ \phi_C = 3.0/6 = 0.5 \end{cases}$$

シャープレイ値による唯一の配分
$(x_A,x_B,x_C)=(0.8,0.7,0.5)$

協力ゲームの理論

- 安定集合（stable set）〔or 解（solution），von Neumann-Morgenstren解〕
  - 例題（再掲）：3人定和ゲーム
    - 一定量の資金を3人の多数決で分ける. 多数派提携が資金の全てを獲得.
      - $v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\}) = v(\{2,3\}) = v(\{3,1\}) = 1$
      - $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\phi) = 0$
      - → コア $C(v) = \phi$

でも… 現実には交渉の決着がつき，配分がある範囲に収まるのでは？
例：提携{1,2}が成立 → 配分 $\boldsymbol{x}$ = (0.5, 0.5, 0)

結局，K = { (0.5, 0.5, 0), (0.5, 0, 0.5), (0, 0.5, 0.5) } のいずれかで決着！
〔互いに支配関係にない. また，(0.4, 0, 0.6) などは (0.5, 0.5, 0) に支配される. 〕

- 安定集合（stable set）
  - 配分の集合Xの部分集合Kが以下の性質を満たす時，Kを安定集合という
    （1）内部安定性（internal stability）
    $\boldsymbol{x}$∈K, $\boldsymbol{y}$∈K → $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は互いに支配関係にない
    （2）外部安定性（external stability）
    Kに属さない任意の配分は，Kに属す少なくとも1つの配分に支配される

協力ゲームの理論

- 安定集合
  - Dom $\boldsymbol{x}$:= { $\boldsymbol{y}$ | $\boldsymbol{y}$∈X, $\boldsymbol{x}$ dom $\boldsymbol{y}$ } ：配分 $\boldsymbol{x}$ に支配される配分の集合
  - Dom A := $\bigcup_{x\in A}$Dom $\boldsymbol{x}$ ：集合Aの配分に支配される配分の集合
    - 内部安定性 ⇔ K ∩ Dom K = ϕ
    - 外部安定性 ⇔ K ∪ Dom K = A
    - 安定集合 ⇔ K = A − Dom K を満たす集合 K⊂A

Theorem
ゲーム(N, v) の安定集合がただ1つの配分から成るための必要十分条件は，ゲームが非本質的であること.

Theorem
ゲーム(N, v) のコアC および安定集合 K が共に非空ならば
C ⊂ K.

投票ゲーム

- 投票ゲーム
  - N人のプレイヤーによる投票で何らかの決定がなされるシステムを考える．
    - 投票者の様々なグループ（Nの部分集合）＝**提携**（coalition）
    - 法案の可決，など選択権を持つ提携＝**勝利提携**（winning coalition） W
    - そうでない提携＝**敗北提携**（losing coalition） L
  - → (N, W)：**投票ゲーム**（voting game）
    - ただし，以下の性質を持つとする
    - （1） $N \in W$，$\phi \in L$　全員提携は勝利提携，空集合は敗北提携
    - （2） $S \in W$ かつ $S \subseteq T$ → $T \in W$　勝利提携を含む提携は勝利提携
    - （3） $S \in W$ → $N - S \in L$　勝利提携の補集合は敗北提携
  - 例：3つの政党 N={1,2,3} の議員で構成されている議会
    - 定数21で，各政党の議席数（10, 10, 1）．過半数で議案可決．
    - 勝利提携 W = { {1, 2, 3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} }
    - 敗北提携 L = { {1}, {2}, {3}, ϕ }

各投票者 N={1,2,3} の **影響力（投票力指数）** はどの程度なのか？

投票ゲーム

- 投票力指数が満たすべき性質
  - [8] p.45～
- 投票力指数
  - シャープレイ・シュービック指数（Shapley-Shubik index）（1954）
  - バンザフ指数（Banzhaf index）（1965）
  - ディーガン・パックル指数（Deegan-Packel index）（1978）
  - ……

投票ゲーム

- 投票力指数
  - シャープレイ・シュービック指数（SS指数）
    - 例：3人 N={1,2,3} の単純多数決ゲーム
      - 勝利提携 W = { {1,2,3}, {1,2}, {2,3}, {3,1} }

勝利提携　ピヵォット（pivot）

(1, 2, 3)

提携に参加する順

協力ゲームの解の1つシャープレイ値を，投票者の影響力の評価に適用したもの．

(2, 3, 1),
(3, 1, 2),
(1, 3, 2),
(2, 1, 3),
(3, 2, 1)

全ての順列の生起確率が等しいと仮定したときの，各投票者のピヴォットとなる回数の期待値

⇒ SS指数：$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (1/3, 1/3, 1/3)$

投票ゲーム

- 投票力指数
  - バンザフ指数（絶対Bz指数）
    - 例：4人 N={1,2,3,4} の単純多数決ゲーム
      - 勝利提携 W = { {1,2,3,4}, {1,2,3}, {1,2,4}, {2,3,4} }
      - {1,2,3} の3人による全ての部分集合

敗北提携	ϕ		,4)	敗北提携
敗北提携	(1		,4)	敗北提携
敗北提携	(2		,4)	敗北提携
敗北提携	(3	+	,4)	敗北提携
敗北提携	(1, 2		,4)	勝利提携
敗北提携	(1, 3		,4)	勝利提携
敗北提携	(2, 3		,4)	勝利提携
勝利提携	(1, 2, 3		,4)	勝利提携

スウィング（swing）

全ての投票者が賛成・反対を表明しているとき，自らの投票態度を変更することによって結果を変えることの出来る投票者（スウィング）となる回数の期待値

⇒ 絶対Bz指数：$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (3/8, 3/8, 3/8, 3/8)$

正規Bz指数：$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$　$\sum_{i \in N} \hat{\beta}_i = 1$ と正規化

投票ゲーム

極小勝利提携
勝利提携のうち，1人でも抜けると敗北提携になってしまうもの．

- 投票力指数
  - ディーガン・パックル指数（DP指数）
    - 投票者は「極小勝利提携 W^m」に属しているとき，影響力を持つという考え
    - ただし，極小勝利提携に属す投票者は全て同じ影響力を持つとする
    - 投票者 i のDP指数は，$\gamma_i = \frac{1}{|W^m|} \sum_{S \in W^m, S \ni i} \frac{1}{|S|}$

各極小勝利提携の生起確率が同じと仮定したときの，各投票者の影響力の割合

- 例：4人 N={1,2,3,4} の単純多数決ゲーム
  - 勝利提携 W = { {1,2,3,4}, {1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4} }
  - 極小勝利提携 W^m = { {1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4} }
  - 極小勝利提携の全体 $|W^m| = 4$

{1,2,3} → (1/3, 1/3, 1/3, 0)
{1,2,4} → (1/3, 1/3, 0, 1/3)
{1,3,4} → (1/3, 0, 1/3, 1/3)
{2,3,4} → (0, 1/3, 1/3, 1/3)

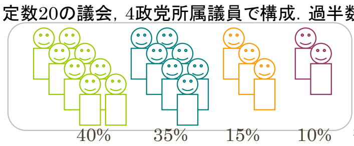
⇒

投票者1についての和：1
投票者2についての和：1
投票者3についての和：1
投票者4についての和：1

⇒ DP指数：$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$

投票ゲーム

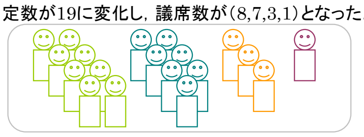
- 投票力指数の意味
  - 例：定数20の議会，4政党所属議員で構成．過半数で議案可決．



この比率が各党の力（議会発言力）なのか？

	40%	35%	15%	10%
構成比率				
SS指数				
Bz指数				
DP指数				

- 例：定数が19に変化し，議席数が(8,7,3,1)となった．



投票ゲーム

- 演習：
  - 以下の各投票ゲームにおけるSS指数，Bz指数，DP指数を計算しよう

（1）3人のプレイヤー $N=\{1,2,3\}$ による単純多数決ゲームを考える．ただし，プレイヤー1には拒否権がある．

（2）4つの政党がそれぞれ議席数（40, 30, 10, 5）を占めている議会において，2/3以上の賛成で議案を通すことが出来る．

（3）β 社の株を5人の人が所有しており，その比率は（30%, 25%, 25%, 15%, 5%）である．株主総会において，過半数の意見が通るとする．

投票力指数の説明と投票力指数を計算する，東大松井先生のWebサイト

参考文献

[1] 鈴木光男「ゲーム理論入門」共立出版（1981, 2003（新装版））
[2] 鈴木光男「新ゲーム理論」勁草書房（1994）
[3] 岡田章「ゲーム理論」有斐閣（1996）
[4] 鈴木光男・武藤滋男「協力ゲームの理論」東京大学出版会(1985)
[5] 中山幹夫・舟木由喜彦・武藤滋男「ゲーム理論で解く」有斐閣ブックス(2000)
[6] 舟木由喜彦「エコノミックゲームセオリー」サイエンス社(2001)
[7] 武藤滋男・小野理恵「投票システムのゲーム分析」日科技連（1998）
[8] 森雅夫・松井知己「オペレーションズ・リサーチ」朝倉書店(2004)
[9] 松井知己『投票力指数を計算する』
http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~tomomi/voting/voting.html
[10] 毛利裕昭・岡本吉央「離散最適化と協力ゲーム（1）（2）」オペレーションズ・リサーチ(2003)Vol.48,no.1,2