意思決定科学:階層意思決定法
(Analytic Hierarchy Process)

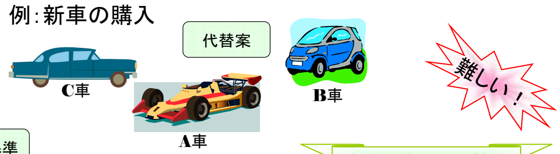
情報学部　堀田敬介

2007/1/9, Tue.

Contents

意思決定問題の特徴

- 例:新車の購入



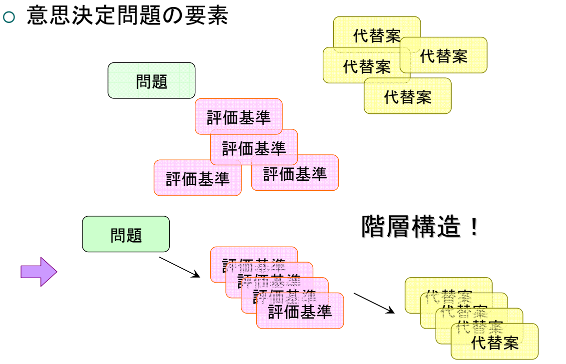
- 例:資産運用，購読新聞選択，旅行先選定，大学選び，パソコン購入，ボーナス使途，etc…

意思決定問題の特徴

- 複数の代替案から1つを選択
- 意思決定者は独自の評価基準に基づいて決定を下す
- あらゆる評価基準に対してベストの代替案があることは稀
- 評価基準は通常複数あり，互いに利害が相反する面を持つ
- 複数の項目を同時に考慮・判定

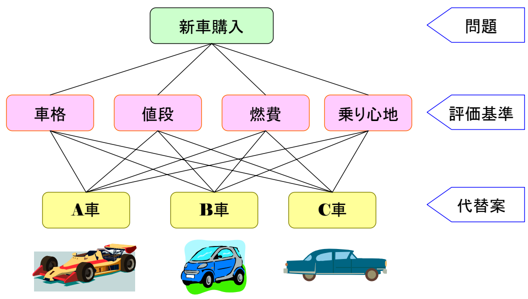
意思決定問題の特徴

- 意思決定問題の要素



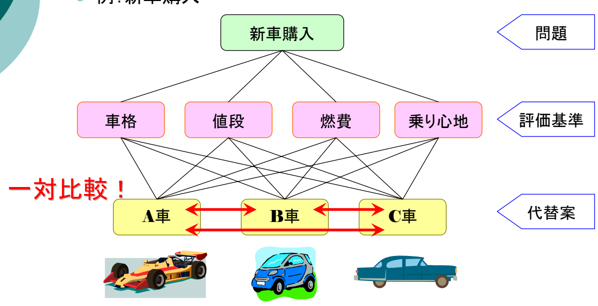
AHPの基礎

- 階層構造
  - 例：新車購入



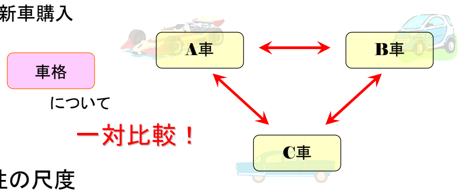
AHPの基礎

- 一対比較 **paired comparison**
  - 例：新車購入



AHPの基礎

- 一対比較 paired comparison
  - 例：新車購入



- 重要性の尺度

1	AとBは同じぐらい重要	equal importance	*1*
3	Aの方がBよりやや重要	weak importance	
5	Aの方がBより重要	importance	θ
7	Aの方がBよりかなり重要	strong importance	
9	Aの方がBより極めて重要	absolute importance	θ^2

補足：パラーメタによる尺度

AHPの基礎

- 一対比較 paired comparison
  - 例：新車購入

車格	A車	B車	C車	（車格に関しての）重み（weight）
A車	1	3	1/7	→ w_1
B車	1/3	1	1/5	→ w_2
C車	7	5	1	→ w_3

- 一対比較行列 paired comparison matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{m\times n}$$

ただし、

$a_{ij} > 0 \quad (\forall i, j)$ 要素は全て正

$a_{ji} = \dfrac{1}{a_{ij}} \quad (\forall i, j)$ 対称要素は逆数

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (\forall j)$ 列和が1（通常考慮しない）

AHPの基礎

車格	A車	B車	C車	（車格に関しての）重み（weight）
A車	1	3	1/7	→ w_1
B車	1/3	1	1/5	→ w_2
C車	7	5	1	→ w_3

- 一対比較行列から重みの計算
  - 主固有ベクトル $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$
    - $\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{w} \quad (\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0})$
  - 幾何平均 $\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\ldots,g_n)$
    - $g_i := \dfrac{p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \qquad p_i := \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}} = \sqrt[n]{a_{i1} \times \cdots \times a_{in}} \qquad (i=1,\cdots,n)$
  - 調和平均 $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\ldots,h_n)$
    - $h_i := \dfrac{q_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i} \qquad q_i := \dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_{ij}}} \qquad (i=1,\cdots,n)$

AHPの基礎

車格	A車	B車	C車
A車	1	3	1/7
B車	1/3	1	1/5
C車	7	5	1

（車格に関しての）
重み（weight）
→ w_1
→ w_2
→ w_3

- 一対比較行列から重みの計算
  - 主固有ベクトル　$w=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$
    - 最大固有値：$\lambda_1=3.233$, 主固有ベクトル：$w=$

重み
0.170
0.092
0.738

  - 幾何平均　$g=(g_1,g_2,\ldots,g_n)$

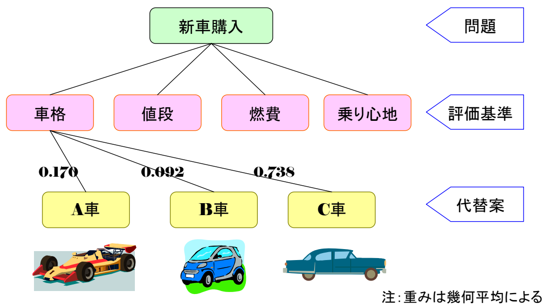
車格	A車	B車	C車	幾何平均	重み
A車	1	3	1/7	$\sqrt[3]{1\cdot3\cdot1/7}=0.754$	0.170
B車	1/3	1	1/5	$\sqrt[3]{1/3\cdot1\cdot1/5}=0.405$	0.092
C車	7	5	1	$\sqrt[3]{7\cdot5\cdot1}=3.271$	0.738

  - 調和平均　$h=(h_1,h_2,\ldots,h_n)$

車格	A車	B車	C車	調和平均	重み
A車	1	3	1/7	3×(1/1+1/3+7)=0.360	0.123
B車	1/3	1	1/5	3×(3+1/1+5)=0.333	0.114
C車	7	5	1	3×(7+1/5+1/1)=2.234	0.763

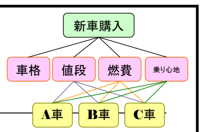
AHPの基礎

- 一対比較行列から重みの計算
  - 例：新車購入



注：重みは幾何平均による

AHPの基礎



- 一対比較行列から重みの計算
  - 例：新車購入

評価基準	車格	値段	燃費	乗り心地	重み
車格	1	1/9	1/7	1/3	0.054
値段	9	1	3	1/3	0.346
燃費	7	1/3	1	5	0.369
乗り心地	3	3	1/5	1	0.231

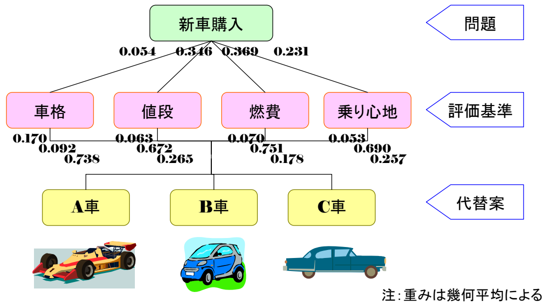
値段	A車	B車	C車	重み
A車	1	1/9	1/3	0.063
B車	9	1	5	0.672
C車	3	1/5	1	0.265

燃費	A車	B車	C車	重み
A車	1	1/9	1/5	0.070
B車	9	1	3	0.751
C車	5	1/3	1	0.178

乗り心地	A車	B車	C車	重み
A車	1	1/7	1/9	0.053
B車	7	1	5	0.690
C車	9	1/5	1	0.257

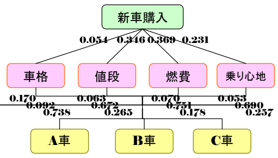
AHPの基礎

- 一対比較行列から重みの計算
  - 例：新車購入



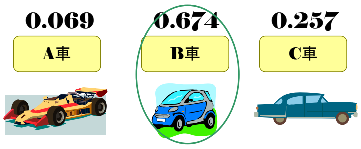
注：重みは幾何平均による

AHPの基礎

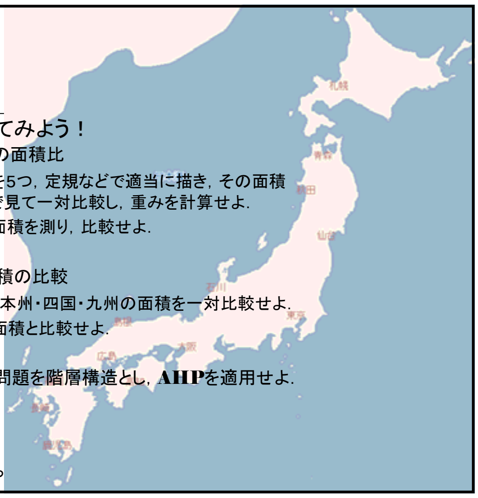


- 各代替案の総合得点の計算
  - 例：新車購入

評価基準 代替案＼	車格 0.054	値段 0.346	燃費 0.369	乗り心地 0.231	総合得点
A車	0.170	0.063	0.070	0.053	0.069
B車	0.092	0.672	0.751	0.690	0.674
C車	0.738	0.265	0.178	0.257	0.257



演習１



一対比較をしてみよう！

〔１〕 三角形の面積比
- 三角形を5つ，定規などで適当に描き，その面積比を目で見て一対比較し，重みを計算せよ．
- 実際に面積を測り，比較せよ．

〔２〕 国土面積の比較
- 北海道・本州・四国・九州の面積を一対比較せよ．
- 実際の面積と比較せよ．

〔３〕 身近な問題を階層構造とし，AHPを適用せよ．

地図出展：
「its-mo Navi PC」から

AHPの基礎

- 一対比較の整合性の検証

「乗り心地」より「値段」が重要

「値段」より「燃費」が重要

「燃費」より「乗り心地」が重要

推移律が不成立！

「A車」~「B車」

「B車」>「C車」

「A車」>>>「C車」

全体としての整合性に欠ける

⇒ 不整合性の度合いを測る指標を！

AHPの基礎

Consistency Index
Consistency Ratio

- 一対比較の整合度 **C. I.** と整合比 **C. R.**
  - 主固有ベクトルによる重みの場合の整合度

$$C.I. := \frac{\lambda_1 - n}{n-1} \quad (\lambda_1 : A\text{の最大固有値})$$

  - 幾何平均・調和平均による重みの場合の整合度

$$C.I. := \frac{\tau - n}{n-1} \quad \left(\tau := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{w_j}{w_i}\right)$$

  - 整合比 $C.R. := \frac{C.I.}{R.I.}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R.I	0.0	0.0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

※）一対比較行列をランダムに作ったときの整合度の平均値

AHPの基礎

評価基準	車格	値段	燃費	乗り心地	重み
車格	1	1/9	1/7	1/3	0.054
値段	9	1	3	1/3	0.346
燃費	7	1/3	1	5	0.369
乗り心地	3	3	1/5	1	0.231

- 一対比較の整合度 **C. I.** と整合比 **C. R.**
  - 例：新車購入（評価基準の一対比較について）
    - 重みが主固有ベクトルの場合：最大固有値 λ_1 **=5.583**

$$C.I. = \frac{\lambda_1 - n}{n-1} = \frac{5.583-4}{4-1} = 0.528 \quad (>0.1)$$

$$C.R. = \frac{C.I.}{R.I.} = \frac{0.528}{0.90} = 0.586$$

    - 重みが幾何平均の場合

評価基準	車格 0.054	値段 0.346	燃費 0.369	乗り心地 0.231	積和	積和÷重み
車格	1	1/9	1/7	1/3	0.222	4.114
値段	9	1	3	1/3	2.016	5.827
燃費	7	1/3	1	5	2.017	5.467
乗り心地	3	3	1/5	1	1.505	6.514
					τ	5.480

整合性がない！

$$C.I. = \frac{\tau - n}{n-1} = \frac{5.480-4}{4-1} = 0.493 \quad (>0.1)$$

$$C.R. = \frac{C.I.}{R.I.} = \frac{0.493}{0.90} = 0.548$$

AHPの基礎

- 整合性がない場合，チェックすべき箇所の目安
  - 例：新車購入（評価基準の一対比較について）

評価基準	車格	値段	燃費	乗り心地
車格	1	0.11	0.14	0.33
値段	9.00	1	3.00	0.33
燃費	7.00	0.33	1	5.00
乗り心地	3.00	3.00	0.20	1

一対比較行列

評価基準	車格 0.054	値段 0.346	燃費 0.369	乗り心地 0.231
車格 0.054	1	0.16	0.15	0.23
値段 0.346	6.41	1	0.94	1.50
燃費 0.369	6.83	1.07	1	1.60
乗り心地 0.231	4.28	0.67	0.63	1

重みから計算された
一対比較行列

AHPの長所・短所

- **AHP**の長所
  - 主観的価値基準によって最も高い評価の代替案を選択できる
  - 主観的価値基準による代替案の優先順位がわかる
  - 評価基準が複数あり，互いに共通の尺度がない問題を解決できる
  - 主観的価値基準によって比較（一対比較）を行える
  - 部分的な比較・検討の繰返しにより全体の評価ができる
  - 意思決定者の主観的基準を結果に容易に反映できる
  - …
- **AHP**の短所
  - 階層構造をどう作るかが重要であり，結果がそれに左右される．
  - 一対比較が大変で意思決定者の負担になる→比較回数は$O(n^2)$
  - 部分ごとにしか比較を行わないので全体的な結果が納得のいかないものになる可能性がある→階層構造をどう作るかに依存
  - 一対比較の評価尺度が「順序尺度→間隔尺度（比率尺度）」に機械的に置き換えられてしまう（やや重要⇔重要，重要⇔かなり重要の差などがいずれも**2**？　重要は同等の**5**倍，極めて重要は同等の**9**倍重要？）
  - …

AHPの数学的理論

- 重み計算について
  - なぜ固有値？（**cf.** [**2**] 第**7**章）
    - ペロンの定理：一対比較行列（対角成分が**1**の正逆数行列）に対し，（スカラー倍に関して）一意で正の主固有ベクトルの存在を保証．
    - ペロン・フロベニウスの定理：非負既約行列に対し，同様のことを保証．→ **AHP, ANP**での重要度が計算可能．

      「既約＝隣接行列と見なしたとき，グラフが強連結」
    - 一対比較重要度における自己評価と外部評価のずれのばらつきを最小化する，即ち，過剰評価率を最小化する問題を考えると，固有値法はこの問題を解いていることに相当する．
- 整合性の検証について
  - これで測れるの？

AHPの数学的理論

- 重み計算について

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix} \longleftarrow$$

重要度wに対する完全に整合がとれた一対比較行列

AHPを実施する際の補足事項

- 不完全一対比較行列の取り扱い
  - Harker法

$$\begin{pmatrix} 1 & ? & 5 & ? \\ ? & 1 & 3 & 7 \\ 1/5 & 1/3 & 1 & ? \\ ? & 1/7 & ? & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 1/5 & 1/3 & 2 & 0 \\ 0 & 1/7 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

  - TS法（Two-Stage Method）

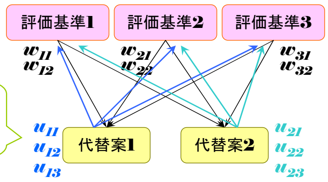
$$\begin{pmatrix} 1 & ? & 5 & ? \\ ? & 1 & 3 & 7 \\ 1/5 & 1/3 & 1 & ? \\ ? & 1/7 & ? & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} k_1 := \sqrt{1 \cdot 5} \\ k_2 := \sqrt[3]{1 \cdot 3 \cdot 7} \\ k_3 := \sqrt[3]{1/5 \cdot 1/3 \cdot 1} \\ k_4 := \sqrt{1/7 \cdot 1} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & k_1/k_2 & 5 & k_1/k_4 \\ k_2/k_1 & 1 & 3 & 7 \\ 1/5 & 1/3 & 1 & k_3/k_4 \\ k_4/k_1 & 1/7 & k_4/k_3 & 1 \end{pmatrix}$$

AHPからANPへ

- ANPとは何か？
  - 例

ANPでは評価基準と代替案を区別しない！



こんな基準で評価して欲しい，評価すべきだ！

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \\ w_{31} & w_{32} \end{bmatrix}$$

評価基準の代替案に対する評価行列

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{bmatrix}$$

代替案の評価基準に対する評価行列

超行列
super matrix

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{U} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & w_{11} & w_{12} \\ 0 & 0 & 0 & w_{21} & w_{22} \\ 0 & 0 & 0 & w_{31} & w_{32} \\ u_{11} & u_{12} & u_{13} & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

注：各列和は1にする

AHPからANPへ

○ **ANP**の解法：超行列Sが既約な場合

- 例

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{W}\\ \boldsymbol{U} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&w_{11}&w_{12}\\0&0&0&w_{21}&w_{22}\\0&0&0&w_{31}&w_{32}\\u_{11}&u_{12}&u_{13}&0&0\\u_{21}&u_{22}&u_{23}&0&0\end{bmatrix}$$

$$S\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ の各成分 x_i が
対称 i の総合評価を与える

求め方

$$S\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$$
$$\leftrightarrow\begin{bmatrix}0 & W\\ U & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}$$
$$\leftrightarrow W\boldsymbol{v}=\boldsymbol{z}, U\boldsymbol{z}=\boldsymbol{v}$$
$$\rightarrow WU\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}$$
$$\leftrightarrow (WU-I)\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$$

で $\boldsymbol{z}$ を求め，$U\boldsymbol{z}=\boldsymbol{v}$ より $\boldsymbol{v}$ を求める．

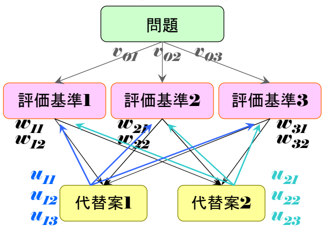
注：確率行列（各列和が1）の最大固有値は1なので，この法的式の解 x は主固有ベクトルとなる

Sが既約行列 ⇔ Sを隣接行列と見たときの対応するグラフが強連結
irreducible matrix
Sが原始行列 ⇔ Sを隣接行列と見たときの対応するグラフの原始指標が1
primitive matrix
〔原始指標：強連結グラフの全サイクルの長さの最大公約数〕

AHPからANPへ

○ **ANP**：超行列Sが既約でない場合

- 例



$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}v_{01}\\v_{02}\\v_{03}\end{bmatrix}$$ 評価基準に対する評価行列

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}w_{11}&w_{12}\\w_{21}&w_{22}\\w_{31}&w_{32}\end{bmatrix}$$ 評価基準の代替案に対する評価行列

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\u_{21}&u_{22}&u_{23}\end{bmatrix}$$ 代替案の評価基準に対する評価行列

参考：解法は，グラフを強連結成分分解し，ブロック下三角行列の形にした上で，半順序の上位クラスタから逐次的に求める．

超行列
super matrix
（既約でない）

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\v_{01}&0&0&0&w_{11}&w_{12}\\v_{02}&0&0&0&w_{21}&w_{22}\\v_{03}&0&0&0&w_{31}&w_{32}\\0&u_{11}&u_{12}&u_{13}&0&0\\0&u_{21}&u_{22}&u_{23}&0&0\end{bmatrix}$$

参考文献

[1] P.T. Harker, ``Alternative modes of questioning in the analytic hierarchy process,'' *Mathematical Modeling, Vol.9, pp.353-360, 1987*.
[2] 木下栄蔵 編著「AHPの理論と実際」日科技連 (2000)
[3] 竹田英二, ``不完全一対比較行列におけるAHPウェイトの計算法,'' オペレーションズ・リサーチ, *Vol.34, No.4, pp.169-172, 1989*.
[4] 高橋磐郎, ``AHPからANPへの諸問題 I ～VI,'' オペレーションズ・リサーチ, *Vol43, No.1-6, pp.36-40, 1998*.
[5] 刀根薫 「ゲーム感覚意思決定法～AHP入門～」日科技連 (1986)
[6] 刀根薫，真鍋龍太郎 編「AHP事例集」日科技連 (1990)
[7] 八巻直一，関谷和之, ``複数の評価者を想定した大規模AHPの提案と人事評価への適用,'' *J. ORSJ, Vol.42, No.4, pp.405-420, 1999*.
[8] 八巻直一, et. al, ``不満関数を用いる集団区間AHP法,'' *J.ORSJ, Vol.45, No.3, pp.268-283, 2002*.
[9] …