

意思決定科学： 包絡分析法

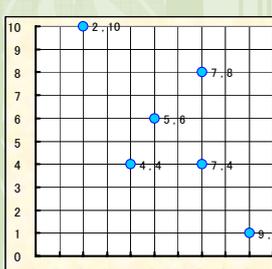
情報学部 堀田敬介

2007年1月16日(火)

考えよう

❖ あなたは6つの店舗をもつ社長だ。今年1年間の業績が最もよい店舗を表彰して他店舗の模範とし、次年度も切磋琢磨させたい。さて、あなたはどの店舗を表彰するのか？

	A店	B店	C店	D店	E店	F店
営業費	56	100	86	100	57	250
人員数	500	100	150	83	50	50
売上	500	400	600	500	400	500



	A店	B店	C店	D店	E店	F店
売上/費	9	4	7	5	7	2
売上/人	1	4	4	6	8	10

考えよう

❖ あなたは6つの店舗をもつ社長だ。今年1年間の業績が最もよい店舗を表彰して他店舗の模範とし、次年度も切磋琢磨させたい。さて、あなたはどの店舗を表彰するのか？

	A店	B店	C店	D店	E店	F店
営業費	56	100	86	100	57	250
人員数	500	100	150	83	50	50
借入金	167	80	300	71	67	500
売上	500	400	600	500	400	500

	A店	B店	C店	D店	E店	F店
売上/費	9	4	7	5	7	2
売上/人	1	4	4	6	8	10
売上/借	3	5	2	7	6	1

Contents

- ❖ DEAとは何か？
 - ❖ DMUに対する入力が1, 出力が1のケース
 - ❖ DMUに対する入力が2, 出力が1のケース
 - ❖ DMUに対する入力が1, 出力が2のケース
 - ❖ DMUに対する入力が2以上, 出力が2以上の一般的ケース
- ❖ DEAの基本的モデル:CCRモデル
- ❖ 生産可能集合とその他のモデル
 - ❖ 凸包モデル
 - ❖ BCCモデル
 - ❖ IRSモデル
 - ❖ DRSモデル
 - ❖ GRSモデル

DEAとは？

❖ DEA (Data Envelopment Analysis)

envelope=封筒
envelop=包む
envelopment=包むこと

DMUの変換効率 = $\frac{\text{仮想的出力}}{\text{仮想的入力}}$

比率尺度を効率性と見なして相対比較

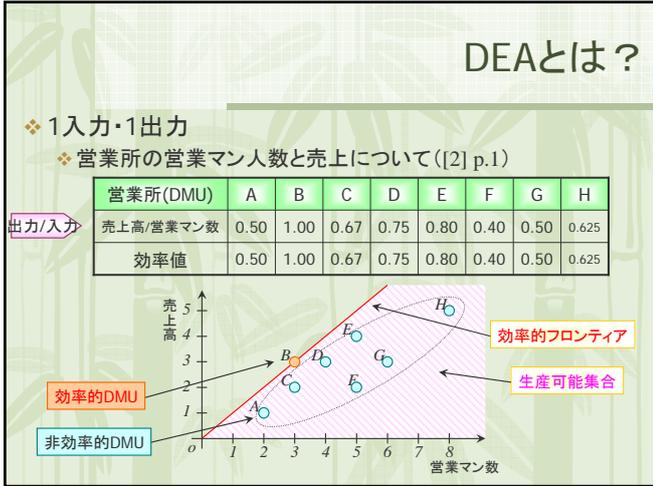
最も変換効率の良いDMUを基準として、他のDMUの非効率性を算出し、比較する。ただし、変換効率はDMU毎に最も有利になるように計算。

DEAとは？

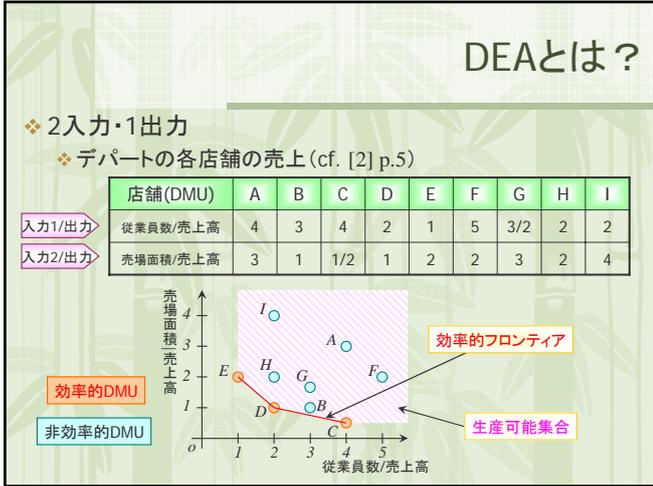
❖ 1入力・1出力

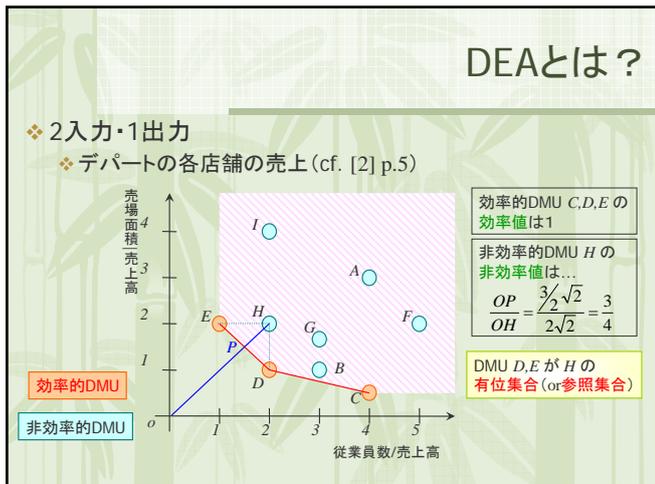
❖ 営業所の営業マン人数と売上について ([2] p.1)

営業所 (DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H
入力 営業マン数	2	3	3	4	5	5	6	8
出力 売上高	1	3	2	3	4	2	3	5

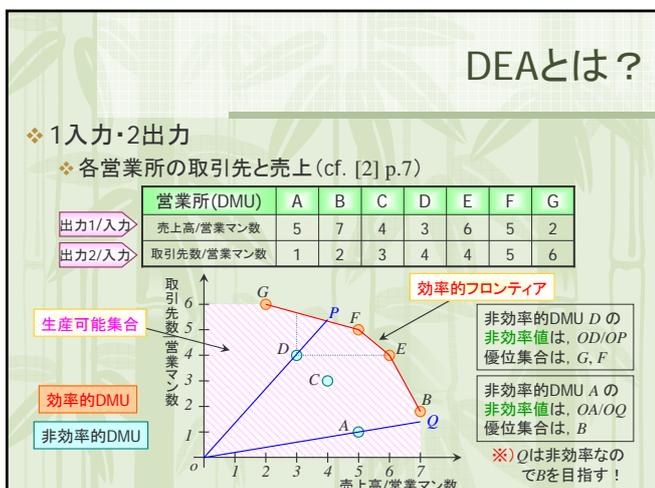












DEAの特徴

- ❖ 特徴(長所・短所)
 - ❖ 他と異なった特徴を持つDMUは、DEA効率的と判断されやすい
 - 他と異なることが良いことの場合は、DEAは良い指標
 - ❖ 全てのDEA効率値が大きい値を持つ場合がある
 - ❖ DEA効率的と判断されるDMUが非常に多い場合がある

例題 (DEAを用いた野球打者評価) CCRモデルによる

❖ 2005年度シーズンのセ・パ両リーグ打率上位各30人の打者(計60人)について、DEAにより評価

入力

打数
三振

DMU

野球打者
= 与えられる打席を
得点に結びつけるシ
ステム

出力

安打
打点
四死球
犠打
盗塁

注: 三振は少ない方がよいので入力に...

		打数	三振	安打	打点	四死球	犠打	盗塁
青木宣親	ヤクルト	588	113	202	28	42	19	29
福留孝介	中日	515	128	169	103	94	3	13
金本知憲	阪神	559	86	183	125	101	2	3
金城龍彦	横浜	590	63	191	87	39	13	1
井端弘和	中日	560	77	181	63	78	21	22
若村明彦	ヤクルト	548	146	175	102	65	5	6

データ(一部加工)
Yahoo!スポーツプロ野球
個人成績 打率
2006年1月11日3時9分

例題 (DEAを用いた野球打者評価) CCRモデルによる

❖ 2005年度シーズンのセ・パ両リーグ打率上位各30人の打者(計60人)について、DEAにより評価

- ❖ 結果例: 2005年度セ・リーグ打率30位 石井琢朗(横)

$\langle D_o \rangle$ を解いた結果: $\theta = 0.8007$, $\lambda_3 = 0.1638$, $\lambda_5 = 0.2670$, $\lambda_8 = 0.1765$, $\lambda_{37} = 0.3476$

各入力

各出力

石井琢朗 = $0.8007 \times$ 石井琢朗 + $0.1638 \times$ 金本知憲(阪) + $0.2670 \times$ 井端弘和(中) + $0.1765 \times$ 赤星憲広(阪) + $0.3476 \times$ 城島健司(ソ)

石井琢朗 = $0.1638 \times$ 金本知憲(阪) + $0.2670 \times$ 井端弘和(中) + $0.1765 \times$ 赤星憲広(阪) + $0.3476 \times$ 城島健司(ソ)
- ❖ 結果例: 2005年度セ・リーグ打率14位 二岡智宏(巨)

$\langle D_o \rangle$ を解いた結果: $\theta = 0.9053$, $\lambda_1 = 0.3890$, $\lambda_3 = 0.1581$, $\lambda_4 = 0.0225$, $\lambda_7 = 0.2917$

各入力

各出力

二岡智宏 = $0.9053 \times$ 二岡智宏 + $0.3890 \times$ 青木宣親(ヤ) + $0.1581 \times$ 金本知憲(阪) + $0.0225 \times$ 金城龍彦(横) + $0.2917 \times$ 前田智徳(広)

二岡智宏 = $0.3890 \times$ 青木宣親(ヤ) + $0.1581 \times$ 金本知憲(阪) + $0.0225 \times$ 金城龍彦(横) + $0.2917 \times$ 前田智徳(広)

注: $\langle D_o \rangle$ のモデル化. 解は cplex9.0 による

注: CCRモデルは、凸包モデルの $L=0, U=\infty$ の場合とみなせる

生産可能集合

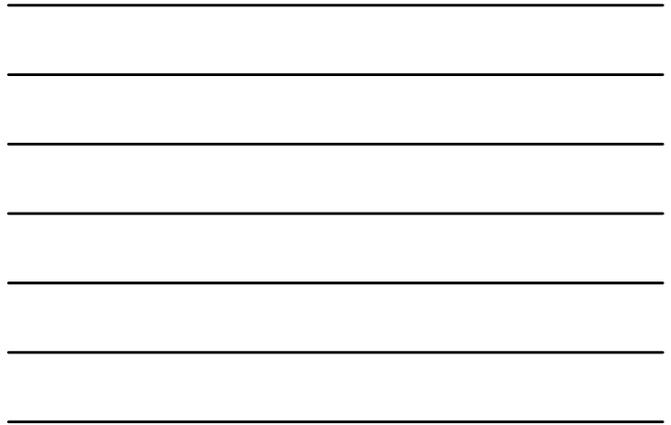
❖ 生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル)

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす (\bar{x}, \bar{y}) も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

L, Uの取り方により変わる

$$P = \{(x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$$

実際の問題は θx_0 と y_0 を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \dots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \dots + x_{mn}\lambda_n \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \\ L \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq U \end{cases}$$


生産可能集合

Banker-Charnes-Cooper

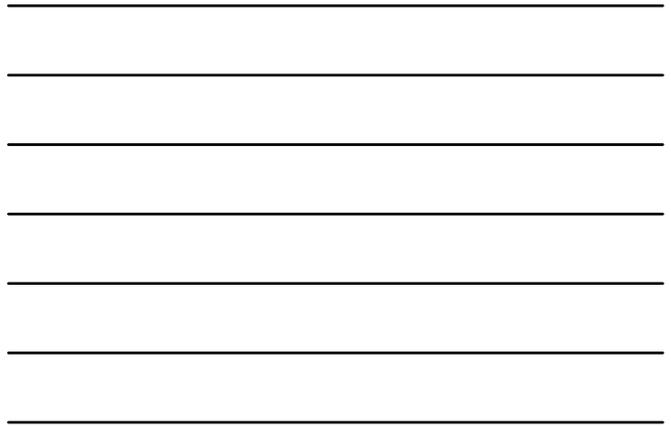
❖ 生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル1: BCCモデル [$L=U=1$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす (\bar{x}, \bar{y}) も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

BCCの効率値は一般にCCRより大になる

$$P = \{(x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$$

実際の問題は θx_0 と y_0 を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \dots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \dots + x_{mn}\lambda_n \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \\ e\lambda = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1 \end{cases}$$


生産可能集合

Increasing Returns to Scale

❖ 生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル2: IRSモデル [$L=1, U=\infty$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす (\bar{x}, \bar{y}) も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

収穫増

比較的規模の小さい活動の効率性を重視

$$P = \{(x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$$

実際の問題は θx_0 と y_0 を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \dots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \dots + x_{mn}\lambda_n \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \\ e\lambda \geq 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \geq 1 \end{cases}$$