

意思決定科学： 包絡分析法

情報学部 堀田 敬介

2007年1月16日 (火)

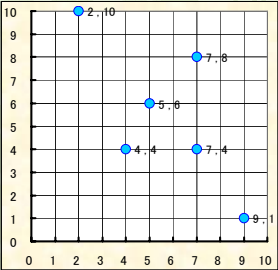
考えよう

あなたは6つの店舗をもつ社長だ。今年1年間の業績が最もよい店舗を表彰して他店舗の模範とし、次年度も切磋琢磨させたい。さて、あなたはどの店舗を表彰するのか？

	A店	B店	C店	D店	E店	F店
営業費	56	100	86	100	57	250
人員数	500	100	150	83	50	50
売上	500	400	600	500	400	500



	A店	B店	C店	D店	E店	F店
売上/費	9	4	7	5	7	2
売上/人	1	4	4	6	8	10



考えよう

あなたは6つの店舗をもつ社長だ。今年1年間の業績が最もよい店舗を表彰して他店舗の模範とし、次年度も切磋琢磨させたい。さて、あなたはどの店舗を表彰するのか？

	A店	B店	C店	D店	E店	F店
営業費	56	100	86	100	57	250
人員数	500	100	150	83	50	50
借入金	167	80	300	71	67	500
売上	500	400	600	500	400	500



	A店	B店	C店	D店	E店	F店
売上/費	9	4	7	5	7	2
売上/人	1	4	4	6	8	10
売上/借	3	5	2	7	6	1

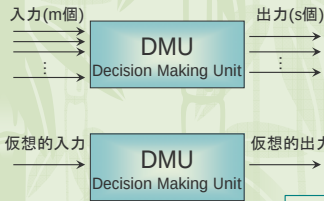
Contents

- ❖ DEAとは何か？
 - ❖ DMUに対する入力1, 出力1のケース
 - ❖ DMUに対する入力2, 出力1のケース
 - ❖ DMUに対する入力1, 出力2のケース
 - ❖ DMUに対する入力2以上, 出力2以上の一般的ケース
- ❖ DEAの基本的モデル:CCRモデル
- ❖ 生産可能集合とその他のモデル
 - ❖ 凸包モデル
 - ❖ BCCモデル
 - ❖ IRSモデル
 - ❖ DRSモデル
 - ❖ GRSモデル

DEAとは？

❖ DEA (Data Envelopment Analysis)

envelope=封筒
envelop=包む
envelopment=包むこと



比率尺度を効率性と見なして相对比较
DMUの変換効率= 仮想的出力 / 仮想的入力

最も変換効率の良いDMUを基準として、他のDMUの非効率性を算出し、比較する。ただし、変換率はDMU毎に最も有利になるように計算。

DEAとは？

- ❖ 1入力・1出力
 - ❖ 営業所の営業マン人数と売上について ([2] p.1)

営業所(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H
入力 営業マン数	2	3	3	4	5	5	6	8
出力 売上高	1	3	2	3	4	2	3	5



DEAとは？

❖ 1入力・1出力

❖ 営業所の営業マン人数と売上について ([2] p.1)

出力/入力

営業所(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H
売上高/営業マン数	0.50	1.00	0.67	0.75	0.80	0.40	0.50	0.625
効率値	0.50	1.00	0.67	0.75	0.80	0.40	0.50	0.625

DEAとは？

❖ 2入力・1出力

❖ デパートの各店舗の売上 (cf. [2] p.5)

入力1

入力2

出力

店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
従業員数	4	9	8	4	2	5	3	6	4
売場面積	3	3	1	2	4	2	6	6	8
売上高	1	3	2	2	2	1	2	3	2

DEAとは？

❖ 2入力・1出力

❖ デパートの各店舗の売上 (cf. [2] p.5)

入力1/出力

入力2/出力

店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
従業員数/売上高	4	3	4	2	1	5	3/2	2	2
売場面積/売上高	3	1	1/2	1	2	2	3	2	4

DEAとは？

❖ 2入力・1出力

❖ デパートの各店舗の売上 (cf. [2] p.5)

効率的DMU C,D,E の効率値は1

非効率的DMU H の非効率値は...
$$\frac{OP}{OH} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$$

DMU D,E が H の有位集合 (or 参照集合)

DEAとは？

❖ 1入力・2出力

❖ 各営業所の取引先と売上 (cf. [2] p.7)

入力

出力1

出力2

営業所(DMU)	A	B	C	D	E	F	G
営業マン数	2	1	3	1	2	2	4
売上高	10	7	12	3	12	10	8
取引先数	2	2	9	4	8	10	24

DEAとは？

❖ 1入力・2出力

❖ 各営業所の取引先と売上 (cf. [2] p.7)

出力1/入力

出力2/入力

営業所(DMU)	A	B	C	D	E	F	G
売上高/営業マン数	5	7	4	3	6	5	2
取引先数/営業マン数	1	2	3	4	4	5	6

非効率的DMU D の非効率値は、OD/OP
優位集合は、G, F

非効率的DMU A の非効率値は、OA/OQ
優位集合は、B

※) Qは非効率なのでBを目指す！

DEAとは？

❖ 2入力・2出力

❖ 販売会社の従業員・店舗数と来客数・売上高 ([4] p.8)

会社(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
従業員数	10	26	40	35	30	33	37	50	31	12	20	45
店舗数	8	10	15	28	21	10	12	22	15	10	12	26
来客数	23	37	80	76	23	38	78	68	48	16	64	72
売上高	21	32	68	60	20	41	65	77	33	36	23	35

入力

従業員数
店舗数

DMU
Decision Making Unit

出力

来客数
売上高

どうしよう？

DEAとは？

❖ 2入力・2出力

❖ 販売会社の従業員・店舗数と来客数・売上高 ([4] p.8)

入力

従業員数
店舗数

DMU
Decision Making Unit

出力

来客数
売上高

仮想的入力

$= v_1 \times \text{従業員数} + v_2 \times \text{店舗数}$

仮想的出力

$= u_1 \times \text{来客数} + u_2 \times \text{売上高}$

効率性(生産性)

$= \text{仮想的出力} / \text{仮想的入力}$

可変ウェイト！ ⇔ 固定ウェイト

※) 可変ウェイト・固定ウェイト、それぞれのメリットとデメリットは？

DEAとは？

❖ 2入力・2出力

❖ 販売会社の従業員・店舗数と来客数・売上高 ([4] p.8)

会社(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
従業員数	10	26	40	35	30	33	37	50	31	12	20	45
店舗数	8	10	15	28	21	10	12	22	15	10	12	26
来客数	23	37	80	76	23	38	78	68	48	16	64	72
売上高	21	32	68	60	20	41	65	77	33	36	23	35

仮想的入力

DMU
Decision Making Unit

仮想的出力

仮想的入力

$= v_1 \times \text{従業員数} + v_2 \times \text{店舗数}$

仮想的出力

$= u_1 \times \text{来客数} + u_2 \times \text{売上高}$

<各DMUの効率値>

$DMU_A = \frac{23u_1 + 21u_2}{10v_1 + 8v_2}, DMU_B = \frac{37u_1 + 32u_2}{26v_1 + 10v_2}, \dots, DMU_L = \frac{72u_1 + 35u_2}{45v_1 + 26v_2}$

CCRモデル

❖ 多入力・多出力

入力(m個)

$x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk}$

DMU
Decision Making Unit

出力(s個)

$y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{sk}$

入力データ行列

出力データ行列

DMU数(n個)

$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$

入力数(m)

$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & \dots & y_{sn} \end{pmatrix}$

出力数(s)

入力データ用ウェイトベクトル

出力データ用ウェイトベクトル

$v = (v_1 \dots v_m)^T$

$u = (u_1 \dots u_s)^T$

DMU_kの仮想入力

DMU_kの仮想出力

$q_k := \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} \quad (k = 1, \dots, n)$

$r_k := \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} \quad (k = 1, \dots, n)$

CCRモデル

❖ 多入力・多出力

❖ 測定対象DMU_o($o=1, \dots, n$)のウェイトを計算する

<FP_o>

max. $\theta_o := \frac{u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo}}$

s.t.

$\frac{u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk}}{v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk}} \leq 1 \quad (k=1, \dots, n)$

$v_1, \dots, v_m \geq 0$

$u_1, \dots, u_s \geq 0$

対象のDMUの効率性を最大化

全てのDMUの効率性は1以下

入出力用可変ウェイトの変数は非負

同値 ([1])

<LP_o>

max. $\theta_o := u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so}$

s.t.

$v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1$

$u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk} \leq v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk} \quad (k=1, \dots, n)$

$v_1, \dots, v_m \geq 0$

$u_1, \dots, u_s \geq 0$

<FP_o>の目的関数について分母を1にし、分子を最大化

<FP_o>の制約の分母を払う

注) 全部でn個のLPを解く！

CCRモデル

❖ 多入力・多出力

❖ 測定対象DMU_o($o=1, \dots, n$)のウェイトを計算する

❖ 例) 「意思決定科学」受講学生の効率性

学生(DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16	v_1
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v_2
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v_3
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50	u_1
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60	u_2

学生A (DMU A)のウェイト計算LP

<FP_A>

max. $\theta_A := \frac{40u_1 + 30u_2}{40v_1 + 0.8v_2 + v_3}$

s.t.

$\frac{40u_1 + 30u_2}{40v_1 + 0.8v_2 + v_3} \leq 1$

$\frac{60u_1 + 90u_2}{20v_1 + 0.2v_2 + 0.9v_3} \leq 1$

$\frac{30u_1 + 55u_2}{15v_1 + v_2 + 0.8v_3} \leq 1$

$\frac{20u_1 + 24u_2}{70u_1 + 24u_2} \leq 1$

$\frac{50u_1 + 60u_2}{30v_1 + 0.5v_2 + 0.9v_3} \leq 1$

$\frac{20v_1 + 0.9v_2 + v_3}{16v_1 + v_2 + v_3} \leq 1$

$v_1, v_2, v_3 \geq 0$

$u_1, u_2 \geq 0$

Confidential

3

CCRモデル

❖ 多入力・多出力

❖ 効率性について

$$\begin{aligned} \langle LP_o \rangle \quad & \max. \theta_o := u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so} \\ \text{s.t.} \quad & v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1 \\ & u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk} \leq v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk} \quad (k=1, \dots, n) \\ & v_1, \dots, v_m \geq 0 \\ & u_1, \dots, u_s \geq 0 \end{aligned}$$

Def: DMU_o がD効率的 $\Leftrightarrow \theta_o^* = 1$
 DMU_o がD非効率的 $\Leftrightarrow \theta_o^* < 1$

Lem: DMU_o がD非効率的, 即ち $\theta_o^* < 1$ なら
 $\exists k \in \{1, \dots, n\}, u_1^* y_{1k} + \dots + u_s^* y_{sk} = v_1^* x_{1k} + \dots + v_m^* x_{mk}$
この等号を満たすkの集合を DMU_o の優位集合 (or 参照集合) という

Def: DMU_o の優位集合 (or 参照集合)
 $E_o := \{k \in \{1, \dots, n\} | u_1^* y_{1k} + \dots + u_s^* y_{sk} = v_1^* x_{1k} + \dots + v_m^* x_{mk}\}$
効率的フロンティアの一部を形成

注) D効率的だからといって効率的とは言えない

CCRモデル

❖ 多入力・多出力

❖ $\langle LP_o \rangle$ の双対問題と最適解について

$$\begin{aligned} \langle LP_o \rangle \quad & \max. \theta_o := u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so} \\ \text{s.t.} \quad & v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1 \\ & u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk} \leq v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk} \quad (k=1, \dots, n) \\ & v_1, \dots, v_m \geq 0 \\ & u_1, \dots, u_s \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle D_o \rangle \quad & \min. \theta \\ \text{s.t.} \quad & \theta x_{io} - (x_{i1} \lambda_1 + \dots + x_{in} \lambda_n) \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \\ & (y_{j1} \lambda_1 + \dots + y_{jn} \lambda_n) - y_{jo} \geq 0 \quad (j=1, \dots, s) \\ & \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \end{aligned}$$

DMU_oの入力*i* 入力*i*の重み和

出力*j*の重み和 DMU_oの出力*j*

双対問題

$$\begin{cases} d_i^* := \theta x_{io} - (x_{i1} \lambda_1 + \dots + x_{in} \lambda_n) \quad (i=1, \dots, m) \\ d_j^* := (y_{j1} \lambda_1 + \dots + y_{jn} \lambda_n) - y_{jo} \quad (j=1, \dots, s) \end{cases}$$

入力の余剰 出力の不足

CCRモデル

❖ 多入力・多出力

❖ 入力の余剰と出力の不足を求める

$$\begin{aligned} \max. \quad & (d_1^* + \dots + d_m^*) + (d_1^y + \dots + d_s^y) \\ \text{s.t.} \quad & d_i^* = \theta^* x_{io} - (x_{i1} \lambda_1 + \dots + x_{in} \lambda_n) \quad (i=1, \dots, m) \\ & d_j^y = (y_{j1} \lambda_1 + \dots + y_{jn} \lambda_n) - y_{jo} \quad (j=1, \dots, s) \\ & \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \\ & d_1^*, \dots, d_m^* \geq 0 \\ & d_1^y, \dots, d_s^y \geq 0 \end{aligned}$$

$\langle LP_o \rangle$ の最適値

DEAの実行手順

$\langle D_o \rangle$ を解いて最適解 $(\theta^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$ を得た後,
このLPを解いて最適解 $(d_1^*, \dots, d_m^*, d_1^y, \dots, d_s^y)$ を得る.

Def: DEA効率性の定義
 $\theta^* = 1, (d_1^*, \dots, d_m^*, d_1^y, \dots, d_s^y) = \theta$ となるDMUはDEA効率的
それ以外のDMUはDEA非効率的

CCRモデル

❖ 例題 ([3] p.15)

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	4	4	4	3	2	6
入力2 x_2	2	3	1	2	4	1
出力 y	1	1	1	1	1	1

DMU A についての問題

$$\begin{aligned} \min. \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & 4\theta - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \geq 0 \\ & 2\theta - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\theta^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (0.83, 0, 0, 0.33, 0.67, 0, 0)$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{入力} & 0.83 \times A = 0.33 \times C + 0.67 \times D \\ \text{出力} & A = 0.33 \times C + 0.67 \times D \end{cases} \Rightarrow DMU A \text{ はDEA非効率的で、} \\ \text{有位集合はDMU C, D}$

入力1/出力

CCRモデル

❖ 例題 ([3] p.15)

DMU C についての問題

$$\begin{aligned} \min. \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & 4\theta - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \geq 0 \\ & 2\theta - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\theta^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (1.0, 0.1, 0.1, 0, 0, 0)$

$$\begin{aligned} \max. \quad & (d_1^* + d_2^*) + (d_1^y) \\ \text{s.t.} \quad & d_1^* = 1 - 4 - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \\ & d_2^* = 1 - 2 - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \\ & d_1^y = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0, \quad d_1^*, d_2^* \geq 0, \quad d_1^y \geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (d_1^*, d_2^*, d_1^y) = (0, 0, 0) \Rightarrow DMU C \text{ はDEA効率的}$

CCRモデル

❖ 例題 ([3] p.15)

DMU F についての問題

$$\begin{aligned} \min. \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & 6\theta - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \geq 0 \\ & 2\theta - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\theta^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (1.0, 0.1, 0.1, 0, 0, 0)$

$$\begin{aligned} \max. \quad & (d_1^* + d_2^*) + (d_1^y) \\ \text{s.t.} \quad & d_1^* = 1 - 6 - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \\ & d_2^* = 1 - 2 - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \\ & d_1^y = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0, \quad d_1^*, d_2^* \geq 0, \quad d_1^y \geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (d_1^*, d_2^*, d_1^y) = (2, 0, 0) \Rightarrow DMU F \text{ はDEA非効率的} \\ \text{有位集合はCで、入力余剰が入力1で2}$

Confidential

4

DEAの特徴

- ❖ 特徴(長所・短所)
 - ❖ 他と異なった特徴を持つDMUは、DEA効率的と判断されやすい
 - 他と異なることが良いことの場合は、DEAは良い指標
 - ❖ 全てのDEA効率値が大きい値を持つ場合がある
 - ❖ DEA効率的と判断されるDMUが非常に多い場合がある

例題 (DEAを用いた野球打者評価)
CCRモデルによる

- ❖ 2005年度シーズンのセ・パ両リーグ打率上位各30人の打者(計60人)について、DEAにより評価

入力

打数
三振

出力

安打
打点
四死球
犠打
盗塁

DMU
野球打者
= 与えられる打席を
得点に結びつけるシ
ステム

注: 三振は少ない方がよいので入力に...

		打数	三振	安打	打点	四死球	犠打	盗塁
青木宣親	ヤクルト	588	113	202	28	42	19	29
福留孝介	中日	515	128	169	103	94	3	13
金本知憲	阪神	559	86	183	125	101	2	3
金城龍彦	横浜	590	63	191	87	39	13	1
井端弘和	中日	560	77	181	63	78	21	22
岩村明憲	ヤクルト	548	146	175	102	65	5	6
:	:	:	:	:	:	:	:	:

データ(一部加工)
Yahoo!スポーツ プロ野球
個人成績 打率
2006年1月11日3時9分

例題 (DEAを用いた野球打者評価)
CCRモデルによる

- ❖ 2005年度シーズンのセ・パ両リーグ打率上位各30人の打者(計60人)について、DEAにより評価
 - ❖ 結果例: 2005年度セ・リーグ打率30位 石井琢朗(横)
<D_o>を解いた結果: $\theta = 0.8007$, $\lambda_3 = 0.1638$, $\lambda_5 = 0.2670$, $\lambda_8 = 0.1765$, $\lambda_{37} = 0.3476$

各入力

各出力

0.8007 × 石井琢朗 = 0.1638 × 金本知憲(阪) + 0.2670 × 井端弘和(中) + 0.1765 × 赤星憲広(阪) + 0.3476 × 城島健司(ノ)

石井琢朗 = 0.1638 × 金本知憲(阪) + 0.2670 × 井端弘和(中) + 0.1765 × 赤星憲広(阪) + 0.3476 × 城島健司(ノ)
 - ❖ 結果例: 2005年度セ・リーグ打率14位 二岡智宏(巨)
<D_o>を解いた結果: $\theta = 0.9053$, $\lambda_1 = 0.3890$, $\lambda_3 = 0.1581$, $\lambda_4 = 0.0225$, $\lambda_7 = 0.2917$

各入力

各出力

0.9053 × 二岡智宏 = 0.3890 × 青木宣親(ヤ) + 0.1581 × 金本知憲(阪) + 0.0225 × 金城龍彦(横) + 0.2917 × 前田智徳(広)

二岡智宏 = 0.3890 × 青木宣親(ヤ) + 0.1581 × 金本知憲(阪) + 0.0225 × 金城龍彦(横) + 0.2917 × 前田智徳(広)

注: <D_o>のモデル化、解は cplex9.0 による

生産可能集合

- ❖ 生産可能集合 P

入力(m個)

出力(s個)

DMU
Decision Making Unit

入力データ行列

$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix} x_{1\bullet} \\ \vdots \\ x_{m\bullet} \end{pmatrix}$

$y = \begin{pmatrix} y_{1\bullet} \\ \vdots \\ y_{s\bullet} \end{pmatrix}$

$\{(x, y) : \text{活動} (= \text{入力と出力の対})\}$
 $P = \{(x, y) : \text{生産可能集合} (= \text{活動の集合})\}$

出力データ行列

$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{s1} & \dots & y_{sn} \end{pmatrix}$

生産可能集合 P に対する仮定 (CCRモデル)

(1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) (i=1,...,n) は P に属する

(2) P に属す活動 (x, y) に対し、k倍した活動 (kx, ky) も P に属する

(3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす (x̄, ȳ) も P に属する

(4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

規模の収穫が一定
(constant returns to scale)

生産可能集合

- ❖ 「規模の収穫が一定」とは？

効用(満足度)

生産可能集合

収穫逓増 (increasing returns to scale)

規模の収穫が一定 (constant returns to scale)

収穫逓減 (decreasing returns to scale)

価値など

注: 一般には価値が大きくなるほど、効用の増加量は減る場合が多い。

生産可能集合

- ❖ 生産可能集合 P に対する仮定 (CCRモデル)

(1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) (i=1,...,n) は P に属する

(2) P に属す活動 (x, y) に対し、k倍した活動 (kx, ky) も P に属する

(3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす (x̄, ȳ) も P に属する

(4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0\}$

実際の問題は ϕ, x_0 と y_0 を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \dots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \dots + x_{mn}\lambda_n \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

出力

入力

CCRモデル (1入力・1出力)

点 A, B, C, D, E, F, G, H

注: CCRモデルは、凸包モデルの $L=0, U=\infty$ の場合とみなせる

生産可能集合

❖ 生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル)

(1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する

(2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する

(3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する

(4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

L, U の取り方により変わる

$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$

実際の問題は θx_e と y_e を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \dots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \dots + x_{mn}\lambda_n \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

λ_1, λ_2 の条件による $x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2$ の取り得る範囲

$\langle \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \rangle$ $\langle \lambda_1 + \lambda_2 \geq 1 \rangle$ $\langle L \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq U \rangle$ $\langle \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \rangle$

生産可能集合

Banker-Charnes-Cooper

❖ 生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル1: BCCモデル [$L=0, U=1$])

(1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する

(2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する

(3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する

(4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

BCCの効率値は一般にCCRより大になる

$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$

実際の問題は θx_e と y_e を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \dots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \dots + x_{mn}\lambda_n \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$e\lambda = 1$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$

BCCモデル (1入力・1出力)

生産可能集合

Increasing Returns to Scale

❖ 生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル2: IRSモデル [$L=1, U=\infty$])

(1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する

(2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する

(3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する

(4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

収穫増進

比較的規模の小さい活動の効率性を重視

$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$

実際の問題は θx_e と y_e を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \dots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \dots + x_{mn}\lambda_n \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$e\lambda \geq 1$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \geq 1$

IRSモデル (1入力・1出力)

生産可能集合

Decreasing Returns to Scale

❖ 生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル3: DRSモデル [$L=0, U=1$])

(1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する

(2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する

(3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する

(4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

収穫通減

比較的規模の大きい活動の効率性を重視

$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$

実際の問題は θx_e と y_e を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \dots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \dots + x_{mn}\lambda_n \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$e\lambda \leq 1$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq 1$

DRSモデル (1入力・1出力)

生産可能集合

General Returns to Scale

❖ 生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル4: GRSモデル [$L \leq 1, U \geq 1$])

(1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する

(2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する

(3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する

(4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

現存の活動の規模をある程度縮小拡大したもので認める立場

BCCの生産可能集合を拡大
効率値はBCCより悪い

$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$

実際の問題は θx_e と y_e を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \dots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \dots + x_{mn}\lambda_n \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$e\lambda = 0.8$ $e\lambda = 1.2$

$0.8 \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq 1.2$

GRSモデル (1入力・1出力)

参考文献

[1] A. Charnes, W.W. Cooper, and E. Rhodes, "Measuring the Efficiency of Decision Making Units", *European Journal of Operational Research*, Vol.2, pp.429-444, 1978

[2] 刀根薫「経営効率性の測定と改善～包絡分析法DEAによる～」日科技連 (1993)

[3] 末吉俊幸「DEA～経営効率分析法～」朝倉書店 (2001)

[4] 森雅夫・松井知己「オペレーションズ・リサーチ」朝倉書店 (2004)

[5] ...