

意思決定論：ゲーム理論 (Game Theory)

堀田 敬介

2003年11月*

目次

1	ゲームとは?: ゲーム理論の基礎	3
1.1	You cut, I choose. [7]	3
1.2	その他のゲーム理論での用語について [5]	4
1.3	ゲームの種類	5
1.4	ゲームの数理的表現	7
2	ゲームの定義	7
3	2人非協力零和ゲーム	8
3.1	2人零和ゲームと純粋戦略	8
3.2	2人零和ゲームと混合戦略: 純粋戦略では鞍点が存在しない場合	11
3.2.1	混合戦略における各プレイヤーの利得	14
3.2.2	混合戦略における(ミニマックス)均衡点(鞍点)	15
3.3	2人零和ゲームと線形計画, ミニマックス定理 [6]	19
4	2人非協力非零和ゲーム	30
4.1	2人非零和ゲーム	30
4.2	2人非零和ゲームと実現可能集合	32
4.2.1	2人ゲームで戦略が2つの場合の実現可能集合について	33

*初出 2001年8月, 更新履歴: 2001年10月, 2002年10月, 2002年11月

4.3	2人非零和ゲームと Nash 均衡解, Pareto 最適解	34
4.4	2人非零和ゲームの Nash 均衡解の求め方 ([5, 11] など)	36
4.5	寡占・複占市場とゲーム理論: Cournot 均衡, シュタッケルベルグ均衡	46
4.6	2人非零和ゲームと線形相補性問題, Nash 均衡解 ([6] など)	46
5	2人非零和協力ゲーム	51
5.1	協力と結合戦略	51
5.2	Nash 交渉	52
5.3	ラグランジュ乗数法による Nash 交渉解の求め方	53
A	零和2人ゲームの例	54
A.1	ホームズ最後の事件: 零和ゲームと混合戦略 ([10, 12] など)	54

1 ゲームとは?: ゲーム理論の基礎

1.1 You cut, I choose. [7]

Example 1.1. お父さんは兄弟に丸型ケーキをお土産に買ってきた。2つに切ってあげたいが、2人は何でも均等に与えられて育ったので、少しでも相手のほうが大きいと思うと不満をもらす。どうしたらいいだろう？

この問題の良く知られている解法は、節の題名にも上げた“You cut, I choose.”である。つまり、2人のうちのどちらか(兄)にケーキを切らせ、もう片方(弟)に選ばせるのである(なぜこれで2人は不満を言わなくなるか考えてみよう！)。

このことをもう少しわかりやすくまとめると下表のように表せる。

表 1.1: ケーキを仲良く：兄の取り分

兄の戦略 \ 弟の戦略	大きい(と思う)方をとる	小さい(と思う)方をとる
(できるだけ)同じ大きさに切る	半分より少し小さいケーキ	半分より少し大きいケーキ
一方を大きく切る	小さいケーキ	大きいケーキ

表 1.2: ケーキを仲良く：弟の取り分

兄の戦略 \ 弟の戦略	大きい(と思う)方をとる	小さい(と思う)方をとる
(できるだけ)同じ大きさに切る	半分より少し大きいケーキ	半分より少し小さいケーキ
一方を大きく切る	大きいケーキ	小さいケーキ

兄の戦略を考えてみよう。兄が取れる戦略は「(できるだけ)均等に切る」と「一方を大きく切る」である。このとき、兄は必ず「(できるだけ)均等に切る」戦略をとる。なぜならば、兄は、弟の戦略が「(できるだけ)大きいほうをとる」ことであることを知っているからである。即ち、不均等に切れば、自分に残されるケーキは小さいほうであることを知っているのである。

兄の戦略の考え方をミニマックス原理(マキシミン原理)とよぶ。自分の各戦略に対して、弟の全ての戦略を考えて、自分にとっての最悪の事態(小さなケーキ)をできるだけ回避しようとする考え方である。具体的には、兄の「(できるだけ)均等に切る」戦略での最悪の事態は「半分より少し小さいケーキ」を得ることであり、「不均等に切る」戦略での最悪の事態は「小さいケーキ」を得ることであるから、2つのうちよい方(マキシミン〔弟の表のミニマックス])である「半分より少し小さいケーキ」をとるのが合理的という考え方である。

弟についても同様に考えると、「大きい方をとる」戦略での最悪の事態は「半分より少し大きいケーキ」を得ることであり、「小さい方をとる」戦略では「小さいケーキ」を得ることであるから、2つのうち良いほう(マキシミン〔兄の表のミニマックス])である「半分より少し小さいケーキ」をとるのが合理的となる。

この例では、兄弟のマキシミン値が一致しているが、これをゲームの鞍点 saddle point とよぶ。

[7] では、さらに3人でケーキを分ける方法や、 n 人でケーキを分ける方法についても紹介している。

兄弟のケーキの取り分に関する表を利得表とよぶ。表 1.1, 1.2 を兄弟の得るケーキの大きさ (20 としよう) に置き換えた表が以下である。

表 1.3: 兄の利得 (満足度) 表

兄 \ 弟	大とる	小とる
均等切断	9	11
不均等切断	5	15

表 1.4: 弟の利得 (満足度) 表

兄 \ 弟	大とる	小とる
均等切断	11	9
不均等切断	15	5

ケーキを分ける例のように、複数の意思決定主体 (行動主体, プレイヤー) が存在し、各々目的を持ち、その実現を目指して相互に依存しあっている状況をゲームの状況 game situations とよぶ [5]。ゲーム的状況を数理的モデル (ゲーム game) を用いて定式化し、プレイヤー間の利害の対立と協力を分析する理論がゲーム理論 game theory である。

ここで、各ゲームは与えられた状態からはじめ、ある状態で終了する。プレイヤーの行動により、ゲームの各場面においては得点が得られる。また、同じ得点でもそれまでの得点状況や、プレイヤーの価値観により評価基準が違ってくる。この得点を評価したものをゲーム理論では利得とよぶ。各プレイヤーの目的は、各自の利得最大を目指すことである。

ゲームの各状態において、プレイヤーがとることのできる手 (戦略) は、(一般的に) 限られている。この限られた手 (とることのできる戦略) を実行可能な手 (戦略) strategy という。

さらに、各プレイヤーは敵対関係の場合だけではなく、協力してゲームを競うことがある (できる)。プレイヤー同士が協力する場合を協力ゲーム cooperative game, 敵対関係 (協力しない) 場合を非協力ゲーム noncooperative game という。

また、先のケーキの話では、表の各要素の和が一定 (20 になる) となっており、一定和ゲーム constant sum game と呼ばれる。

1.2 その他のゲーム理論での用語について [5]

プレイヤー ゲームの最も重要な要素。意思決定し行動する主体。(例) 消費者, 投資家, 企業, 団体, クラブ, 政党, 政府, 国家など。

提携 coalition 複数のプレイヤーが協力を目的として形成する集団。

戦略 strategy ゲームをプレイするために必要な行動の計画。

ゲームの結果 **outcome** 全てのプレイヤーが各々の戦略に従ってゲームをプレイすることで得られる。

選好順序 **preference order** ゲームに参加するプレイヤーが持つ、自分の目的に従ってゲームの結果を評価した時の、複数の(起こりうる)ゲームの結果に関する好ましい順序。

効用 **utility** , 利得 **payoff** プレイヤーの選好順序を数値化したもの。

効用最大化 プレイヤーは自分の利得を可能な限り最大にするように戦略を決定する。

ゲームのルール **rule** ゲームに参加するプレイヤーの集合, プレイヤーの目的, 選択可能な行動(戦略)の集合, ゲームのプレイの進行を定める規定の総称。

情報完備ゲーム **game with complete information** ゲームに参加する全てのプレイヤーがゲームのルールを完全に知っていて, かつ全てのプレイヤーが, 他のプレイヤーもゲームのルールを完全に知っていることを相互に認識し合っているゲーム。*

共有知識 **common knowledge** 情報完備ゲームにおけるゲームのルール。

情報不完備ゲーム **game with incomplete information** 情報完備でないゲーム。

ゲームの解 **solution**

プレイヤーの目的は、自分の効用(利得)最大化であるが、ゲームにおいては、自分の効用(利得)は、他のプレイヤーの行動(戦略)にも依存するので、他のプレイヤーの行動(戦略)を十分に考慮・推論する必要がある。ゲーム理論におけるプレイヤーは「合理的 **rational**」であることを前提とし、以下の仮定をおくのが普通である。

Assumption 1.2.

1. プレイヤーは各々明確な目的を持ち、可能な限り自分の目的を達成するような行動を選択する。
2. プレイヤーは可能な限り他のプレイヤーの行動(戦略)を推論する。

2つ目の仮定は、プレイヤーは「理性的 **intelligent**」であるといっている。つまり、各プレイヤーは、他のプレイヤーも自分と同じように合理的な主体であるとの認識に基づいて、相手の立場になってものを考えられるという意味である。

1.3 ゲームの種類

次の2つの観点からゲームを分類することができる。

* 「情報完備ゲーム」と「完全情報ゲーム」は意味が異なる。[11] pp.67-69

1. プレイヤーの数による分類

ゲームに参加するプレイヤーの人数により、2人ゲーム、3人ゲーム、...と分類できる。一般には、 n 人ゲーム。ここでは、主に2人ゲーム ($n = 2$ の場合) を扱う。

2. 利得 (効用) の状態による分類

ゲームの結果得られる利得状態に応じて、以下の3つに分類できる。

零和ゲーム zero-sum game プレイヤー (特に2人) の目的が完全に相反するゲーム。つまり、2人のプレイヤー A, B がいた時に、A の利得 (損失) が、そのまま B の損失 (利得) であるようなゲーム。

表 1.5: 零和2人ゲームの例：左表が A の利得表、右表が B の利得表

A \ B	S_B^1	S_B^2	S_B^3
S_A^1	5	0	1
S_A^2	2	1	4
S_A^3	-3	-1	2

A \ B	S_B^1	S_B^2	S_B^3
S_A^1	-5	0	-1
S_A^2	-2	-1	-4
S_A^3	3	1	-2

一定和ゲーム constant sum game 零和ゲームの自然な一般化。プレイヤーの利得の合計がゼロではなく一定値であるゲーム。

表 1.6: 一定和2人ゲームの例：左表が A、右表が B の利得表、利益の和が 10

A \ B	S_B^1	S_B^2	S_B^3
S_A^1	5	0	1
S_A^2	2	1	4
S_A^3	3	9	2

A \ B	S_B^1	S_B^2	S_B^3
S_A^1	5	10	9
S_A^2	8	9	6
S_A^3	7	1	8

ただし、例えば一定和ゲームの各利得から利得和の半分 (表 1.6 では 5) を引くと、零和ゲームになる。つまり、一定和ゲームは本質的に零和ゲームと同じ。

非零和ゲーム non-zero-sum game 上記でないゲーム

表 1.7: 非零和ゲームの例：双行列 bimatrix の形に書く。

A \ B	S_B^1	S_B^2
S_A^1	(2, 1)	(-1, -1)
S_A^2	(-1, -1)	(1, 2)

1.4 ゲームの数理的表現

ゲームを記述する方法には次の3通りがある。ただし、ゲームが有限 finite である場合、戦略形 (標準形) と展開形は同一のものとなる (とされている)。

戦略形ゲーム game in strategic form プレイヤーの戦略と利得の関数を用いて記述。ゲームの最も基本的なモデル。標準形ゲーム game in normal form と呼ばれる。

展開形ゲーム game in extensive form ゲームにおける手番の系列をゲームの木を用いて記述し、ゲームの動学的構造・情報構造を定式化。

提携形ゲーム game in coalitional form プレイヤーの様々な提携にとって実現可能な総利得・利得分配の集合を記述し、提携行動の分析に用いる。

Problem 1.3. 標準形で書かれたゲーム, 表 1.5, 1.7 を展開形で書いてみよう!

2 ゲームの定義

一般に、戦略 (標準) 形 n 人ゲームは次の要素の組によって定義される。

$$G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N}) \quad (2.1)$$

ただし、

- $N = \{1, \dots, n\}$: プレイヤーの集合,
- S_i : プレイヤー i の選択可能な行動 (戦略) の集合,
- $f_i: S (= S_1 \times \dots \times S_n) \rightarrow R$: プレイヤー i の利得関数。

ゲームのプレイは次の通り。全てのプレイヤー $(1, \dots, n)$ は他のプレイヤーの選択を知らずに其々の戦略 $s_1 \in S_1, \dots, s_n \in S_n$ を選択する。全員の戦略がわかったところで、各プレイヤーは利得 $f_i(s_1, \dots, s_n), (i = 1, \dots, n)$ を得る。

ゲームのプレイにおいては、

- 各プレイヤーの目的は、自己の利得最大化 (損失最小化) である。
- 式 (2.1) で定義されるゲームの各要素は全てのプレイヤーの共有知識 common knowledge とする。

戦略ゲームにおいて、零和ゲームは全ての戦略の組 $s = (s_1, \dots, s_n)$ に対して、以下の式が成立する時を言う。

$$\sum_{i=1}^n f_i(s_1, \dots, s_n) = 0.$$

この等式の右辺が定数の時、一定和ゲーム、等式自体が成立しない時が非零和ゲーム。

3 2人非協力零和ゲーム

3.1 2人零和ゲームと純粋戦略

Example 3.1. A君とBさんがトランプで簡単なゲームをしている。双方とも予め2枚のカードを持っており、1回だけ1枚のカードを出し、カードの目の差を利得としてもらえるというゲームである。さて、A君は「♠4」「♥7」の2枚、Bさん「♣2」「◇10」の2枚のカードを持っていることが互いに分かっている時、2人はどのようにカードを出すべきか？

表 3.1: A君の利得行列 (左) とBさんの利得行列 (右)

A \ B	♣2	◇10
♠4	2	-6
♥7	5	-3

A \ B	♣2	◇10
♠4	-2	6
♥7	-5	3

【解答例】A君は、Bさんがどちらのカードを出そうか、♥7のカードを出した方が得られる利得が大きいので、♥7を出す。同様に、Bさんは、A君がどちらのカードを出そうか、◇10を出した方が得られる利得が大きいので、◇10を出す、とも考えられるが、自分の利得は相手の戦略にも左右されるのでそれについてもう少し見てみよう。

【解説と言葉の定義】各プレイヤーの行動(戦略)のうちから一つだけを確定的に選ぶことを純粋戦略 pure strategy に従うという。この結果双方のプレイヤーの妥協点における戦略の組合せ(表 3.1 では (♥7, ◇10)) をゲームの解 game solution という。また、その時の値、(-3, 3) をゲームの値 game value という。

さらに、A君から見ると、Bさんが◇10を出す以上、♥7が損失の最小の戦略であり、Bさんから見ると、A君が♥7を出す限り、◇10を出すのが利得最大の手となっている。この両方が交差している点を鞍点 saddle point とよぶ。

Problem 3.2. A君とBさんがゲームをしている。其々3つの手(戦略)をとることができ、各手(戦略)を取った時に得られる利得行列は、以下の表 3.2 として与えられている。A君とBさんは各々どんな手を出せばよいか？

【考察】A君からゲームの解を求めてみよう。

- 最初、A君がBさんのとる戦略は p であると予想した場合。
 1. その時最大利得 4 が得られる戦略 z を選ぶ。
 2. Bさんは対抗措置として、戦略 q に変更。Bさんの利得： $-4 \rightarrow 3$ 。
 3. A君は対抗措置として、戦略 x に変更。A君の利得： $-3 \rightarrow 4$ 。
 4. Bさんは対抗措置として、戦略 p に変更。Bさんの利得： $-4 \rightarrow 2$ 。

表 3.2: A 君の利得表

A \ B	戦略 p	戦略 q	戦略 r
戦略 x	-2	4	-1
戦略 y	2	2	1
戦略 z	4	-3	0

5. A 君は対抗措置として、戦略 z に変更。A さんの利得： $-2 \rightarrow 4$ 。
となり、元に戻ってしまった。後はこれの繰返し。

- 最初、A 君が B さんのとる戦略は q であると予想した場合。
 1. その時最大利得 4 を得られる戦略 x を選ぶ。
 2. B さんは対抗措置として、戦略 p に変更。B さんの利得： $-4 \rightarrow 2$ 。
となり、先ほどの 3. と同じ状態になった。よって後は同じ。
- 最初、A 君が B さんのとる戦略は r であると予想した場合。
 1. その時最大利得 1 を得られる戦略 y を選ぶ。
 2. B さんは対抗措置として、戦略 p に変更 (q でも良い)。B さんの利得： $-1 \rightarrow$ ダメ、ゲームの表見直し。

以上の考察から分かることは、ゲームにおいては、A 君が利得最大を目指しても、B さんができるだけ A 君の利得を低くする行動に出る。利得を最小にされることが避けられない。始めから各戦略の最小利得を考慮して行動すればよい！具体的には、B さんがどの戦略をとっても最低得られる利得 (最小利得) を最大にする戦略をとればよい！

上記の問題においては、A 君が戦略 x, y, z を選んだ時の最小利得値は、各々 $-2, 1, -3$ である。この値を A 君が戦略 x, y, z の何れかをとる時の保証水準 security level という。次に、選んだ戦略から得られる保証水準 (最小の利得) を比べて、その中から最大の利得を得られる戦略 y を選ぶ。このように、保証水準 (各戦略の最小利得) を最大にする戦略をマキシミン戦略 maximin strategy とよぶ。

B さんにとって A 君の利得表は損失表であるので、B さんが戦略 p, q, r のいずれかを選んだときの最大損失は、各々 $4, 4, 1$ であり、これが B さんの保証水準となる。この中から最小の損失で抑えられる戦略 r を選ぶ。このように、保証水準 (各戦略の最大損失) を最小にする戦略をミニマックス戦略 minimax strategy とよぶ。

よって (y, r) がこのゲームの解であり、ゲームの値は $(1, -1)$ となる。

B さんの側で見ると、A 君がマキシミン戦略をとることが分かっていると、B さんは戦略 r を取らざるを得ない。A 君の側から見ると、B さんがミニマックス戦略をとることが分かっていると、A 君は戦略 y を採らざるを得ない。いずれも、自分の戦略を変えることでそれ以上の利得を得る

ことができないためである。この戦略の組をゲームの均衡点 *equilibrium point* (鞍点 *saddle point*) とよぶ。また、例のように A 君の利得表で考えたとき、A 君を最大化プレイヤー、B さんを最小化プレイヤーとよぶ。さらに、最大化プレイヤーがマキシミン戦略、最小化プレイヤーがミニマックス戦略をとることをミニマックス原理 *minimax principle* に従う行動とよび、マキシミン戦略とミニマックス戦略をまとめてミニマックス戦略とよぶ[†]。

この例では、ミニマックス原理に従った行動をとると均衡点(鞍点)に落ち着くが、ミニマックス原理による均衡点をミニマックス均衡点とよぶ。

利得表を行列としてみて、各利得値を a_{ij} とする

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

と、A 君のマキシミン戦略の値 v_A 、B さんのミニマックス戦略の値 v_B は

$$\begin{aligned} v_A &= \max_i \min_j \{a_{ij}\} = \max\{-2, 1, -3\} = 1, \\ v_B &= \min_j \max_i \{a_{ij}\} = \min\{4, 4, 1\} = 1. \end{aligned}$$

となる。この例においては、

$$\max_i \min_j \{a_{ij}\} = \min_j \max_i \{a_{ij}\} \tag{3.1}$$

が成立しているが、一般的には(純粋戦略上では)常に等号が成り立つとは限らない。またこの時、任意の i, j について、ミニマックス均衡点に対応した添え字を i^*, j^* とすると、

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

が成り立ち、 (i^*, j^*) が鞍点とよばれることもイメージできるであろう(このとき $a_{i^*j^*} = 1$)。鞍点が存在するのは、式(3.1)が成り立っている時である。

Problem 3.3. (1),(2)の利得表において、2人のプレイヤー A, B がミニマックス原理による行動をとる場合の各プレイヤーの戦略を其々考えよ。ただし、以下の表はいずれもプレイヤー A の利得表である。

(1)

A \ B	p	q	r
x	3	1	-1
y	-1	0	2
z	5	2	3

[†]J.von Neumann & O. Morgenstern, "Theory of Games and Economic Behavior", Princeton University Press(1944, 1947, 1953)での説明例題やその後の歴史的な経緯によりマキシミンもミニマックスもまとめて「ミニマックス」というようになったらしい [12]

(2)

A \ B	p	q	r
x	5	6	4
y	1	8	2
z	7	2	3

3.2 2人零和ゲームと混合戦略：純粋戦略では鞍点が存在しない場合

Example 3.4. A君とBさんがゲームをしている．其々3つの戦略をとることができ，各戦略をとった時に得られる利得は，以下の表 3.2 で与えられている．A君とBさんは各々どんな戦略をとるべきか？

表 3.3: A君の利得表

A \ B	戦略 p	戦略 q	戦略 r
戦略 x	-4	2	0
戦略 y	4	3	1
戦略 z	1	-3	2

上記利得表の各値を行列 $A = [a_{ij}]$ で表すとすると，

- A君のマキシミン戦略： $v_a = \max_i \min_j \{a_{ij}\} = \max\{-4, 1, -3\} = 1$
- Bさんのミニマックス戦略： $v_b = \min_j \max_i \{a_{ij}\} = \min\{4, 3, 2\} = 2$

従って，

$$v_a = \max_i \min_j \{a_{ij}\} \neq \min_j \max_i \{a_{ij}\} = v_b.$$

となり，ミニマックス均衡点（鞍点）が存在しない！

一般的には次の不等式が成り立つ．

Proposition 3.5.

$$\max_i \min_j \{a_{ij}\} \leq \min_j \max_i \{a_{ij}\}.$$

つまり，マキシミンは必ずミニマックスより小さくなるということ．一般の2人零和ゲームについて同様のことを Theorem 3.12 で述べ，証明もそこで行うので，ここでは割愛する．

前記の例のように，純粋戦略に従う2人非協力零和ゲームには（ミニマックス）均衡点がない場合がある．では（ミニマックス）均衡点が存在しない場合のゲームの最適戦略は求められないのだろうか？

表 3.4: A 君の利得表とミニマックス戦略

A \ B	戦略 p	戦略 q	戦略 r	min	max min
戦略 x	-4	2	0	-4	1
戦略 y	4	3	1	1	
戦略 z	1	-3	2	2	
max	4	3	2		
min max	2				

Example 3.6. A 君と B さんがゲームをしている。A 君は 3 つの戦略, B さんは 4 つの戦略をとることができ, 各戦略をとった時に得られる利得は, 以下の表 3.5 で与えられている。A 君と B さんは各々どんな戦略をとるべきか?

表 3.5: A 君の利得表

A \ B	戦略 p	戦略 q	戦略 r	戦略 s
戦略 x	3	1	3	4
戦略 y	4	4	2	3
戦略 z	2	3	1	2

ミニマックス原理に従って, A 君と B さんのとる戦略を考察してみよう。表 3.5 より A 君のマキシミン値は 2 なので, A 君は戦略 y をとる。これに対し, B のミニマックス値は 3 なので, B さんは戦略 r をとる。このとき, 合理的プレイヤーである A 君は, B さんが戦略 r をとることがわかるので, より利得の得られる戦略 x に変更し, 利得 3 を得ようとする。同じく合理的なプレイヤーである B さんは, 自分のミニマックス戦略 r により, A 君がマキシミン戦略から戦略 x に変えてくることを予想し, 自分の戦略を r からより損失の少ない q に変更する。さらに, それを予想できる A 君は, 戦略を x から y に変更し, 利得 4 を得ようとする...

ミニマックス値とマキシミン値が異なることや, 上の考察からもわかるように, このゲームには (純粋戦略のみでは) (ミニマックス) 均衡点 (鞍点) が存在しない。

さて (ミニマックス) 均衡点 (鞍点) について考察を進める前に, 支配戦略の概念を導入しよう。利得表が表 3.5 で与えられるゲームには, 始めから考慮しなくて良い戦略が存在し, その結果考察対象の利得表を小さくできる。例えば, 合理的なプレイヤーである A 君が戦略 z を選ぶことは絶対にない。なぜなら, すべての利得において, 戦略 y の方が z を上回るからである。このとき, 戦略 y が戦略 z を支配 (優越) dominate するという。戦略 y に支配されている戦略 z を消して考察対象の利得表を小さくできる。

表 3.6: A 君の利得表とミニマックス戦略

A \ B	戦略 p	戦略 q	戦略 r	戦略 s	min	max min
戦略 x	3	1	3	4	1	2
戦略 y	4	4	2	3	2	
戦略 z	2	3	1	2	1	
max	4	4	3	4		
min max	3					

A \ B	戦略 p	戦略 q	戦略 r	戦略 s
戦略 x	3	1	3	4
戦略 y	4	4	2	3

さらに、BさんはA君の戦略yがzを支配しているので戦略zが採用されることはないと容易に想像できることからやはり上表に到達し、そのうえで合理的なプレイヤーBさんは戦略p, sは絶対にとらない。なぜなら、戦略pはqに、戦略sはrにそれぞれ支配されているからである。従って、A君の利得表は以下ようになる。(Bさんの思考はA君にも容易に想像できることに注意)

表 3.7: 表 3.5 から被支配戦略を除いた A 君の利得表

A \ B	戦略 q	戦略 r
戦略 x	1	3
戦略 y	4	2

この小さくなったゲームの利得表で考えても、A君のマキシミン値は2、Bさんのミニマックス値は3で同じであり、やはり(ミニマックス)均衡点(鞍点)は存在しない。被支配戦略の削除は鞍点の存在性に影響を与えないからである(なぜか?)

以上の2つの例(表 3.2, 3.7)による考察から、一般の2人零和ゲームは(ミニマックス)均衡点(鞍点)が必ずしも存在しないことがわかった。

各プレイヤーがとることの出来る戦略を純粋戦略 pure strategy とよぶが、このように純粋戦略のみでは(ミニマックス)均衡点(鞍点)が存在しないゲームについては、以下のような戦略を考えることにしよう。戦略を一つだけに決めるのではなく、各プレイヤーが自分の戦略の幾つか(あるいは全部)を混ぜ合わせるという方法で、これを混合戦略 mixed strategy という。

例えば表 3.5 で、各プレイヤーはさいころを投げてその出た目で戦略を決めることにしよう。A君は、出た目が1か2のときは戦略x、3か4のときは戦略y、5、6のときは戦略zをとることにするのである(即ち、各戦略を確率 $\frac{1}{3}$ でとることにする)。このA君の混合戦略をベクトル表記

して,

$$s_A = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

と書く. 同様に, Bさんは出た目が1のときは戦略 p, 2, 3のとき戦略 q, 4のとき戦略 r, 5, 6のとき戦略 sをとることにする. Bさんのこの混合戦略をベクトル表記すると,

$$s_B = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right)$$

となる.

混合戦略の観点から見ると, 純粋戦略は, ある戦略を確率1でとるとみなすことができる.

ただし, ただ確率的に戦略を変える, すなわち運にゆだねるというのではあまりに短絡的すぎ, 合理的プレイヤーの姿とはほど遠い. そこで, 最大化プレイヤーは期待利得が最大, 最小化プレイヤーは期待損失が最小になるように戦略を組み合わせることを考える. 以下, それを見ていこう.

3.2.1 混合戦略における各プレイヤーの利得

表 3.7 において, 混合戦略をとったときに鞍点が存在するかどうか考察してみよう. A, B の混合戦略 s_A, s_B はそれぞれ

$$s_A = (s_A^1, s_A^2), \quad s_B = (s_B^1, s_B^2)$$

である. ただし,

$$s_A^1 + s_A^2 = 1, \quad s_A^1, s_A^2 \geq 0, \quad (3.2)$$

$$s_B^1 + s_B^2 = 1, \quad s_B^1, s_B^2 \geq 0. \quad (3.3)$$

これより, ゲームの各状態が起きる確率は次表のとおりとなる. ただし, 右表は式 (3.2), (3.3) の

A \ B	戦略 q	戦略 r
戦略 x	$s_A^1 s_B^1$	$s_A^1 s_B^2$
戦略 y	$s_A^2 s_B^1$	$s_A^2 s_B^2$

 \Rightarrow

A \ B	戦略 q	戦略 r
戦略 x	$s_A^1 s_B^1$	$s_A^1 (1 - s_B^1)$
戦略 y	$(1 - s_A^1) s_B^1$	$(1 - s_A^1) (1 - s_B^1)$

等式条件により, 左の表から変数を減らしたもので同じ表である.

故に, A君の期待利得 E_A は, この表と表 3.7 より,

$$\begin{aligned} E_A(s_A, s_B) &= 1s_A^1 s_B^1 + 3s_A^1 (1 - s_B^1) + 4(1 - s_A^1) s_B^1 + 2(1 - s_A^1) (1 - s_B^1) \\ &= -4s_A^1 s_B^1 + s_A^1 + 2s_B^1 + 2 \end{aligned}$$

となる. これは, A君が1回のプレイにより得られる利得の加重平均額となる. また, 以下のよう
に, 行列表記で書いても同じ.

$$E_A(s_A, s_B) = \begin{pmatrix} s_A^1, 1 - s_A^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_B^1 \\ 1 - s_B^1 \end{pmatrix}$$

また，これは B さんの期待損失でもある．同様に B さんの期待利得 E_B (A 君の期待損失) は以下の通り．

$$\begin{aligned} E_B(s_A, s_B) &= (s_A^1, 1 - s_A^1) \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_B^1 \\ 1 - s_B^1 \end{pmatrix} \\ &= 4s_A^1 s_B^1 - s_A^1 - 2s_B^1 - 2. \end{aligned}$$

【注】B さんの期待利得は，B さんの利得表から計算される！

以上より，当然ではあるが以下の関係があることが分かる（なせか？）

$$E_A(s_A, s_B) = -E_B(s_A, s_B)$$

A 君の期待利得 $E_A(s_A, s_B)$ をグラフにすると以下のようなになる．

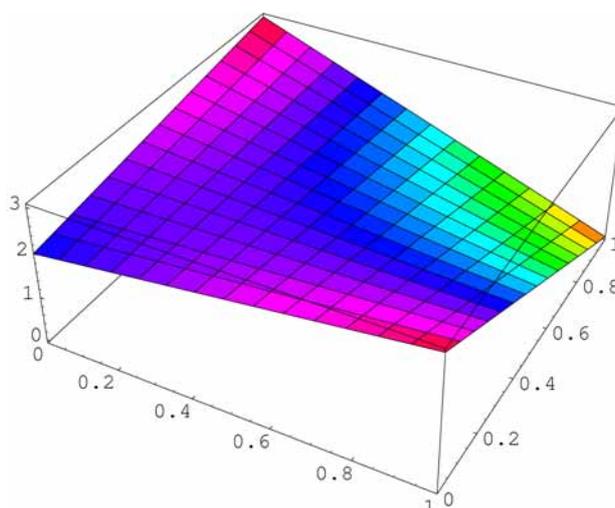


図 3.1: A 君の期待利得 (B さんの期待損失)

3.2.2 混合戦略における (ミニマックス) 均衡点 (鞍点)

混合戦略とは，各戦略を確率分ずつ出すのではなく (そんなことはできない)，各戦略を確率にもとづいて出す，即ち，1 回に 1 つの戦略を確率 (混合戦略) に従って選んで出す．従って，A 君の期待利得は，B さんの各純粋戦略に対して最大になる混合戦略として考えられる．

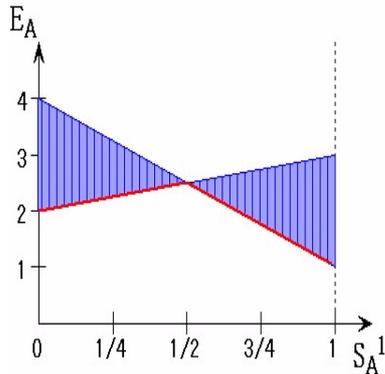
B さんが (純粋) 戦略 q をとった場合 (混合戦略 $s_B = (1, 0)$ をとった場合)，A 君の期待利得は，混合戦略を $s_A \in S_A$ として，

$$E_A(s_A, (1, 0)) = -4s_A^1 + s_A^1 + 2 + 2 = -3s_A^1 + 4$$

で書け、Bさんが(純粋)戦略rをとった場合(混合戦略 $s_B = (0, 1)$ をとった場合)、A君の混合戦略 $s_A \in S_A$ による期待利得は、

$$E_A(s_A, (0, 1)) = s_A^1 + 2 = s_A^1 + 2$$

となる。 s_A^1 を横軸に、 E_A を縦軸としてグラフに書いてみよう！(図 3.2)



Bさんの各(純粋)戦略に対する、A君の混合戦略に従う期待利得が図 3.2 で表される時、A君がミニマックス原理で戦略決定を行うと、A君のマキシミン値はグラフの領域上のミニマム値(領域の下側の折れ線)の中で最大(マックス)をとる部分の値となる！この時、

$$(s_A^1, s_A^2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad E_A = 2.5$$

となる。

図 3.2: A君の混合戦略

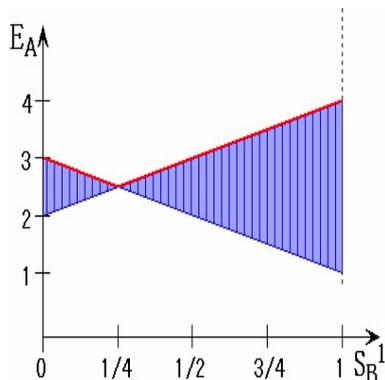
同様に、Bさんの側から考えてみよう！A君が(純粋)戦略xをとった場合(混合戦略 $s_A = (1, 0)$ をとった場合)、Bさんの混合戦略に従う期待損失は、

$$E_A((1, 0), s_B) = -4s_B^1 + 1 + 2s_B^1 + 2 = -2s_B^1 + 3$$

であり、A君が(純粋)戦略rをとった場合(混合戦略 $s_A = (0, 1)$ をとった場合)、Bさんの混合戦略に従う期待損失は、

$$E_A((0, 1), s_B) = 2s_B^1 + 2$$

となる。 s_B^1 を横軸に、 E_A を縦軸としてグラフに書くと... (図 3.3)



A君の各(純粋)戦略に対する、Bさんの期待利得は図 3.3 の通りである。よって、Bさんがミニマックス原理に基づいた線略決定を行うなら、Bさんのミニマックス値はグラフの領域上の最大(領域の上側の折れ線)の中で最小(ミニマム)をとる部分の値となる。この時、

$$(s_B^1, s_B^2) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \quad E_A = 2.5$$

となる。

図 3.3: Bさんの混合戦略

以上より、A君のマキシミン値とBさんのミニマックス値が2.5で等しくなっていることがわかる。純粹戦略において(ミニマックス)均衡点(鞍点)が存在しないゲームについても、混合戦略をとることによって(ミニマックス)均衡点(鞍点)鞍点が求められた。二人のプレイヤーがミニマックス原理に従ってとった混合戦略(A君が $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, Bさんが $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$)がこのゲームの解となる。このような(ミニマックス)均衡点が得られる混合戦略を最適混合戦略とよぶ。

今後、各プレイヤーがミニマックス原理に従った行動により期待利得が最大(期待損失が最小)になる混合戦略のことをミニマックス解とぶことにする。2人零和ゲームにおいては、ミニマックス解は最適混合戦略であり(ミニマックス)均衡点(鞍点)を与える。即ち、ミニマックス解 (\hat{s}_A, \hat{s}_B) では、

$$E_A(s_A, \hat{s}_B) \leq E_A(\hat{s}_A, \hat{s}_B) \text{ for } \forall s_A,$$

$$E_A(\hat{s}_A, s_B) \leq E_A(\hat{s}_A, s_B) \text{ for } \forall s_B$$

が成立する。

混合戦略において、ゲームの解が存在することはミニマックス定理 **minimax theorem** により保障される。この理論的な説明は、次節で2人のプレイヤーの戦略が各々 m, n 個あるときについて考察し、ミニマックス定理を導出・証明することとしよう。

Problem 3.7. 以下の各ゲームについて、ミニマックス原理に従った混合戦略と(ミニマックス)均衡点、及びそのとき得られる期待利得を導出せよ。ただし、各表はいずれもプレイヤーAの利得を表している。

(1)

A \ B	戦略 p	戦略 q
戦略 x	4	-2
戦略 y	-3	3

(2)

A \ B	戦略 p	戦略 q
戦略 x	3	1
戦略 y	-1	5

(3)

A \ B	戦略 p	戦略 q	戦略 r
戦略 x	5	4	3
戦略 y	2	3	0
戦略 z	1	2	4

(4)

A \ B	戦略 p	戦略 q	戦略 r
戦略 x	3	2	4
戦略 y	-1	3	0
戦略 z	2	1	-2

(5)

A \ B	戦略 p	戦略 q	戦略 r
戦略 x	3	8	1
戦略 y	2	4	4
戦略 z	6	7	0
戦略 w	-2	-1	5

3.3 2人零和ゲームと線形計画，ミニマックス定理 [6]

2人零和ゲームを考える．プレイヤーはA, Bの2人であり，A, Bは各々 m 個， n 個の（純粋）戦略を持っているとする．

プレイヤーA, Bの混合戦略を各々，

$$s_A = (s_A^1, \dots, s_A^m), \quad \text{ただし} \quad \sum_{i=1}^m s_A^i = 1, \quad s_A^1, \dots, s_A^m \geq 0,$$

$$s_B = (s_B^1, \dots, s_B^n), \quad \text{ただし} \quad \sum_{j=1}^n s_B^j = 1, \quad s_B^1, \dots, s_B^n \geq 0$$

とする．また，A, Bの混合戦略の全体を S_A, S_B と書くことにすると，

$$S_A = \left\{ s_A \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m s_A^i = 1, \quad s_A^1, \dots, s_A^m \geq 0 \right\},$$

$$S_B = \left\{ s_B \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n s_B^j = 1, \quad s_B^1, \dots, s_B^n \geq 0 \right\}$$

である．このとき，プレイヤーAの i 番目，Bの j 番目の純粋戦略は各々，

$$s_A = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m \quad (i \text{ 番目だけが } 1 \text{ で他は全部 } 0),$$

$$s_B = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \quad (j \text{ 番目だけが } 1 \text{ で他は全部 } 0)$$

で表される．

プレイヤーAが i 番目，Bが j 番目の純粋戦略をえらんだときのAの利得（Bの損失）が r_{ij} であるとすると，Aの利得行列（Bの損失行列）を

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix}$$

と書ける．零和ゲームにおいては，Bの利得行列は $-R$ となる．

さて，混合戦略の組 $(s_A, s_B) \in S_A \times S_B$ が決まると，Aの i 番目，Bの j 番目の戦略の組合せが実現される確率は $s_A^i s_B^j$ で，このときのプレイヤーAの利得が r_{ij} であるから，プレイヤーAの期待利得 $E_A : S_A \times S_B \rightarrow \mathbb{R}$ は，

$$E_A(s_A, s_B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} s_A^i s_B^j,$$

であり，プレイヤー B の期待利得 $E_B : S_A \times S_B \rightarrow \mathbb{R}$ は，プレイヤー A の期待損失に等しく，

$$E_B(s_A, s_B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (-r_{ij}) s_A^i s_B^j = -E_A(s_A, s_B),$$

となる．零和ゲームにおいてはこのように A の利得はそのまま B の損失であり，A の期待利得だけ考えていれば十分なので，ここでは $E : S_A \times S_B \rightarrow \mathbb{R}$ を用い，

$$E(s_A, s_B) := E_A(s_A, s_B) (= -E_B(s_A, s_B))$$

で期待利得 (損失) を表すことにする．

Definition 3.8. 均衡解 equilibrium point 2つのベクトル $s_A^* \in S_A$, $s_B^* \in S_B$ (混合戦略) が存在して，

$$E(s_A, s_B^*) \leq E(s_A^*, s_B^*), \quad \forall s_A \in S_A, \quad (3.4)$$

$$E(s_A^*, s_B) \geq E(s_A^*, s_B^*), \quad \forall s_B \in S_B. \quad (3.5)$$

を満たすとき， $(s_A^*, s_B^*) \in S_A \times S_B$ を2人零和ゲームの均衡解という．

零和ゲームの均衡解 (s_A^*, s_B^*) は，プレイヤー B が (混合) 戦略を s_B^* に固定した時，プレイヤー A の期待利得を最大にする (混合) 戦略は s_A^* であり，逆に，プレイヤー A が (混合) 戦略を s_A^* に固定した時，プレイヤー B の期待損失を最小にする (混合) 戦略は s_B^* であることを意味している．

Lemma 3.9. (s_A^*, s_B^*) をゲームの均衡解としたとき，以下が成り立つ．

- (1) プレイヤー B の混合戦略が s_B^* であるとき，プレイヤー A の期待利得を最大化する混合戦略は s_A^* である．
- (2) プレイヤー A の混合戦略が s_A^* であるとき，プレイヤー B の期待損失を最小化する混合戦略は s_B^* である． ■

Lemma 3.9 より言える事は，もし均衡解 (s_A^*, s_B^*) が存在しているなら，いずれのプレイヤーも，相手が戦略を変更しない限り，自分が均衡点から移動することで利得を増やす (減らす) ことはできない，ということである．

Lemma 3.10. $(s_A^*, s_B^*) \in S_A \times S_B$ が均衡解であるための必要十分条件は，

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} (s_B^j)^* \leq E(s_A^*, s_B^*), \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^m r_{ij} (s_A^i)^* \geq E(s_A^*, s_B^*), \quad j = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

が成立することである．

Proof: (Sufficiency) (s_A^*, s_B^*) が式 (3.6), (3.7) を満たすとする . $s_A \in S_A$ とし , 式 (3.6) の両辺に $s_A^i (\geq 0)$, $i = 1, \dots, m$ を掛けて足し合わせると ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n r_{ij} (s_B^j)^* \right) s_A^i &\leq \sum_{i=1}^m E(s_A^*, s_B^*) s_A^i \\ &= E(s_A^*, s_B^*) \cdot \sum_{i=1}^m s_A^i \\ &= E(s_A^*, s_B^*). \end{aligned}$$

即ち , 式 (3.4) が成り立つ . 同様に , $s_B \in S_B$ とし , 式 (3.7) の両辺に $s_B^j (\geq 0)$, $j = 1, \dots, n$ を掛けて足し合わせ , 式 (3.5) が得られる . 故に , Definition 3.8 より (s_A^*, s_B^*) は均衡解である .

(Necessity) (s_A^*, s_B^*) を均衡解とする . $s_A^* \in S_A$ は式 (3.4) を満たすので ,

$$E(s_A, s_B^*) \leq E(s_A^*, s_B^*), \quad \forall s_A \in S_A$$

ここで , $s_A = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ (第 i 成分のみ 1 で残りは 0 のベクトル) を考えると ,

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} (s_B^j)^* \leq E(s_A^*, s_B^*) \quad \text{for } i$$

となるが , $i \in \{1, \dots, m\}$ は任意で成り立つので , 式 (3.6) が成立する . s_B についても同様にして , 式 (3.7) が成立する . ■

Lemma 3.10 より , 均衡解を求めるためには , 式 (3.6), (3.7) を満たす (s_A^*, s_B^*) を見つければよいことがわかる .

以下の主双対線形計画問題を考える .

$$(P) \quad \begin{cases} \max & u \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^m r_{ij} s_A^i \geq u, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{i=1}^m s_A^i = 1, \\ & s_A^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (3.8)$$

$$(D) \quad \begin{cases} \min & w \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n r_{ij} s_B^j \leq w, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^n s_B^j = 1, \\ & s_B^j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (3.9)$$

Problem 3.11. 上記 (P), (D) が主双対の関係になっていることを確かめよ .

$\mathbf{e}^\top = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$ を使って (P),(D) を行列表記で書き直すと,

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad u \\ \text{s.t.} \quad R\mathbf{s}_A \geq u\mathbf{e} \\ \quad \quad \mathbf{e}^\top \mathbf{s}_A = 1 \\ \quad \quad \mathbf{s}_A \geq \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (D) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad w \\ \text{s.t.} \quad R^\top \mathbf{s}_B \leq w\mathbf{e} \\ \quad \quad \mathbf{e}^\top \mathbf{s}_B = 1 \\ \quad \quad \mathbf{s}_B \geq \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

主問題 (P) を標準形に変形し, 双対化する.

$$\begin{aligned} (P) &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \bar{u} - \hat{u} \\ \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} R & -\mathbf{e} & \mathbf{e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_A \\ \bar{u} \\ \hat{u} \end{bmatrix} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \quad \quad \begin{bmatrix} \mathbf{e}^\top & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_A \\ \bar{u} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = 1 \\ \quad \quad \begin{bmatrix} \mathbf{s}_A \\ \bar{u} \\ \hat{u} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \quad \quad \mathbf{v} \geq \mathbf{0} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0}^\top & 1 & -1 & \mathbf{0}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_A \\ \bar{u} \\ \hat{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \\ \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} R & -\mathbf{e} & \mathbf{e} & -I \\ \mathbf{e}^\top & 0 & 0 & \mathbf{0}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_A \\ \bar{u} \\ \hat{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \quad \quad \begin{bmatrix} \mathbf{s}_A \\ \bar{u} \\ \hat{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{array} \right. \\ (\text{双対化}) &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \begin{bmatrix} \mathbf{z}^\top & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{z}^\top & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & -\mathbf{e} & \mathbf{e} & -I \\ \mathbf{e}^\top & 0 & 0 & \mathbf{0}^\top \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{0}^\top & 1 & -1 & \mathbf{0}^\top \end{bmatrix} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min \quad w \\ \text{s.t.} \quad \mathbf{z}^\top R + w\mathbf{e}^\top \geq \mathbf{0}^\top \\ \quad \quad -\mathbf{z}^\top \mathbf{e} \geq 1 \\ \quad \quad \mathbf{z}^\top \mathbf{e} \geq -1 \\ \quad \quad -\mathbf{z}^\top I \geq \mathbf{0}^\top \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min \quad w \\ \text{s.t.} \quad R^T(-z) \leq we \\ \quad \quad e^T(-z) = 1 \\ \quad \quad (-z) \geq \mathbf{0} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad (S_B = -z) \quad (D)$$

より双対問題 (D) ができる．逆も同じ (双対問題 (D) の双対化で主問題 (P) を作れる) ．

Theorem 3.12. 2人零和ゲームにおいて，任意の混合戦略 $s_A \in S_A$ と $s_B \in S_B$ について

$$\max_{s_A \in S_A} \min_{s_B \in S_B} E(s_A, s_B) \leq \min_{s_B \in S_B} \max_{s_A \in S_A} E(s_A, s_B) \quad (3.11)$$

が成り立つ．ただし，関数 $E : S_A \times S_B \rightarrow \mathbb{R}$ は

$$E(s_A, s_B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} s_A^i s_B^j.$$

Proof: 任意の混合戦略 $s_A \in S_A$, $s_B \in S_B$ に対して

$$\min_{s_B \in S_B} E(s_A, s_B) \leq E(s_A, s_B) \leq \max_{s_A \in S_A} E(s_A, s_B)$$

が成り立つ．ここで，

$$\begin{aligned} s_B^* &:= \operatorname{argmin}_{s_B \in S_B} E(s_A, s_B), \\ s_A^* &:= \operatorname{argmax}_{s_A \in S_A} E(s_A, s_B) \end{aligned}$$

とすると，

$$E(s_A, s_B^*) \leq E(s_A^*, s_B)$$

この不等式は任意の s_A に対して成立しており，右辺は s_A に依存しないので，

$$\max_{s_A \in S_A} E(s_A, s_B^*) \leq E(s_A^*, s_B)$$

この不等式は任意の s_B に対して成立しており，左辺は s_B に依存しないので，

$$\max_{s_A \in S_A} E(s_A, s_B^*) \leq \min_{s_B \in S_B} E(s_A^*, s_B)$$

s_A^*, s_B^* を使わずに書くと，

$$\max_{s_A \in S_A} \min_{s_B \in S_B} E(s_A, s_B) \leq \min_{s_B \in S_B} \max_{s_A \in S_A} E(s_A, s_B)$$

となり，題意が示された． ■

Theorem 3.12, 式 (3.11) は，左辺が主問題 (P) の目的関数，右辺が双対問題 (D) の目的関数に対応しており，この主・双対問題の間に弱双対定理が成り立つと述べていることに等しい．

Theorem 3.13. 問題 (P), (D) の最適解がそれぞれ $(s_A^*, u^*), (s_B^*, w^*)$ のとき, (s_A^*, s_B^*) はゲームの均衡解である .

Proof: 問題 (P), (D) は明らかに実行可能である . なぜなら, (P) において

$$s_A := (1, 0, \dots, 0), \quad u := \max_{1 \leq j \leq n} r_{ij}$$

が一つの実行可能解になっている . (D) についても同様に,

$$s_B := (1, 0, \dots, 0), \quad w := \min_{1 \leq i \leq m} r_{ij}$$

が一つの実行可能解になっている . よって双対定理より, (P), (D) はいずれも最適解をもち, その目的関数値は一致する . そこで, (P), (D) の任意の最適解を各々 $(s_A^*, u^*), (s_B^*, w^*)$ とすると,

$$u^* = w^*, \tag{3.12}$$

$$\sum_{i=1}^m r_{ij} (s_A^i)^* \geq u^*, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \tag{3.13}$$

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} (s_B^j)^* \leq w^*, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}. \tag{3.14}$$

が成り立つ . 従って, 式 (3.13) の両辺に $(s_B^j)^* (\geq 0)$, $j = 1, \dots, n$ を掛けて足し合わせ, 式 (3.14) の両辺に $(s_A^i)^* (\geq 0)$, $i = 1, \dots, m$ を掛けて辺々足し合わせると,

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m r_{ij} (s_A^i)^* \right) (s_B^j)^* \geq u^* \sum_{j=1}^n (s_B^j)^* = u^*,$$

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n r_{ij} (s_B^j)^* \right) (s_A^i)^* \leq w^* \sum_{i=1}^m (s_A^i)^* = w^*.$$

となるが, 式 (3.12) より $u^* = w^*$ であるから,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} (s_A^i)^* (s_B^j)^* \leq u^* = w^* \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} (s_B^j)^* (s_A^i)^*$$

即ち,

$$E(s_A^*, s_B^*) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} (s_A^i)^* (s_B^j)^* = u^* = w^*$$

を得る . これと, 式 (3.13), (3.14) から

$$\sum_{i=1}^m r_{ij} (s_A^i)^* \geq E(s_A^*, s_B^*), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} (s_B^j)^* \leq E(s_A^*, s_B^*), \quad i = 1, \dots, m.$$

となり, Lemma 3.10 より, (s_A^*, s_B^*) は零和ゲームの均衡解である . ■

Definition 3.14. 均衡解 (s_A^*, s_B^*) における (P),(D) の目的関数値 $u^* = w^* = E(s_A^*, s_B^*)$ をゲームの値という.

Example 3.15. A君とBさんがじゃんけんゲームをする. はじめに, 2人は相当数のコインをもっているとする. じゃんけんをしてパーで勝ったら相手のコインを7枚, チョキで勝ったときは4枚, グーで勝ったら2枚貰える (それぞれの手で負けた場合は当然そのマイナス分相手に支払うことを意味する). このゲームの混合戦略と均衡解を求めよ.

A君の利得表 (Bさんの損失表) を書くと表 3.3 のようになる.

表 3.8: じゃんけんゲーム: A君の利得表

A \ B	s_B^1 :グー	s_B^2 :チョキ	s_B^3 :パー
s_A^1 :グー	0	2	-7
s_A^2 :チョキ	-2	0	4
s_A^3 :パー	7	-4	0

まず, 純粋戦略のみでミニマックス戦略に基づいて考えてみよう. 表 3.3 から A君のマキシミン値を求めると, $\max\{-7, -2, -4\} = -2$ で戦略 s_A^2 (チョキ), 同様に Bさんのミニマックス値は, $\min\{7, 2, 4\} = 2$ で戦略 s_B^2 (チョキ) となる. よって, ミニマックス解は $(s_A^2, s_B^2) = (\text{チョキ}, \text{チョキ})$ となり, そのときの A君, Bさんの利得は $(0, 0)$ である.

ところが, 相手がチョキを出すと分かっているなら, 当然戦略はグーに変更する (双方ともそう考える). さらに, 相手が裏を読んでグーを出すと分かるので, 戦略はパーに変更すべきである (双方とも). さらにさらに裏の裏を読んでチョキに..., と戦略変更が続く (いずれの場合も双方の利得は 0). いずれにせよ, これらの純粋戦略は均衡解の定義 Definition 3.8 を満たさない (確認せよ).

次に混合戦略について, 線形計画問題の観点から考えてみよう. ゲームの均衡解は, この利得表 3.3 をもとにした以下の線形計画問題の主・双対問題の最適解として与えられる.

$$\begin{array}{l}
 \text{(P)} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \max \quad u \\
 \text{s.t.} \quad \quad \quad 2s_A^2 - 7s_A^3 \geq u, \\
 \quad \quad \quad -2s_A^1 + 4s_A^3 \geq u, \\
 \quad \quad \quad 7s_A^1 - 4s_A^2 \geq u, \\
 \quad \quad \quad s_A^1 + s_A^2 + s_A^3 = 1, \\
 \quad \quad \quad s_A^1, s_A^2, s_A^3 \geq 0.
 \end{array} \right. \quad (3.15)
 \end{array}$$

$$(D) \quad \begin{cases} \min & w \\ \text{s.t.} & -2s_B^2 + 7s_B^3 \leq w, \\ & 2s_B^1 - 4s_B^3 \leq w, \\ & -7s_B^1 + 4s_B^2 \leq w, \\ & s_B^1 + s_B^2 + s_B^3 = 1, \\ & s_B^1, s_B^2, s_B^3 \geq 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

上記は、主・双対の関係であるが、実はまったく同じ問題でもある（双対問題 (D) の不等式制約 3 つを (-1) 倍して、 $w := -u$ とし、最小化問題にする）。このように、主問題と双対問題がまったく同じ問題を自己双対線形計画問題 **selfdual linear programming problem** とよぶ。

この問題を単体法で解くと得られる均衡解（混合戦略）とゲームの値 ($u^* = w^*$) は、

$$\begin{cases} s_A^* = (0.308, 0.538, 0.154) \\ s_B^* = (0.308, 0.538, 0.154) \end{cases} \quad (\text{小数第 4 位で四捨五入}), \quad u^* = w^* = 0$$

この結果より、A 君も B さんもグー、チョキ、パーを其々約 31%, 54%, 15% の割合で出すのが最も良く、このときの期待利得は 0、即ちコイン収支 0 枚となる。

この例からも容易に推察できるように、一般に利得行列 R が (n 次正方) 歪対称行列 skew-symmetric matrix ($R^T = -R$) ならば、均衡解を求めるために定式化した線形計画問題 (3.8), (3.9) は自己双対となる。行列表記した場合 (3.10) を考えれば明らか。

Theorem 3.16. ミニマックス定理 (2 人零和ゲームの) 任意の利得行列 $R = [r_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ に対して

$$\max_{s_A \in S_A} \min_{s_B \in S_B} E(s_A, s_B) = \min_{s_B \in S_B} \max_{s_A \in S_A} E(s_A, s_B) \quad (3.17)$$

が成り立つ。ただし、関数 $E: S_A \times S_B \rightarrow \mathbb{R}$ は

$$E(s_A, s_B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} s_A^i s_B^j.$$

式 (3.17) の左辺は、プレイヤー A のマキシミン値、即ち、

s_A を一つ固定したときに A の利得が最小 (B の損失最小) となる $s_B \in S_B$ を定め、それらのうち、最大利得を達成する $s_A \in S_A$ を選ぶ

ことを表し、式 (3.17) の右辺は、プレイヤー B のミニマックス値、即ち、

s_B を一つ固定したときに B の損失が最大 (A の利得最大) となる $s_A \in S_A$ を定め、それらのうち、最小損失を達成する $s_B \in S_B$ を選ぶ

ことを表して、ミニマックス定理はその両者 (A の利得最大と B の損失最小) が一致すると述べている。

Proof: 式 (3.17) の右辺について考えてみよう。 $\hat{s}_B \in S_B$ が与えられたときに $E(s_A, \hat{s}_B)$ を最大化する s_A を求める問題は

$$(P; \hat{s}_B) \left| \begin{array}{l} \max E(s_A, \hat{s}_B) \\ \text{s.t. } s_A \in S_A \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n r_{ij} \hat{s}_B^j \right) s_A^i \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^m s_A^i = 1 \\ s_A \geq \mathbf{0} \end{array} \right.$$

と定式化できる。この問題は明らかに実行可能で ($s_A = (1, 0, \dots, 0)$ など)、実行可能領域が有界閉かつ目的関数が連続より最適解が存在する。問題 $(P; \hat{s}_B)$ の双対問題は

$$(D; \hat{s}_B) \left| \begin{array}{l} \min w \\ \text{s.t. } w \geq \sum_{j=1}^n r_{ij} \hat{s}_B^j, \quad (i = 1, \dots, m) \end{array} \right.$$

より、双対定理から

$$\max_{s_A \in S_A} \left\{ \sum_i \left(\sum_j r_{ij} \hat{s}_B^j \right) s_A^i \right\} = \min_w \left\{ w \mid w \leq \sum_j r_{ij} \hat{s}_B^j \quad (i = 1, \dots, m) \right\}$$

任意の $\hat{s}_B \in S_B$ でこれが成り立つので、

$$\begin{aligned} \min_{s_B \in S_B} \max_{s_A \in S_A} \left\{ \sum_i \sum_j r_{ij} s_A^i s_B^j \right\} &= \min_{s_B \in S_B} \min_w \left\{ w \mid w \leq \sum_j r_{ij} s_B^j \quad (i = 1, \dots, m) \right\} \\ &= \min_w \left\{ w \mid w \leq \sum_j r_{ij} s_B^j \quad (i = 1, \dots, m), s_B \in S_B \right\} \end{aligned}$$

この式の左辺は定理式 (3.17) の右辺に等しく、右辺は (3.9) で表される問題 (D) に等しい。即ち、定理式 (3.17) の右辺は問題 (D) の最適値 w^* に等しい。

次に、定理式 (3.17) の左辺について考えてみよう。 $\hat{s}_A \in S_A$ が与えられたときに $E(\hat{s}_A, s_B)$ を最小化する s_B を求める問題は

$$(D; \hat{s}_A) \left| \begin{array}{l} \min E(\hat{s}_A, s_B) \\ \text{s.t. } s_B \in S_B \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \min \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m r_{ij} \hat{s}_A^i \right) s_B^j \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n s_B^j = 1 \\ s_B \geq \mathbf{0} \end{array} \right.$$

と定式化できる．先ほどと同様に，この問題 $(D; \hat{s}_A)$ の双対問題を考えると

$$(P; \hat{s}_A) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad u \\ \text{s.t.} \quad u \leq \sum_{i=1}^m r_{ij} \hat{s}_A^i, \quad (j = 1, \dots, n) \end{array} \right.$$

より，双対定理から

$$\begin{aligned} \max_{s_A \in S_A} \min_{s_B \in S_B} \left\{ \sum_i \sum_j r_{ij} s_B^j s_A^i \right\} &= \max_{s_A \in S_A} \max_u \left\{ u \mid u \leq \sum_i r_{ij} s_A^i \quad (j = 1, \dots, n) \right\} \\ &= \max_u \left\{ u \mid u \leq \sum_i r_{ij} s_A^i \quad (j = 1, \dots, n), s_A \in S_A \right\} \end{aligned}$$

この式の左辺は定理式 (3.17) の左辺に等しく，右辺は (3.8) で表される問題 (P) に等しい．即ち，定理式 (3.17) の左辺は問題 (P) の最適値 u^* に等しい．

ところで，問題 (P)，(D) は互いに双対で $u^* = w^*$ であるから定理が示された． ■

以上の定理より，以下のことが言えたことが分かる．

Proposition 3.17.

- (1) 任意の利得行列 $R = [r_{ij}]$ に対して，均衡解が必ず存在する．
- (2) 均衡解が一意的でない場合でも，期待利得は等しくなる．即ち，2つの均衡解 $(s_A^*, s_B^*), (s_A^{**}, s_B^{**}) \in S_A \times S_B$ に対し，

$$E(s_A^*, s_B^*) = E(s_A^{**}, s_B^{**})$$

が成立する．

Proof: (1) は，問題 (P)，(D) (式 (3.8)，(3.9)) が任意の利得行列 $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ に対して，必ず実行可能解を持つことと，LP の双対定理，及び Theorem 3.13 から均衡解の存在が言える．
 (2) は，Theorem 3.16 (ミニマックス定理) とその証明より明らか． ■

Problem 3.18.

- (1) 硬貨合せゲーム matching pennies プレイヤー A, B が各々100円硬貨を投げて表・裏の
た組合せによって勝ち負けを決めるゲームを考える．両方とも表,あるいは両方とも裏が
でたら A の勝ちとし, B は A に 100 円を支払う．逆に 2 枚の硬貨の出た面が違う場合は B
の勝ちとし, A は B に 100 円を支払う．すると 2 人の利得は表 3.9, 3.10 の様になる．この
ゲームの最適混合戦略を求め, そのときのマキシミン値を計算せよ．

表 3.9: A の利得表

A \ B	表	裏
表	100 円	-100 円
裏	-100 円	100 円

表 3.10: B の利得表

A \ B	表	裏
表	-100 円	100 円
裏	100 円	-100 円

- (2) 市場シェアゲーム[‡]A 社と B 社はある市場で競争している．両社は新製品を開発販売するか,
現状維持かの経営判断をしなければならない．其々の判断をした場合の 2 社の市場占有率
は表 3.11, 3.12 のようになる．各プレイヤーの最適戦略はどうなるか？

表 3.11: A 社の利得表

A \ B	新製品開発	現状維持
新製品開発	50%	70%
現状維持	30%	50%

表 3.12: B 社の利得表

A \ B	新製品開発	現状維持
新製品開発	50%	30%
現状維持	70%	50%

[‡]この問題は零和ではなく一定和であるが, 始めに述べたように本質的に零和ゲームと同じである．

4 2人非協力非零和ゲーム

4.1 2人非零和ゲーム

2人零和ゲームは、2人のプレイヤーの対応する利得を足すと、いずれも0になるゲームであった。2人のプレイヤーの利得の和が0にならない場合についてもゲームを考えることができ、非零和ゲームと呼ばれる。非零和ゲームは零和ゲームの自然な拡張となっている。

Example 4.1. 恋人達のジレンマ battle of sexes[§]

ある男女のカップルが、ある夜デートをしたいと思っている。内容は、野球観戦と映画鑑賞のいずれかである。2人の効用(満足度)は、

- 男性は野球観戦に行きたいし、女性は映画鑑賞をしたいと思っている。
- 其々が好きなものを別々に見るより一緒にいることのほうが大切。

という気持ちに基づき、以下の表4.1のようになる。ただし、表の各セルの左側が男性の効用(満足度)、右側が女性の効用(満足度)を表している。例えば、2人とも「野球観戦」を選んだ場合、男性の効用が2、女性の効用が1となる。また、待ち合わせ場所はとても離れているので、相手がいないと分かってからもう一方へ行くことは不可能とする。

表 4.1: 恋人達のジレンマ

男性 \ 女性	野球観戦	映画鑑賞
野球観戦	(2,1)	(-1,-1)
映画鑑賞	(-1,-1)	(1,2)

男性と女性が事前に相談できず、相手と独立にデートの行き先を選択しなければならない時、其々はどのような選択をするだろうか？

ここで表4.1のように、各要素が2つの数の組で表される行列を双行列 *bimatrix* と呼び、利得が双行列で書けるゲームを特に双行列ゲーム *bimatrix game* という。

【解説】まず男性のマキシミン値は、野球を選んだ時の *min* 値が -1 、映画を選んだ時の *min* 値が -1 で、いずれを選んでも -1 である。女性も同様にマキシミン値はいずれを選んでも -1 となり、純粋戦略で考えるとミニマックス戦略には解がない(一意でない)(非零和ゲームでは、双行列形式で2人の利得表が与えられるため、片側のプレイヤーの利得表だけで考えた零和ゲームの時と異なり、双方ともマキシミンを求める。)

[§] 『男女の争い』、『恋人の語らい』、『逢引のジレンマ』など、日本語では多数の訳がつけられている。原題を直訳すると誤解を与える恐れがあるため、みな色々考えた。

そこで、零和ゲームの時と同様混合戦略を考える．男女の混合戦略を

$$\text{男性： } \mathbf{s}_A = (s_A^1, s_A^2) \in S_A, \quad \text{ただし } s_A^1 + s_A^2 = 1, \mathbf{s}_A \geq \mathbf{0},$$

$$\text{女性： } \mathbf{s}_B = (s_B^1, s_B^2) \in S_B, \quad \text{ただし } s_B^1 + s_B^2 = 1, \mathbf{s}_B \geq \mathbf{0}$$

とする．其々の期待利得は，

$$\begin{aligned} E_A(\mathbf{s}_A, \mathbf{s}_B) &= \begin{pmatrix} s_A^1 & s_A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_B^1 \\ s_B^2 \end{pmatrix} \\ &= 2s_A^1s_B^1 - s_A^1s_B^2 - s_A^2s_B^1 + s_A^2s_B^2 \\ &= 5s_A^1s_B^1 - 2s_A^1 - 2s_B^1 + 1, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} E_B(\mathbf{s}_A, \mathbf{s}_B) &= \begin{pmatrix} s_A^1 & s_A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_B^1 \\ s_B^2 \end{pmatrix} \\ &= s_A^1s_B^1 - s_A^1s_B^2 - s_A^2s_B^1 + 2s_A^2s_B^2 \\ &= 5s_A^1s_B^1 - 3s_A^1 - 3s_B^1 + 2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

となる．このとき，

$$\begin{aligned} E_A(\mathbf{s}_A, (1, 0)) &= 3s_A^1 - 1, & E_B((1, 0), \mathbf{s}_B) &= 2s_B^1 - 1, \\ E_A(\mathbf{s}_A, (0, 1)) &= -2s_A^1 + 1, & E_B((0, 1), \mathbf{s}_B) &= -3s_B^1 + 2 \end{aligned}$$

であるから，グラフに書くと以下の図 4.1, 4.2 の様になる．

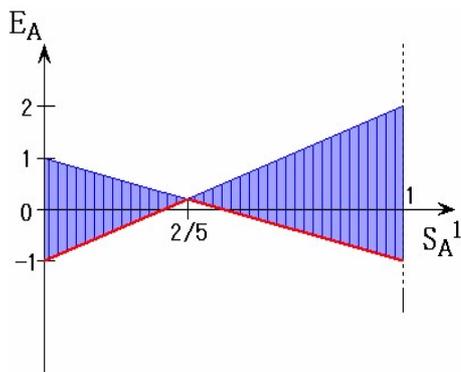


図 4.1: 男性の混合戦略

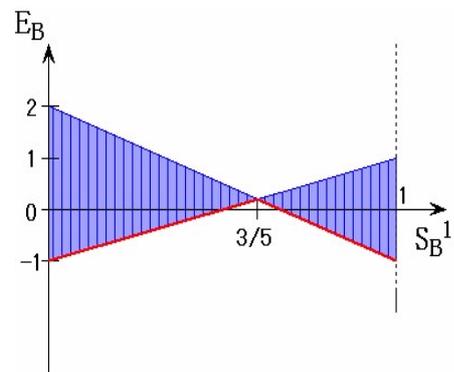


図 4.2: 女性の混合戦略

故に，ミニマックス戦略 (マキシミン戦略) によると，

$$\text{男性の混合戦略 } \mathbf{s}_A = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right), \quad \text{女性の混合戦略 } \mathbf{s}_B = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5} \right)$$

であり，このときのゲームの値は $\frac{1}{5}$ となる．

4.2 2人非零和ゲームと実現可能集合

Example 4.1 について，実現可能な（利得として取りうる）期待利得について考えてみよう．男性，女性各々の期待利得の式 (4.1), (4.2) について E_A, E_B が満たすべき条件を見つける．例えば，各式において， $s_A^1 + s_B^1 = \alpha$, $s_A^1 s_B^1 = \beta$ とおくと

$$\begin{cases} E_A = 5\alpha - 2\beta + 1, \\ E_B = 5\alpha - 3\beta + 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = E_A - E_B + 1, \\ \beta = (3E_A - 2E_B + 1)/5, \end{cases} \quad (4.3)$$

解と係数の関係より s_A^1, s_B^1 は p に関する次の2次方程式の解となる．

$$f(p) := p^2 - \alpha p + \beta = 0 \quad \text{ただし } 0 \leq p \leq 1$$

故に，解 s_A^1, s_B^1 が $[0, 1]$ に存在するためには，上記2次方程式が実数解を持つことと， $f(p)$ が下に凸より $f(0) \geq 0$, $f(1) \geq 0$ が成り立つことであるので，

$$\begin{aligned} f(p) = 0 \text{ の判別式} &: \alpha^2 - 4\beta \geq 0, \\ f(0) &= \beta \geq 0, \\ f(1) &= 1 - \alpha + \beta \geq 0 \end{aligned}$$

これらに式 (4.3) を代入して，

$$\begin{aligned} 5E_A^2 + 5E_B^2 - 10E_A E_B - 2E_A - 2E_B + 1 &\geq 0, \\ 3E_A - 2E_B + 1 &\geq 0, \\ 2E_A - 3E_B - 1 &\leq 0. \end{aligned}$$

これが実現可能な期待利得の範囲となる (図 4.3) .

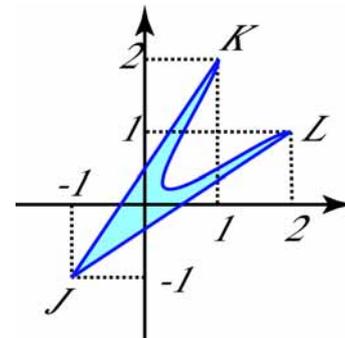


図 4.3: 恋人達のジレンマにおける実現可能期待利得

さて，混合戦略まで広げたミニマックス戦略により得られた解を，この図の中で見てみよう．混合戦略による解とゲームの値は

$$s_A = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right), \quad s_B = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5} \right), \quad (E_A, E_B) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right)$$

であった．果たしてこの点は各プレイヤーにとって実現可能な最も望ましい解なのだろうか？図 4.3 から明らかのように，

$$(E_A, E_B) = (1, 2), \quad (E_A, E_B) = (2, 1)$$

などは純粋戦略で得られる期待効用であるが，明らかにこれの方が男性も女性もよりよい利得を得られる．

この考察より，零和ゲームの時とは異なり，ミニマックス（マキシミン）戦略で得られる解は，必ずしもプレイヤーに最も望ましい結果を与えるわけではないことが分かる．次節において，非零和ゲームの均衡解の概念，Nash 均衡解の定義を与えるが，その前に 2 人のプレイヤーの戦略が各 2 ずつの時の実現可能集合について言及しておこう．

4.2.1 2 人ゲームで戦略が 2 つの場合の実現可能集合について

プレイヤー A, B の戦略が

$$(\mathbf{s}_A, \mathbf{s}_B) \in S_A \times S_B \subseteq \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$$

であり，利得行列がそれぞれ

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

で与えられているとき，各々の期待利得は，

$$\begin{aligned} E_A(\mathbf{s}_A, \mathbf{s}_B) &= \mathbf{s}_A^\top R \mathbf{s}_B = (r_{11}s_B^1 + r_{12}(1-s_B^1))s_A^1 + (r_{21}s_B^1 + r_{22}(1-s_B^1))(1-s_A^1), \\ E_B(\mathbf{s}_A, \mathbf{s}_B) &= \mathbf{s}_A^\top C \mathbf{s}_B = (c_{11}s_B^1 + c_{12}(1-s_B^1))s_A^1 + (c_{21}s_B^1 + c_{22}(1-s_B^1))(1-s_A^1) \end{aligned}$$

となる．即ち，

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} E_A(\mathbf{s}_A, \mathbf{s}_B) \\ E_B(\mathbf{s}_A, \mathbf{s}_B) \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} r_{11} \\ c_{11} \end{pmatrix} s_B^1 + \begin{pmatrix} r_{12} \\ c_{12} \end{pmatrix} (1-s_B^1) \right) s_A^1 + \left(\begin{pmatrix} r_{21} \\ c_{21} \end{pmatrix} s_B^1 + \begin{pmatrix} r_{22} \\ c_{22} \end{pmatrix} (1-s_B^1) \right) (1-s_A^1) \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{r}_{1B} \\ \tilde{c}_{1B} \end{pmatrix} s_A^1 + \begin{pmatrix} \tilde{r}_{2B} \\ \tilde{c}_{2B} \end{pmatrix} (1-s_A^1) \end{aligned}$$

である．この式より，実現可能集合は 2 点 $(r_{11}, c_{11})^\top, (r_{12}, c_{12})^\top$ の凸結合で表される線分と 2 点 $(r_{21}, c_{21})^\top, (r_{22}, c_{22})^\top$ の凸結合で表される線分との凸結合で表現されることがわかる．

図 4.3 では，2 点 $(r_{11}, c_{11})^\top = (2, 1), (r_{12}, c_{12})^\top = (-1, -1)$ の凸結合

$$\begin{pmatrix} \tilde{r}_{1B} \\ \tilde{c}_{1B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} s_B^1 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} (1-s_B^1)$$

と 2 点 $(r_{21}, c_{21})^\top = (-1, -1), (r_{22}, c_{22})^\top = (2, 1)$ の凸結合

$$\begin{pmatrix} \tilde{r}_{2B} \\ \tilde{c}_{2B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} s_B^1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (1-s_B^1)$$

との凸結合で表される領域が斜線部分となることがわかるだろう．

4.3 2人非零和ゲームと Nash 均衡解, Pareto 最適解

プレイヤー A, B の利得行列を各々,

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

とし, 関数 $E_A, E_B : S_A \times S_B \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$E_A(s_A, s_B) := s_A^T R s_B = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} s_A^i s_B^j, \quad (4.4)$$

$$E_B(s_A, s_B) := s_A^T C s_B = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} s_A^i s_B^j \quad (4.5)$$

とする[¶]. E_A, E_B は各々プレイヤー A, B の期待利得を表している.

Definition 4.2. ナッシュ均衡解 Nash equilibrium point 2人非零和ゲームにおいて, 2つのベクトル $s_A^* \in S_A, s_B^* \in S_B$ (混合戦略) が存在して,

$$E_A(s_A^*, s_B^*) \geq E_A(s_A, s_B^*), \quad \forall s_A \in S_A, \quad (4.6)$$

$$E_B(s_A^*, s_B^*) \geq E_B(s_A^*, s_B), \quad \forall s_B \in S_B. \quad (4.7)$$

を満たすとき, $(s_A^*, s_B^*) \in S_A \times S_B$ を 2人非零和ゲームの Nash 均衡解という. またこのとき, $E_A(s_A^*, s_B^*), E_B(s_A^*, s_B^*)$ を Nash 均衡値という.

Definition 4.2 とは別の Nash 均衡解の定義として, 一对の戦略 $(s_A^*, s_B^*) \in S_A \times S_B$ が,

$$E_A(s_A^*, s_B^*) = \max_{s_A \in S_A} E_A(s_A, s_B^*), \quad (4.8)$$

$$E_B(s_A^*, s_B^*) = \max_{s_B \in S_B} E_A(s_A^*, s_B) \quad (4.9)$$

を満たすという言い方があるが, S_A, S_B は有界閉集合, E_A, E_B は連続関数なので, (4.6) と (4.8), (4.7) と (4.9) は各々同じことを言っている.

Proposition 4.3. 零和ゲームにおける Nash 均衡解の意味: 均衡解と Nash 均衡解の等価性
零和ゲームでの均衡解は Nash 均衡解である.

[¶]2人零和ゲームでは, $C = -R, E_B(s_A, s_B) = -E_A(s_A, s_B)$ である.

Proof: 零和ゲームでの均衡解 $(s_A^*, s_B^*) \in S_A \times S_B$ の定義は Definition 3.8 より,

$$\begin{aligned} E_A(s_A^*, s_B^*) &\geq E_A(s_A, s_B^*), \quad \forall s_A \in S_A, \\ E_A(s_A^*, s_B^*) &\leq E_A(s_A^*, s_B), \quad \forall s_B \in S_B. \end{aligned}$$

であり, 1つ目の不等式は式 (4.6) に等しい. また, $E_B(s_A, s_B) = -E_A(s_A, s_B)$ が成り立っているから, 2つ目の不等式は,

$$-E_B(s_A^*, s_B^*) \leq -E_B(s_A^*, s_B), \quad \forall s_B \in S_B$$

となり, これは式 (4.7) に等しい. ■

【Example 4.1における Nash 均衡解について】恋人達のジレンマゲームについて Nash 均衡解があるかどうか見てみよう. プレイヤーの2つの純粋戦略の組 $(s_A, s_B) = ((1, 0), (1, 0)) \in S_A \times S_B$ と $(s_A, s_B) = ((0, 1), (0, 1)) \in S_A \times S_B$ は Nash 均衡解である.

まずは, プレイヤー A から見て点 $((1, 0), (1, 0))$ が Nash 均衡解であることを確かめてみよう. B の戦略が $\bar{s}_B = (1, 0)$ に固定されている時,

$$E_A(s_A, \bar{s}_B) = 2s_A^1 - s_A^2 = s_A^1 + 1 \quad \text{ただし } 0 \leq s_A^1 \leq 1$$

であるから, 明らかに $s_A^1 = 1$ ($s_A^2 = 0$) の時, A の期待利得 E_A が最大となる. 即ち,

$$(1, 0) = \operatorname{argmax}_{s_A \in S_A} E_A(s_A, \bar{s}_B)$$

である. 同様にプレイヤー B から見て, A の戦略が $s_A = (1, 0)$ に固定されている時,

$$E_B(s_A, s_B) = s_B^1 - s_B^2 = 2s_B^1 - 1 \quad \text{ただし } 0 \leq s_B^1 \leq 1$$

であるから, 明らかに $s_B^1 = 1$ ($s_B^2 = 0$) の時, B の期待利得 E_B が最大となる. 即ち,

$$(1, 0) = \operatorname{argmax}_{s_B \in S_B} E_B(s_A, s_B)$$

である. 故に, 定義より, $((1, 0), (1, 0))$ は Nash 均衡解である. $((0, 1), (0, 1))$ についても同様 (この点が Nash 均衡解であることを確かめよ).

実は, 恋人達のジレンマゲームにはもう一つ混合戦略による Nash 均衡解がある. 次節で2人非零和ゲームの Nash 均衡解の求め方を考えよう.

ここでは, Nash 均衡解とは別の Pareto 最適性の定義を与える.

Definition 4.4. パレート最適 Pareto Optimal (2人非零和ゲームにおいて)2つのベクトル $s_A^* \in S_A, s_B^* \in S_B$ (混合戦略) が,

$$\begin{cases} E_A(s_A, s_B) \geq E_A(s_A^*, s_B^*), \\ E_B(s_A, s_B) > E_B(s_A^*, s_B^*), \end{cases} \quad \text{あるいは} \quad \begin{cases} E_A(s_A, s_B) > E_A(s_A^*, s_B^*), \\ E_B(s_A, s_B) \geq E_B(s_A^*, s_B^*), \end{cases} \quad (4.10)$$

を満たす戦略の組 $(s_A, s_B) \in S_A \times S_B$ が存在しない時, (s_A^*, s_B^*) は Pareto 最適であるという.

k 人のプレイヤーがいた場合，戦略の組 $(s_1^*, \dots, s_k^*) \in S_1 \times \dots \times S_k$ が Pareto 最適であるとは，

$$E_l(s_1, \dots, s_k) \geq E_l(s_1^*, \dots, s_k^*) \quad \text{for } \forall l \in \{1, \dots, k\}$$

であり，少なくとも一つの不等式について狭義不等号 ($>$) が成り立つような戦略の組 (s_1, \dots, s_k) が存在しないことである．これを 2 人の場合で考えると，式 (4.10) のようになる．

戦略の組がパレート最適であるとは，すべてのプレイヤーがもうそれ以上に望ましい実行可能な戦略の組が存在しないということ，あるいは，各プレイヤーは他のプレイヤーの犠牲無くして自分の利得を大きくできない状態であることをいう．

【Example 4.1 における Pareto 最適性について】恋人達のジレンマゲームでは，Nash 均衡解である 2 つの点は Pareto 最適でもある．しかしながら，いずれの均衡点を選択するかに関して利害が対立する．

また，ミニマックス原理に従った混合戦略によるミニマックス解 (マキシミン解) は，Pareto 最適解ではない (確かめよ) ．

4.4 2 人非零和ゲームの Nash 均衡解の求め方 ([5, 11] など)

2 行 2 列 (つまり各プレイヤーの戦略が 2 つ) の 2 人非零和ゲームにおいて，利得双行列は

$$RC = \begin{pmatrix} (r_{11}, c_{11}), & (r_{12}, c_{12}) \\ (r_{21}, c_{21}), & (r_{22}, c_{22}) \end{pmatrix}$$

となり，2 人のプレイヤーの混合戦略は

$$\begin{cases} s_A = (s_A^1, s_A^2), & s_A^1 + s_A^2 = 1, & s_A^1, s_A^2 \geq 0, \\ s_B = (s_B^1, s_B^2), & s_B^1 + s_B^2 = 1, & s_B^1, s_B^2 \geq 0 \end{cases}$$

となる．プレイヤー A, B の期待利得はそれぞれ，

$$\begin{aligned} E_A(s_A, s_B) &= s_A^T R s_B = (s_A^1, 1 - s_A^1) R \begin{pmatrix} s_B^1 \\ 1 - s_B^1 \end{pmatrix} \\ &= \{(r_{11} - r_{21}) + (r_{22} - r_{12})\} s_A^1 s_B^1 - (r_{22} - r_{12}) s_A^1 + (r_{21} - r_{22}) s_B^1 + r_{22} \\ &= (\bar{r} + \hat{r}) s_A^1 s_B^1 - \hat{r} s_A^1 + \tilde{r} s_B^1 + r_{22}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} E_B(s_A, s_B) &= s_A^T C s_B = (s_A^1, 1 - s_A^1) C \begin{pmatrix} s_B^1 \\ 1 - s_B^1 \end{pmatrix} \\ &= \{(c_{11} - c_{21}) + (c_{22} - c_{12})\} s_A^1 s_B^1 - (c_{22} - c_{12}) s_A^1 + (c_{21} - c_{22}) s_B^1 + c_{22} \\ &= (\bar{c} + \hat{c}) s_A^1 s_B^1 - \hat{c} s_A^1 + \tilde{c} s_B^1 + c_{22} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\text{ただし, } \begin{cases} \bar{r} = r_{11} - r_{21}, & \hat{r} = r_{22} - r_{12}, & \tilde{r} = r_{21} - r_{22}, \\ \bar{c} = c_{11} - c_{21}, & \hat{c} = c_{22} - c_{12}, & \tilde{c} = c_{21} - c_{22} \end{cases}$$

となる。

ここで、Nash 均衡解を求める前に、最適応答の概念を導入しておこう。

Definition 4.5. 最適応答 best response, 最適応答対応 best response correspondence, 最適応答対応

プレイヤー A の戦略 $s_A \in S_A$ が、プレイヤー B の戦略 $s_B \in S_B$ に対する最適応答であるとは、

$$E_A(s_A, s_B) = \max_{s_A \in S_A} E_A(s_A, s_B)$$

である時をいう。プレイヤー B の戦略 s_B に対する最適応答の全体 (集合) を $S_A(s_B)$ とおく。

$$S_A(s_B) = \left\{ \bar{s}_A \in S_A \mid E_A(\bar{s}_A, s_B) = \max_{s_A \in S_A} E_A(s_A, s_B) \right\}.$$

このとき、 $S_A(s_B)$ を $S_B \rightarrow S_A$ の写像と見て、最適応答対応とよぶ。また、任意の $s_B \in S_B$ に対する最適応答対応 \bar{s}_A を対で考えた集合 (即ち、 $S_A(s_B)$ の任意の $s_B \in S_B$ に対するグラフ) を最適応答対応 $D_A (\subseteq S_A \times S_B)$ とよぶことにする。

$$D_A = \{(s_A, s_B) \mid s_B \in S_B, s_A \in S_A(s_B)\}$$

B についても同様に定義する。

$$s_A \text{ に対して } \bar{s}_B \text{ が最適応答 (戦略)} \Leftrightarrow E_B(s_A, \bar{s}_B) = \max_{s_B \in S_B} E_B(s_A, s_B),$$

$$s_A \text{ に対する最適応答対応: } S_B(s_A) = \left\{ \bar{s}_B \in S_B \mid E_B(s_A, \bar{s}_B) = \max_{s_B \in S_B} E_B(s_A, s_B) \right\},$$

$$\text{最適応答対応: } D_B = \{(s_A, \bar{s}_B) \mid s_A \in S_A, \bar{s}_B \in S_B(s_A)\}$$

この定義により、Nash 均衡解は、プレイヤー A, B の互いに最適応答対応となる実現可能な戦略の組合せであるといえる。従って、Nash 均衡解は、プレイヤー A, B それぞれの最適応答対応を求めて、それを各混合戦略を軸とする (例えば、 s_A^1, s_B^1) 2次元平面上に描いたとき、その交点に相当するので、それを求めればよいことが分かる。

Proposition 4.6. 2人非零和ゲームにおいて、戦略の組 $(\hat{s}_A, \hat{s}_B) \in S_A \times S_B$ が互いに最適応答対応であるならば、 (\hat{s}_A, \hat{s}_B) は Nash 均衡解であり、逆も成り立つ。即ち、

$$(\text{Nash 均衡解}) = D_A \cap D_B.$$

Proof: 証明略。 ■

Theorem 4.7. (2人のプレイヤーの戦略がそれぞれ2つである)2人非協力非零和ゲームにおいて, $(s_A^*, s_B^*) \in S_A \times S_B$ が Nash 均衡解であるための必要十分条件は,

$$\begin{cases} E_A(s_A^*, s_B^*) \geq E_A((1, 0), s_B^*), \\ E_A(s_A^*, s_B^*) \geq E_A((0, 1), s_B^*), \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\begin{cases} E_B(s_A^*, s_B^*) \geq E_B(s_A^*, (1, 0)), \\ E_B(s_A^*, s_B^*) \geq E_B(s_A^*, (0, 1)), \end{cases} \quad (4.14)$$

が成り立つことである.

Proof: 証明略. [10, 11] など参照 (戦略がそれぞれ複数ある場合の証明がある) ■

では, Definition 4.5, Proposition 4.6, Theorem 4.7 を使って, 2人非協力非零和ゲームの Nash 均衡解を求めよう.

プレイヤー A について, 式 (4.11) を式 (4.13) の2つに代入して,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (\bar{r} + \hat{r})s_A^1 s_B^1 - \hat{r}s_A^1 + \tilde{r}s_B^1 + r_{22} \geq (\bar{r} + \hat{r})s_B^1 - \hat{r} + \tilde{r}s_B^1 + r_{22}, \\ (\bar{r} + \hat{r})s_A^1 s_B^1 - \hat{r}s_A^1 + \tilde{r}s_B^1 + r_{22} \geq \tilde{r}s_B^1 + r_{22}, \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \{(\bar{r} + \hat{r})s_B^1 - \hat{r}\}(1 - s_A^1) \leq 0, \\ \{(\bar{r} + \hat{r})s_B^1 - \hat{r}\}s_A^1 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

故に, $(s_A, s_B) \in D_A$ となるためには,

$$(\bar{r} + \hat{r})s_B^1 - \hat{r} < 0 \text{ となる } s_B^1 \Rightarrow 1 - s_A^1 \geq 0 \text{ かつ } s_A^1 \leq 0, \text{ 即ち } s_A^1 = 0, \quad (4.15)$$

$$(\bar{r} + \hat{r})s_B^1 - \hat{r} = 0 \text{ となる } s_B^1 \Rightarrow 1 - s_A^1, s_A^1 : \text{任意}, \text{ 即ち } 0 \leq s_A^1 \leq 1, \quad (4.16)$$

$$(\bar{r} + \hat{r})s_B^1 - \hat{r} > 0 \text{ となる } s_B^1 \Rightarrow 1 - s_A^1 \leq 0 \text{ かつ } s_A^1 \geq 0, \text{ 即ち } s_A^1 = 1 \quad (4.17)$$

であり, これが s_B に対するプレイヤー A の最適応答対応となる.

プレイヤー B についても, 式 (4.12) を式 (4.14) の2つに代入して, 同様に,

$$\begin{cases} \{(\bar{c} + \hat{c})s_A^1 + \tilde{c}\}(1 - s_B^1) \leq 0, \\ \{(\bar{c} + \hat{c})s_A^1 + \tilde{c}\}s_B^1 \geq 0 \end{cases}$$

となるので, $(s_A, s_B) \in D_A$ となるためには,

$$(\bar{c} + \hat{c})s_A^1 + \tilde{c} < 0 \text{ となる } s_A^1 \Rightarrow 1 - s_B^1 \geq 0 \text{ かつ } s_B^1 \leq 0, \text{ 即ち } s_B^1 = 0, \quad (4.18)$$

$$(\bar{c} + \hat{c})s_A^1 + \tilde{c} = 0 \text{ となる } s_A^1 \Rightarrow 1 - s_B^1, s_B^1 : \text{任意}, \text{ 即ち } 0 \leq s_B^1 \leq 1, \quad (4.19)$$

$$(\bar{c} + \hat{c})s_A^1 + \tilde{c} > 0 \text{ となる } s_A^1 \Rightarrow 1 - s_B^1 \leq 0 \text{ かつ } s_B^1 \geq 0, \text{ 即ち } s_B^1 = 1 \quad (4.20)$$

であり, これが s_B に対するプレイヤー A の最適応答対応となる.

【Example 4.1 の Nash 均衡解導出】 一般的な恋人達のジレンマゲームでは、各プレイヤーの利得に

$$\begin{cases} r_{11} > r_{21}, & r_{12} < r_{22}, \\ c_{11} > c_{21}, & c_{12} < c_{22} \end{cases} \quad (4.21)$$

という関係がある、即ち、

$$\begin{cases} \bar{r} = r_{11} - r_{21} > 0, & \hat{r} = r_{22} - r_{12} > 0 \\ \bar{c} = c_{11} - c_{21} > 0, & \hat{c} = c_{22} - c_{12} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{r} + \hat{r} > 0, \\ \bar{c} + \hat{c} > 0 \end{cases}$$

であるので、式 (4.15) ~ (4.17) より、プレイヤー A の最適応答対応は、

$$\begin{cases} 0 = (s_A^1)^* & \text{if } s_B^1 < \hat{r}/(\bar{r} + \hat{r}), \\ 0 \leq (s_A^1)^* \leq 1 & \text{if } s_B^1 = \hat{r}/(\bar{r} + \hat{r}), \\ (s_A^1)^* = 1 & \text{if } s_B^1 > \hat{r}/(\bar{r} + \hat{r}) \end{cases}$$

となり、式 (4.18) ~ (4.20) より、プレイヤー B の最適応答対応は、

$$\begin{cases} 0 = (s_B^1)^* & \text{if } s_A^1 < -\bar{c}/(\bar{c} + \hat{c}), \\ 0 \leq (s_B^1)^* \leq 1 & \text{if } s_A^1 = -\bar{c}/(\bar{c} + \hat{c}), \\ (s_B^1)^* = 1 & \text{if } s_A^1 > -\bar{c}/(\bar{c} + \hat{c}) \end{cases}$$

となる。Example 4.1 の例で、具体的な数値を当てはめると、

$$\bar{r} = 3, \hat{r} = 2, \bar{c} = 2, \hat{c} = 3, \bar{c} = -3$$

であるから、

$$\begin{cases} s_A^1 = 0 & (\text{if } 0 \leq s_B^1 < \frac{2}{5}), \\ 0 \leq s_A^1 \leq 1 & (\text{if } s_B^1 = \frac{2}{5}), \\ s_A^1 = 1 & (\text{if } 1 \geq s_B^1 > \frac{2}{5}), \end{cases} \quad \begin{cases} s_B^1 = 0 & (\text{if } 0 \leq s_A^1 < \frac{3}{5}), \\ 0 \leq s_B^1 \leq 1 & (\text{if } s_A^1 = \frac{3}{5}), \\ s_B^1 = 1 & (\text{if } 1 \geq s_A^1 > \frac{3}{5}). \end{cases}$$

2人のプレイヤーの最適応答対応を図示すると、図 4.4 のようになる。この図より、Nash 均衡解は

$$(s_A, s_B) : ((1, 0), (1, 0)), \\ ((0, 1), (0, 1)), \\ \left(\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5} \right), \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right) \right)$$

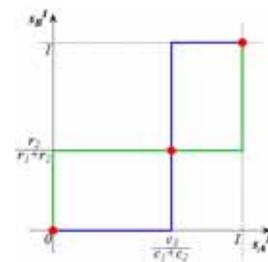


図 4.4: 最適応答対応

の3点となる。

ここまでで気付くように、Example 4.1 の具体例に限らず、式 (4.21) という関係が成り立っている (2行2列)2人非零和ゲームならば全て、上記3つの Nash 均衡解を持つ。

恋人達のジレンマゲームで見たように、2人非零和ゲームには理論体系に内包されるパラドックスが存在する。次にこのパラドックスの別の例として有名な囚人のジレンマについて考えてみよう。

Example 4.8. 囚人のジレンマ prisoner's dilemma

重大犯罪を犯した2人組み (A と B) が逮捕された。検事は2人の犯罪に付いて十分な証拠をつかんでいないが、そのままでも軽犯罪として起訴できる。さて、検事は、2人の容疑者を隔離し、次の事柄を其々に伝える。

- 選択肢は、罪を自白するか黙秘するかである。
- 2人共自白しなければ、重犯罪は立証されず、軽犯罪で2人共に3年の懲役刑を受ける。
- 一方が自白し、一方が黙秘すれば、共犯証言制度により、自白者は1年、黙秘者は10年の刑を受ける。
- ただし、2人共自白すると、重犯罪が確定し2人共に8年の懲役刑を受ける。

2人の犯罪者は隔離されているため相談することはできない。犯罪者 A, B はどういった戦略をとるべきか？

表 4.2: 囚人のジレンマ (損失行列)

A \ B	黙秘	自白
黙秘	(3年, 3年)	(10年, 1年)
自白	(1年, 10年)	(8年, 8年)

囚人のジレンマの Nash 均衡解を求める前に、支配戦略と支配均衡の概念を導入しておこう。

Definition 4.9. 戦略の支配 プレイヤー A の2つの (純粋) 戦略 $p, t \in S_A$ に対して、戦略 s が t を支配する **dominate** とは、プレイヤー B の任意の戦略 $s_B \in S_B$ に対して、

$$E_A(p, s_B) > E_B(t, s_B)$$

が成立することである (プレイヤー B についても同じ)。この時、 p を支配戦略、 t を被支配戦略とよぶ。また、戦略 p が戦略 t を弱く支配するとは、

$$\begin{aligned} \forall s_B \in S_B, \quad E_A(p, s_B) &\geq E_B(t, s_B), \\ \exists s_B \in S_B, \quad E_A(p, s_B) &> E_B(t, s_B) \end{aligned}$$

が成り立つことであり、 p を弱支配戦略、 t を被弱支配戦略とよぶ。

Definition 4.10. 支配戦略均衡 被支配戦略を除去することによって得られる均衡解のことを支配戦略均衡解とよぶ。これは Nash 均衡解の特別な場合となっている。また、支配戦略均衡解が存在する時、ゲームは支配可解 (**dominance solvable**) という。

【解説】囚人のジレンマゲームにおいては，Definition 4.9 から直ちに，双方のプレイヤーにおいて戦略「自白」は戦略「黙秘」を支配していることが分かる．よって（黙秘，黙秘）が均衡解とはなりえず，（自白，自白）が均衡解になりそうである．実際，（自白，自白）は支配戦略均衡解であり，後で見るようにこのゲームの唯一つの Nash 均衡解である．

しかしながら，表から明らかなように，（黙秘，黙秘）のほうが双方とも（自白，自白）より利得が良い．ならば双方ともこの戦略をとればよさそうなものだがそうはいかない．相手が「黙秘」を選ぶのであれば，自分は「黙秘」から「自白」に変えた方がより損失を小さくできる！という悪魔のささやきが必ず聞こえてくるであろう．さらに，逆に自分が戦略「黙秘」を変えなかった場合，相手が「黙秘」から「自白」に戦略を変えてしまうと，お人よし（間抜け？）な自分には最悪の結末が訪れる（10年の懲役!）．双方とも「黙秘」から「自白」に変える誘引があり「自白」を取らざるを得ないのである．しかしそうやって双方「自白」戦略をとると（黙秘，黙秘）より損失が大きくなってしまう．ここにジレンマがある．

ここで分かることは，各プレイヤーが合理的に戦略決定をしたにもかかわらず，結果が望ましい状態になるとは限らないということである．つまり，戦略選択における『個人合理性』は利得配分における『全体合理性』をもたらさない！

一般に，2つの戦略を C(協調的戦略) と D(防衛的，非協調的戦略) とし，利得表が以下の双行列の形で与えられているとき，

A \ B	C	D
C	(S_1, S_2)	(W_1, B_2)
D	(B_1, W_2)	(T_1, T_2)

利得表の各値が

$$B_i(\text{best}) > S_i(\text{second}) > T_i(\text{third}) > W_i(\text{worst}), (i = 1, 2) \quad (4.22)$$

という関係を満たしているならば，囚人のジレンマ型ゲームとよび，さらに，

$$S_i > \frac{B_i + W_i}{2}, (i = 1, 2) \quad (4.23)$$

という式も満たしているならば，標準的な囚人のジレンマゲームとよばれる．この式(4.23)は，2人のプレイヤーが互いに相手と異なるように交互に戦略 C, D をとる，即ち，

$$(A \text{ の戦略}, B \text{ の戦略}) : (C, D) \Rightarrow (D, C) \Rightarrow (C, D) \Rightarrow (D, C) \Rightarrow \dots$$

と繰り返した時の期待利得(平均利得)が協調行動の組(C, C)による利得よりも小さいことを意味している．

囚人のジレンマの実現可能集合は、

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} E_A(s_A, s_B) \\ E_B(s_A, s_B) \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} r_{11} \\ c_{11} \end{pmatrix} s_B^1 + \begin{pmatrix} r_{12} \\ c_{12} \end{pmatrix} (1 - s_B^1) \right) s_A^1 + \left(\begin{pmatrix} r_{21} \\ c_{21} \end{pmatrix} s_B^1 + \begin{pmatrix} r_{22} \\ c_{22} \end{pmatrix} (1 - s_B^1) \right) (1 - s_A^1) \\ &= \left(\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} s_B^1 + \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix} (1 - s_B^1) \right) s_A^1 + \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -10 \end{pmatrix} s_B^1 + \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix} (1 - s_B^1) \right) (1 - s_A^1) \end{aligned}$$

より、図 4.5 の様になる。

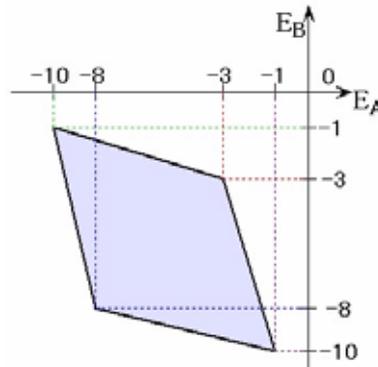


図 4.5: 囚人のジレンマにおける実現可能集合

この図からわかることは、Nash 均衡解 (自白, 自白) が斜線領域の左下に存在するので、均衡点を上回る期待利得を得られる点の組合せは無数にあり^{||}、均衡解を享受することは、いずれのプレイヤーにとっても不満となる。たとえば、プレイヤーが事前に打ち合わせして、かつお互いに相手を絶対的に信頼できるのであれば、(黙秘, 黙秘) を選択して期待利得 (-3, -3) を得られるかもしれないが、少しでも信頼できないのであれば、両者の最適戦略は (自白, 自白) となり、(-8, -8) で均衡するのである。

最後に、非零和ゲームの Nash 均衡解を求める方法により、(自白, 自白) が唯一の Nash 均衡解であることを確認しておこう。

Example 4.8 の利得値より、

$$\bar{r} = -2, \hat{r} = 2, \tilde{r} = 7 \quad \bar{c} = 7, \hat{c} = -7, \tilde{c} = -2$$

であるから、式 (4.15) ~ (4.17), (4.18) ~ (4.20) より、各プレイヤーの最適応答対応は、

$$\begin{aligned} \text{任意の } s_B^1 \text{ に対して } & \begin{cases} -2(1 - s_A^1) \leq 0, \\ -2s_A^1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_A^1 \leq 1, \\ s_A^1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow s_A^1 = 0, \\ \text{任意の } s_A^1 \text{ に対して } & \begin{cases} -2(1 - s_B^1) \leq 0, \\ -2s_B^1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_B^1 \leq 1, \\ s_B^1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow s_B^1 = 0 \end{aligned}$$

^{||}(-8, -8) より左上の領域内の点すべて

となる。即ち、相手がどんな戦略がとってこようが自分は $s_X^1 = 0, (X = A, B)$ をとるのが最適応答対応戦略となる。

2人のプレイヤーの最適応答対応を図示すると、図 4.6 のようになる。緑線が A の、青線が B の最適応答対応である。この図より、Nash 均衡解は一つで、

$$(s_A, s_B) = ((0, 1), (0, 1))$$

となる。

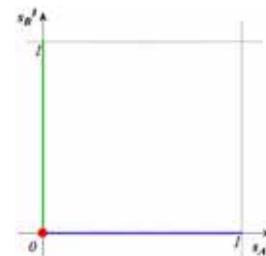


図 4.6: 最適応答対応

一般に、囚人のジレンマ型ゲームの利得値は、式 (4.22) を満たしているので、

$$\begin{cases} \bar{r} = S_1 - B_1 < 0, & \hat{r} = T_1 - W_1 > 0, & \tilde{r} = B_1 - T_1 > 0, \\ \bar{c} = S_2 - W_2 > 0, & \hat{c} = T_2 - B_2 < 0, & \tilde{c} = W_2 - T_2 < 0 \end{cases}$$

となっており、

$$\begin{cases} \bar{r} + \hat{r} = (S_1 + T_1) - (B_1 + W_1), \\ \bar{c} + \hat{c} = (S_2 + T_2) - (B_2 + W_2), \end{cases}$$

である。

Problem 4.11. 以下の2人非協力非零和ゲームにおいて、再適応等戦略を考察することにより Nash 均衡解を求めよ。

- チキンゲーム（弱虫ゲーム）（[11] p.48 など）チキンを決める（？）ゲームである。2人のプレイヤーはそれぞれ車に乗り、ある程度の距離を置いて向かい合う。同時に相手に向かって走り出し、先によけた方がチキン（弱虫）とされる死のゲームだ。よけてしまえばチキン扱いされさげすまれるが、2人ともよけなければあの世で最悪の事態が起こったことを嘆くことになるだろう。どうするか？

A \ B	よける	よけない
よける	(5, 5)	(1, 6)
よけない	(7, 2)	(0, 0)

- 面会ゲーム（[11] p.53）大地震により通信網が途絶した。2人は早急にあう用が出来た。相手がいる場所を見当をつけて探しに行くか、相手が探しに来るのを待つか、どうするべきか？

A \ B	待つ	探す
待つ	(0, 0)	(10, 6)
探す	(6, 10)	(-6, -6)

- 任意の組が Nash 均衡解!?（[11] p.58）以下のゲームで2人のプレイヤーはどうすべきか？

A \ B	戦略 p	戦略 q
戦略 x	(8, 8)	(4, 8)
戦略 y	(8, 4)	(4, 4)

- 道路の歩き方（[12] p.84）

A \ B	右側通行	左側通行
右側通行	(1, 1)	(0, 0)
左側通行	(0, 0)	(1, 1)

- レモンの市場（[12] p.136）

A \ B	戦略 p	戦略 q
戦略 x	(,)	(,)
戦略 y	(,)	(,)

- Bothers（[12] p.143）

A \ B	戦略 p	戦略 q
戦略 x	(,)	(,)
戦略 y	(,)	(,)

Problem 4.12.

- 以下のゲームの最適混合戦略とそのとき得られる期待利得を導出せよ。

A \ B	戦略 p	戦略 q	戦略 r
戦略 x	8	2	3
戦略 y	3	-2	4
戦略 z	4	1	2

A \ B	戦略 p	戦略 q	戦略 r
戦略 x	1	4	2
戦略 y	-2	3	3
戦略 z	3	5	4

- (2) 査察ゲーム [5] ある国では、3本までは無税で酒を輸入できる。海外旅行者が3本まで酒を購入し、1本辺り得られる利益は3,000円である。旅行者は3本より多くの酒を国内に持ち込むこともできるが、税関で見つかった場合50,000円の罰金を支払わねばならない。逆に税関は全ての旅行かばんを検査することは難しいが、検査すれば必ず不法行為を見つけることができるとする。税関の目的はまず不法行為を阻止すること、次に検査費用を少なくすることとなる。以上をまとめると以下の双行列表のようになる。このゲームの最適混合戦略を求めよ。

税関 \ 旅行者	不法行為をする	合法行為をする
検査する	(1, -35)	(0, 9)
検査しない	(-10, 15)	(10, 9)

- (3) 寄付金ゲーム (ただ乗り free-riding の例 1) [5] ある町の町長が n 人の住民に対して公共事業のための寄付金を募った。「10000円までの金額をいくらでもかまいませんので町に寄付してください。ある程度の寄付金が集まって無事に公共事業が実施され、終了した後、寄付金総額の2倍を住民の皆様へ還元いたします。ただし、還元金は寄付をされた皆様で均等に分配いたします。」さて、この町ではどれだけの寄付が集まるだろうか？
- (4) ただ乗りの例 2 パソコンのソフト (音楽 CD 等でも同じ) をコピーしようか？自分ひとりぐらい違法コピーして使ったところで、製作企業の収益に差し障りはあるまい。ばれないだろうし何よりお金がかからなくて済む。ところがほとんどの人は同じように考えるので、良心の呵責がなければコピーをして使おうとするだろう。すると製作企業はお金が入ってこないでソフトの値段 (音楽 CD の値段) はますます上がっていく...
- (5) パーティでのゲーム [7] あるパーティでの席上のこと、主催者がこんなことを言った。「これから皆様一枚ずつ紙片をお配り致します。紙には、100円、10000円という2つの金額が書かれております。いずれかに丸をつけてお出し下さい。丸をつけた方の額をゲーム賞金として皆様それぞれに差し上げます。ただし、すべての方が10000円に丸をつけた場合は賞金は差し上げられません。参加者同士で事前に話し合ってはなりません。」さあ、あなたはどちらに丸をつけるだろうか？
- (6) 単位取得ゲームこの授業の単位を「欲しい」か「欲しくない」かのいずれかを紙に書いて名前も書いて提出してください。「欲しい」と書いた人には単位をあげ、「欲しくない」と書いた人には単位をあげません。ただし、全員が「欲しい」と書いていたら全員に単位をあげません。また、授業を履修している友人同士での談合 (話し合い) は禁止します。その事実

があった場合，その人たちはゲームを放棄（履修放棄）したとみなします．さあ，あなたは
どうしますか？

- (7) 電力消費ゲーム [5] ある都市の住民が，夏期の一日のうちで最も暑い時間帯である午後 2 時から 3 時までの間，クーラーの温度を低温 (α) と中温 (β) のどちらに設定するかを選択に直面している．住民一人あたりの電力消費量は低温に設定する時は $1000W$ ，中温に設定する時は $500W$ とする．各住民はクーラーの温度を低温に設定する時効用 U ，中温に設定する時効用 u を得るとする．ここで， $0 < u \ll U$ である．都市の人口を n 人とする．

都市の電力設備は住民全員が低温にできるほど供給が十分ではなく，住民の電力総消費量 Q に依存して確率 $p(Q)$ で停電になる危険がある．このように臨海を越えて停電が起こった場合しばらく（少なくとも 1 時間）停電が続くとする．停電確率は停電が起こる電力総消費量の臨界点を c とした時，次式で与えられる．

$$p(Q) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq Q \leq c, \\ 1 & \text{if } c < Q \end{cases}$$

ただし， $500n < c < 1000n$ である（全住民がクーラーの温度を低温に設定すれば必ず停電する！）

4.5 寡占・複占市場とゲーム理論：Cournot 均衡，シュタッケルベルグ均衡

4.6 2 人非零和ゲームと線形相補性問題，Nash 均衡解 ([6] など)

Nash 均衡解の定義 (Definition 4.2) より，零和ゲームの時と同様，以下の Lemma が成り立つ．
(Lemma 3.9 参照)

Lemma 4.13. (s_A^*, s_B^*) をゲームの Nash 均衡解としたとき，以下が成り立つ．

- (1) プレイヤー B の混合戦略が s_B^* であるとき，プレイヤー A の期待利得を最大化する混合戦略は s_A^* である．
- (2) プレイヤー A の混合戦略が s_A^* であるとき，プレイヤー B の期待損失を最小化する混合戦略は s_B^* である． ■

また，以下が成り立つ．

Lemma 4.14. プレイヤー A, B の利得行列を $R = [r_{ij}], C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ とし， (s_A^*, s_B^*) を Nash 均衡解とする．

- (1) 任意の実数 k に対して， $r'_{ij} := r_{ij} + k, \forall i, j$ とすると， (s_A^*, s_B^*) は，A, B の利得行列が R', C の時の Nash 均衡解でもある．

(2) 任意の実数 l に対して, $c'_{ij} := c_{ij} + l, \forall i, j$ とすると, (s_A^*, s_B^*) は, A, B の利得行列が R, C' の時の Nash 均衡解でもある.

Proof:

(1) 均衡解の定義より,

$$\begin{aligned} & \sum_i \sum_j r'_{ij} s_A^i (s_B^j)^* \geq \sum_i \sum_j r'_{ij} (s_A^i)^* (s_B^j)^*, \\ \Leftrightarrow & \sum_i \sum_j r'_{ij} s_A^i (s_B^j)^* + k \sum_i \sum_j s_A^i (s_B^j)^* \geq \sum_i \sum_j r'_{ij} (s_A^i)^* (s_B^j)^* + k \sum_i \sum_j (s_A^i)^* (s_B^j)^*, \\ \Leftrightarrow & \sum_i \sum_j r'_{ij} s_A^i (s_B^j)^* + k \sum_i s_A^i \sum_j (s_B^j)^* \geq \sum_i \sum_j r'_{ij} (s_A^i)^* (s_B^j)^* + k \sum_i (s_A^i)^* \sum_j (s_B^j)^*, \\ \Leftrightarrow & \sum_i \sum_j r'_{ij} s_A^i (s_B^j)^* + k \geq \sum_i \sum_j r'_{ij} (s_A^i)^* (s_B^j)^* + k, \\ \Leftrightarrow & \sum_i \sum_j r'_{ij} s_A^i (s_B^j)^* \geq \sum_i \sum_j r'_{ij} (s_A^i)^* (s_B^j)^*. \end{aligned}$$

(2) (1) と同様.

■

以上より, k, l を十分大きく取れば, $r'_{ij}, c'_{ij} > 0 (\forall i, j)$ とできるから, プレイヤー A, B の利得はすべて正であると仮定しても一般性を失わない. このとき, 以下が成り立つ (Lemma 3.10 も参照)

Lemma 4.15. $r_{ij} > 0, c_{ij} > 0$ と仮定する. $(s_A^*, s_B^*) \in S_A \times S_B$ が Nash 均衡解であるための必要十分条件は,

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} (s_B^j)^* \geq E_A(s_A^*, s_B^*), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.24)$$

$$\sum_{i=1}^m c_{ij} (s_A^i)^* \geq E_B(s_A^*, s_B^*), \quad j = 1, \dots, n \quad (4.25)$$

が成立することである.

Proof: Lemma 3.10 と同様. ■

ここで, Nash 均衡解 $(s_A^*, s_B^*) \in S_A \times S_B$ に対して,

$$\bar{s}_A^i := (s_A^i)^* / E_B(s_A^*, s_B^*), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.26)$$

$$\bar{s}_B^j := (s_B^j)^* / E_A(s_A^*, s_B^*), \quad j = 1, \dots, n \quad (4.27)$$

とすると, 式 (4.24), (4.25) と, 定義から $E_A(\mathbf{s}_A^*, \mathbf{s}_B^*) > 0, E_B(\mathbf{s}_A^*, \mathbf{s}_B^*) > 0$ であることより,

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} \tilde{s}_B^j \geq 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.28)$$

$$\sum_{i=1}^m c_{ij} \tilde{s}_A^i \geq 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.29)$$

となる. 故に,

$$u_i := \sum_{j=1}^n r_{ij} \tilde{s}_B^j - 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.30)$$

$$w_j := \sum_{i=1}^m c_{ij} \tilde{s}_A^i - 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.31)$$

とおくと, 次の Lemma 4.16 が成立する.

Lemma 4.16. Nash 均衡解を $(\mathbf{s}_A^*, \mathbf{s}_B^*) \in S_A \times S_B$ とし, $(\tilde{s}_A, \tilde{s}_B)$ を式 (4.26), (4.27) で定義し, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ を式 (4.30), (4.31) で定義すると, 以下の関係が成り立つ.

$$\sum_{i=1}^m u_i \tilde{s}_A^i = 0, \quad (4.32)$$

$$\sum_{j=1}^n w_j \tilde{s}_B^j = 0. \quad (4.33)$$

Proof: 式 (4.32) について,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m u_i \tilde{s}_A^i &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n r_{ij} \tilde{s}_B^j - 1 \right) \tilde{s}_A^i \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(r_{ij} \frac{(s_B^j)^*}{E_A(\mathbf{s}_A^*, \mathbf{s}_B^*)} - 1 \right) \frac{(s_A^i)^*}{E_B(\mathbf{s}_A^*, \mathbf{s}_B^*)} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} \frac{(s_A^i)^* (s_B^j)^*}{E_A(\mathbf{s}_A^*, \mathbf{s}_B^*) E_B(\mathbf{s}_A^*, \mathbf{s}_B^*)} - \sum_{i=1}^m \frac{(s_A^i)^*}{E_B(\mathbf{s}_A^*, \mathbf{s}_B^*)} \\ &= \frac{1}{E_A(\mathbf{s}_A^*, \mathbf{s}_B^*) E_B(\mathbf{s}_A^*, \mathbf{s}_B^*)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} (s_A^i)^* (s_B^j)^* - \frac{1}{E_B(\mathbf{s}_A^*, \mathbf{s}_B^*)} \sum_{i=1}^m (s_A^i)^* \\ &= \frac{1}{E_B(\mathbf{s}_A^*, \mathbf{s}_B^*)} - \frac{1}{E_B(\mathbf{s}_A^*, \mathbf{s}_B^*)} = 0. \end{aligned}$$

より成立. 式 (4.33) についても同様. ■

従って、この Lemma 4.16 から、非零和 2 人ゲームに Nash 均衡解 (s_A^*, s_B^*) が存在するならば、

$$\begin{cases} u_i := \sum_{j=1}^n r_{ij} s_B^j - 1, & i = 1, \dots, m, \\ w_j := \sum_{i=1}^m c_{ij} s_A^i - 1, & j = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (4.34)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m u_i s_A^i = 0, \\ \sum_{j=1}^n w_j s_B^j = 0, \end{cases} \quad (4.35)$$

$$\begin{cases} s_A^i, u_i \geq 0, & i = 1, \dots, m, \\ s_B^j, w_j \geq 0, & j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4.36)$$

を満たす $s_A, s_B, \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m), \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ が存在する。

逆に、(4.34) ~ (4.36) を満たす $(\bar{s}_A, \bar{s}_B), \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}$ が存在するとき、

$$(s_A^i)^* := \bar{s}_A^i / \sum_{i=1}^m \bar{s}_A^i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.37)$$

$$(s_B^j)^* := \bar{s}_B^j / \sum_{j=1}^n \bar{s}_B^j, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.38)$$

とすれば**、 (s_A^*, s_B^*) がこのゲームの Nash 均衡解となる。確かめてみよう。まず (4.37), (4.38), 及び (4.36) よりただちに、

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m (s_A^i)^* = 1, & s_A^* \geq 0, \\ \sum_{j=1}^n (s_B^j)^* = 1, & s_B^* \geq 0. \end{cases}$$

であるとわかる。次に、式 (4.34) の第 1 式から、任意の i について

$$\bar{u}_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} \bar{s}_B^j - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\bar{u}_i}{\sum_{j=1}^n \bar{s}_B^j} = \sum_{j=1}^n r_{ij} \frac{\bar{s}_B^j}{\sum_{j=1}^n \bar{s}_B^j} - \frac{1}{\sum_{j=1}^n \bar{s}_B^j} = \sum_{j=1}^n r_{ij} (s_B^j)^* - \frac{1}{\sum_{j=1}^n \bar{s}_B^j}$$

が成り立つので、各 i について両辺に $(s_A^i)^*$ を掛けて辺々足すと、

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^m \bar{s}_A^i \bar{u}_i}{\sum_{j=1}^n \bar{s}_B^j \sum_{i=1}^m \bar{s}_A^i} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} (s_A^i)^* (s_B^j)^* - \frac{\sum_{i=1}^m (s_A^i)^*}{\sum_{j=1}^n \bar{s}_B^j} \\ \Leftrightarrow 0 &= E_A(s_A^*, s_B^*) - \frac{1}{\sum_{j=1}^n \bar{s}_B^j} \\ \Leftrightarrow E_A(s_A^*, s_B^*) &= \frac{1}{\sum_{j=1}^n \bar{s}_B^j} \end{aligned}$$

** $\sum_i \bar{s}_A^i \neq 0, \sum_j \bar{s}_B^j \neq 0$ であることに注意。もし、 $\sum_i \bar{s}_A^i = 0$ だとすると、 $\bar{s}_A \geq 0$ より、 $\forall i, \bar{s}_A^i = 0$ なので、 $\forall i, u_i = -1 < 0$ となって矛盾するからである。 $\sum_j \bar{s}_B^j$ についても同様。

このとき任意の i について,

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} (s_B^j)^* = \sum_{j=1}^n r_{ij} \frac{\bar{s}_B^j}{\sum_{j=1}^n \bar{s}_B^j} = \frac{\bar{u}_i + 1}{\sum_{j=1}^n \bar{s}_B^j} = (\bar{u}_i + 1) E_A(s_A^*, s_B^*) \geq E_A(s_A^*, s_B^*).$$

式 (4.34) の第 2 式からも同様に,

$$E_B(s_A^*, s_B^*) = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \bar{s}_A^i}$$

が成り立つので, 任意の j について

$$\sum_{i=1}^m c_{ij} (s_A^i)^* \geq E_B(s_A^*, s_B^*)$$

となる. 従って, Lemma 4.15 より, (s_A^*, s_B^*) が Nash 均衡解となる.

故に,

$$z := \begin{bmatrix} s_A \\ s_B \end{bmatrix}, \quad v := \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}, \quad q := -e, \quad M := \begin{bmatrix} O & R \\ C^T & O \end{bmatrix}$$

とすると, 式 (4.34) ~ (4.36) を満たす $(s_A, s_B), u, w$ を求める問題は

$$v = Mz + q, \quad v \geq 0, \quad z \geq 0, \quad v^T z = 0$$

を満たす $(z, v) \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)}$ を求める問題, 即ち (特殊な) 線形相補性問題であることがわかる.

Remark 4.17.

(1) 線形相補正問題 (Linear Complementarity Problem; LCP) は, 線形計画問題 (Linear Programming Problem; LP) を含む問題で, 具体的には, 正方行列 M が

$$M = \begin{bmatrix} O & A \\ -A^T & O \end{bmatrix}, \quad (A \in \mathbb{R}^{m \times n})$$

の形で書ける歪対称行列 (skew-symmetric matrix) のとき, LCP は LP となる. 従って, このことから

$$C = -R$$

のとき, 即ち零和ゲームのとき, 均衡解は前節で言及した主・双対線形計画問題 (3.8), (3.9) の最適解となることが確かめられる.

(2) 一般の正方行列 M に対する線形相補正問題は NP 完全 (NP-complete) であることがわかっており [2], 解くのは困難であるが, たとえば, 単調性^{††}と相対的内点解の存在^{‡‡}を仮定すると, 内点法で (弱) 多項式時間で解けることがわかっている ([2], [8] など多数).

^{††}LCP が単調であるとは, 任意の 2 つの解 $(x, y), (\bar{x}, \bar{y})$ に対して, $(x - \bar{x})^T (y - \bar{y}) \geq 0$ が成り立つことを言い, 具体的には正方行列 M が非負定置のとき単調となる.

^{‡‡}LCP に相対的内点解が存在するとは, $(\hat{x}, \hat{y}) > (0, 0)$, $\hat{y} = M \hat{x} + q$ となる点 (\hat{x}, \hat{y}) が存在するときをいう.

5 2人非零和協力ゲーム

5.1 協力と結合戦略

再び Example 4.1 恋人達のジレンマゲームを考え、2人のプレイヤーが協力する場合、均衡解がどうなるか見てみよう。

表 5.1: 恋人達のジレンマ

男性 \ 女性	野球観戦	映画鑑賞
野球観戦	(2,1)	(-1,-1)
映画鑑賞	(-1,-1)	(1,2)

プレイヤー A, B それぞれの混合戦略を s_A, s_B とすると、期待利得は

$$\begin{cases} E_A(s_A, s_B) = 2s_A^1s_B^1 - s_A^1s_B^2 - s_A^2s_B^1 + s_A^2s_B^2, \\ E_B(s_A, s_B) = s_A^1s_B^1 - s_A^1s_B^2 - s_A^2s_B^1 + 2s_A^2s_B^2 \end{cases}$$

となる。2人のプレイヤーは純粋戦略で考えれば4つの戦略の組を協力して選ぶので、たとえば4つすべてを等確率で選ぶ、即ち、

$$s_A^i s_B^j = \frac{1}{4} \quad (i, j = 1, 2)$$

とすれば、2人の期待利得は

$$\begin{cases} E_A(s_A, s_B) = 2(1/4) - (1/4) - (1/4) + (1/4) = 1/4, \\ E_B(s_A, s_B) = (1/4) - (1/4) - (1/4) + 2(1/4) = 1/4 \end{cases}$$

となる。これは図 5.1 の点 H になる。

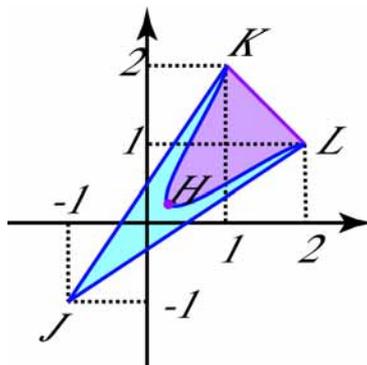


図 5.1: 恋人達のジレンマにおける実現可能期待利得（協力の場合）

また、協力できるのだから、2人のプレイヤーどちらにとっても益のない $s_A^1 s_B^2, s_A^2 s_B^1$ を選ぶことはあり得ないので、野球観戦をするか映画鑑賞をするかをコイン投げで決めるとすれば、2人の期待利得は

$$\begin{cases} E_A(s_A, s_B) = 2(1/2) - (0) - (0) + (1/2) = 3/2, \\ E_B(s_A, s_B) = (1/2) - (0) - (0) + 2(1/2) = 3/2 \end{cases}$$

となる。これは図 5.1 の線分 KL の中点になる。

2人のプレイヤーが協力してゲームをする場合、

$$p_{ij} := s_A^i s_B^j, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

として、 $P = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ を結合混合戦略 (joint strategy) とよぶ。ただし、

$$\begin{cases} p_{ij} \geq 0, & i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 \end{cases} \quad (5.1)$$

である。またこのとき、ある i, j の組に対してだけ $p_{ij} = 1$ となり、それ以外について $p_{ij} = 0$ となる戦略を特に結合純粋戦略 (joint pur strategy) とよぶ。

これより2人のプレイヤーの期待利得を $E_A(Z), E_B(Z)$ とすると

$$\begin{pmatrix} E_A(Z) \\ E_B(Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} p_{11} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} p_{12} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} p_{21} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} p_{22}$$

となる。式 (5.1) より、これは図 5.1 の3点 J, K, L の凸結合なので、2人のプレイヤーによる期待利得の到達可能領域は図 5.1 の三角形 JKL の境界線上と内部領域となる。従って、結合混合戦略を考えると、線分 KL 上の点が (パレート) 均衡点となる。

5.2 Nash 交渉

非協力ゲームに対して協力ゲームはプレイヤーの到達可能領域が増えることがわかったが、最適戦略はどうなるだろうか？先の例では線分 KL 上の点がパレート最適になるが、このうちのいずれの点が選ばれるかは2人のプレイヤーの (協力) 交渉しだいである。よって、このような点の集合のことを交渉集合 (bargaining set) とよぶ。

Nash は協力による到達可能集合と各プレイヤーの (協力ゲームの ??? ミニマックス原理に従う ???) マキシミン値 (u^+, v^+) が与えられたとき、以下の基準に基づいた交渉を考えた [3]。

$$g(u, v) = U^a V^b, \quad := (u - u^+)^a (v - v^+)^b.$$

ただし、

$$\begin{cases} u := E_A, & u^+ := E_A(s_A^+, s_B^+), \\ v := E_B, & v^+ := E_B(s_A^+, s_B^+) \end{cases}$$

であり, a, b は各プレイヤーの交渉力 (bargaining power) を表す. また,

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad a + b > 0$$

であり, a, b は同時に 0 にはならないとする. ここで, U, V はプレイヤー A, B の交渉によって増える交渉利得と考えられ, 例えばプレイヤー A の交渉利得が 1% 増えると, 2 人の総利得が $a\%$ 増えることになる.

交渉力は $a > b$ のとき, プレイヤー A の方が交渉力が強く, 逆の場合はプレイヤー B の方が交渉力が強く, $a = b$ の時には交渉力の交渉力は等しいとみなすのである.

前節の恋人達のジレンマ (協力のケース) で考えてみよう. $a = b$ の場合, $g(u, v)$ は点 (u^+, v^+) を通る双曲線になり, 到達可能集合内でこの双曲線が最大になるように交渉されると, 線分 KL と接するところ (線分 KL の中点で接する) で最大となる. この点は, 双方の交渉力が等しいときの総利得最大点となり, Nash 交渉解 (Nash bargaining solution) とよばれる.

$$\text{Nash 交渉解} : (\bar{u}, \bar{v}) = (3/2, 3/2)$$

またこのとき,

$$U = u - u^+ = v - v^+ = V$$

となり, A と B の交渉利得は等しい.

$a > b$ の場合, 即ち, プレイヤー A の交渉力のほうが強い場合, $g(u, v)$ は線分 KL の中点から点 L の間で接することになる (a が b よりどれだけ大きいかで決まる) とき, 最大となるので, これが Nash 交渉解である. またこのとき,

$$U = u - u^+ > v - v^+ = V$$

となり, A の交渉利得のほうが B より大きくなる.

$a < b$ の場合, 即ち, プレイヤー B の交渉力のほうが強い場合, $g(u, v)$ は線分 KL の中点から点 K の間で接することになる (b が a よりどれだけ大きいかで決まる) とき, 最大となるので, これが Nash 交渉解である. またこのとき,

$$U = u - u^+ < v - v^+ = V$$

となり, B の交渉利得のほうが A より大きくなる.

5.3 ラグランジュ乗数法による Nash 交渉解の求め方

A 零和2人ゲームの例

A.1 ホームズ最後の事件：零和ゲームと混合戦略 ([10, 12] など)

プレイヤー

- シャーロック・ホームズ
- モリアーティ教授

状況

- ホームズはモリアーティ教授に追われていて、つかまると命を掛けた決闘を避けられない（その状況は避けたい）
- ホームズは（ヨーロッパ）大陸に逃れようとしていて、ビクトリア駅（ロンドン?）からドーバー行き汽車に乗る．
- 汽車が駅を離れようとした瞬間、モリアーティがプラットホームに現れ、おたがいに相手を確認した．
- モリアーティは特別列車をたててホームズの後を追い、ホームズもそれ（モリアーティが特別列車で自分を追ってくる）を確信している．

問題（ゲーム）

- ビクトリア駅からドーバー駅の途中に1回だけ停車する駅（カンタベリー駅）があり、ホームズは、そこで途中下車することもドーバーまで行くことも出きる．
- モリアーティは、ホームズがカンタベリー駅で途中下車することも、ドーバーまで直行することも出きることを知っている．
- 2人はお互いに最大のライバル（頭が良く合理的）だと認めており、自分が考え付くことは相手も考え付くと言っていることを確信している．

このようなゲームの状況の場合、ホームズもモリアーティ教授も、自分が望む結末（モリアーティ教授はホームズをつかまえない、ホームズはモリアーティ教授から逃れたい）を得るための決定的な手段（戦略）が無い（2つの戦略のうちのどちらを取った方がいいか、確信できない）．お互いに相手の戦略の裏の裏の裏の裏の...まで読めてしまい、どうすべきかわからなくなる（自分にとって最良の戦略を確定できない）．

2人が同じ戦略を取った場合（2人共途中下車、2人共直行）、ホームズはモリアーティ教授につかまるので、ホームズにとって最悪の結末（ホームズの利得0としよう）をむかえる．ホームズがカンタベリー駅で途中下車し、モリアーティ教授がドーバーに直行した場合、ホームズは大陸には行けませんが、モリアーティ教授から逃れることが出きるのでまあよし（ホームズの利得100としよう）の結果であり、逆にホームズがドーバーに直行し、モリアーティ教授が途中下車した場合、ホームズは魔の手から逃れて大陸に行けるので最良の結果（ホームズの利得を150としよう）が得られる．これをまとめたのが、ホームズの利得表である．

ホー \ モリ	途中下車	直行
途中下車	0	100
直行	150	0

表 A.1: ホームズの利得行列 (モリアーティの損失行列)

モリアーティ教授の利得表は、ホームズの利得を損失とした表となる (零和ゲーム)。

この利得表を眺めた時に、ホームズの目的は (ホームズの) 利得最大であり、モリアーティ教授の目的は損失最小 (ホームズの利得最小) であるので、この利得表に対して、ホームズは利得最大化プレイヤー、モリアーティ教授は利得最小化プレイヤーである。

純粋戦略でとるべき手が、確定的に決まらないので、2つの戦略を確率的にとることを考える (混合戦略)。ホームズは、「途中下車」を確率 p 、「直行」を確率 $(1-p)$ で取り、モリアーティは、「途中下車」を確率 q 、「直行」を確率 $(1-q)$ でとるとする ($0 \leq p, q \leq 1$) このとき、ホームズの期待利得 (モリアーティの期待損失) は $F(p, q)$ とおくと、

$$F(p, q) = 0pq + 100p(1-q) + 150(1-p)q + 0(1-p)(1-q) = -250pq + 100p + 150q$$

と表せる。

$$\begin{cases} F(p, 1) = -150p + 150, \\ F(p, 0) = 100p, \end{cases} \quad \begin{cases} F(1, q) = -100q + 100, \\ F(0, q) = 150q, \end{cases}$$

より、

$$\begin{cases} F(p, q) = F(p, 1)q + F(p, 0)(1-q), \\ F(p, q) = F(1, q)p + F(0, q)(1-p) \end{cases}$$

2人の取れる混合戦略はそれぞれ以下の図のようになる。

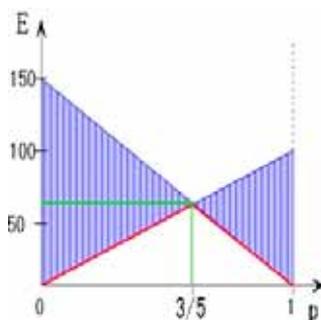


図 A.1: ホームズの戦略

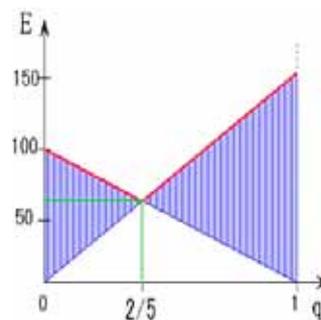


図 A.2: モリアーティの戦略

2人はミニマックス原理に従うと、2人の最適混合戦略は

$$\text{ホームズ} \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5} \right), \quad \text{モリアーティ} \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

となる。

Remark A.1. 混合戦略は、繰り返し行なわれるゲームにのみ有効なのではなく、1 回限りのゲームにおいても、プレイヤーが合理的で非協力的の時、戦略を決断せざるを得ない状況においては取らざるを得ない決定方法である。

参考文献

- [1] R.Axelrod(松田裕之訳). 『つきあい方の科学：バクテリアから国際関係まで』. ミネルヴァ書房, May 1998.
- [2] M. Kojima, N. Megiddo, T. Noma, and A. Yoshise. A Unified Approach to Interior Point Algorithms for Linear Complementarity Problems, Vol. 538 of Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, 1991.
- [3] J.F. Nash. "The Bargaining Problem". ..., Vol. ???, No. ???, pp. ??-??, 195???????
- [4] W.Poundstone(松浦俊輔訳). 『囚人のジレンマ -フォン・ノイマンとゲームの理論』. 青土社, March 1995.
- [5] 岡田章. 『ゲーム理論』. 有斐閣, December 1996.
- [6] 今野浩. 『線形計画法』. 日科技連, March 1987.
- [7] 山本芳嗣. 『経営工学概論 operations research』. Course handout, Institute of Policy and Planning Sciences, University of Tsukuba, 1-1-1 Tennodai, Tsukuba, Ibaraki, 305-8573 Japan., April 26 2000.
- [8] 小島政和, 土谷隆, 水野眞治, 矢部博. 『内点法』. 朝倉書店, September 2001.
- [9] 梅原嘉介, F.S.T. Hsiao. 『パソコンでゲームの理論』. 日本評論社, May 1997.
- [10] 鈴木光男. 『ゲーム理論入門』. 共立出版株式会社, December 1981.
- [11] 鈴木光男. 『新ゲーム理論』. 勁草書房, April 1994.
- [12] 鈴木光男. 『ゲーム理論の世界』. 勁草書房, December 1999.