意思決定科学
線形計画問題の行列表記について

堀田 敬介

2005/10/10(月) 改訂〔2001/9/18(火) 改訂, 2001/9/14(金)〕

目 次

1　和と積

1.1　和と和を表す記号

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ = \ x_1 + \cdots + x_n$$

Problem 1.1. *1,2* は $\sum$ を使った式を書き下し，*3*〜*6* は $\sum$ を使って表記せよ.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_i \ = ?$
2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} a_{1i} y_i \ = ?$
3. $a_1 + a_2 + a_3 \ = ?$
4. $3z_1 + 3z_2 + 3z_3 + 3z_4 \ = ?$
5. $kx_1 + kx_2 + \cdots + kx_m \ = ?$
6. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \ = ?$
7. $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} \ = ?$
8. $a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{31}y_1 + a_{32}y_2 \ = ?$

1.2　積と積を表す記号

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \ = \ x_1 \times \cdots \times x_n$$

Problem 1.2. *1,2* は $\prod$ を使った式を書き下し，*3*〜*6* は $\prod$ を使って表記せよ.

1. $\displaystyle\prod_{i=1}^{3} x_i \ = ?$
2. $\displaystyle\prod_{j=1}^{6} b_{1i} \ = ?$
3. $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \ = ?$
4. $4z_1 \times 4z_2 \times 4z_3 \times 4z_4 \ = ?$
5. $p \times x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_m \ = ?$

Problem 1.3. 各式を $\sum, \prod$ を使って表記せよ.

1. $c_1x_{11} + c_2x_{12} + c_3x_{13} + c_1x_{21} + c_2x_{22} + c_3x_{23} \ = ?$
2. $(z_{11}d_1 + z_{12}d_2) \times (z_{21}d_1 + z_{22}d_2) \times (z_{31}d_1 + z_{32}d_3) \times (z_{41}d_1 + z_{42}d_2) \ = ?$

1.3 線形計画問題

Example 1.4. 最適生産量問題

ある工場では *3* つの製品 A，B, C を作っている．A，B, C を *1* 単位作るのに必要なものは材料 P が其々 *6kg*, *2* kg，*3* kg，材料 Q が *3kg*, *2* kg，*5* kg，材料 R が *4l*, *3l*, *2l*, 材料 S が *5g*, *1g*, *9g* 必要である．また，この工場で *1* ヶ月に使用できる材料 P, Q, R, S の量は限られていて，最大数は其々，*2500* kg，*3000* kg，*1800l*, *5000g* である．

製品 A，B，C を *1* 単位売った際に得られる利益が各々 *7* 万円，*4* 万円，*5* 万円の時，利益が最大になるようにするには，製品 A，B を各々何単位ずつ作ればよいだろうか？

線形計画法による定式化と解法　製品 A，B，C を作る単位を x, y, z とすると，この工場が得られる利益は $70000x + 40000y + 50000z$ であり，これを最大化したい．各製品を作るのに必要な用量が決まっていて，かつ各材料の工場で所持している上限が決められているので，材料事に量に関する制約ができる．例えば，材料 P については，$6x + 2y + 3z \leq 2500$ となる．各製品の作成単位 x, y, z は当然ながら非負（0 以上）である．以上まとめると，

$$
\left|
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & 70000x & + & 40000y & + & 50000z & & \\
\text{s.t.} & 6x & + & 2y & + & 3z & \leq & 2500 \\
 & 3x & + & 2y & + & 5z & \leq & 3000 \\
 & 4x & + & 3y & + & 2z & \leq & 1800 \\
 & 5x & + & y & + & 9z & \leq & 5000 \\
 & x & , & y & , & z & \geq & 0.
\end{array}
\right.
$$

なお，LINDO を使って得た最適解は $(x, y, z) = (161.538, 80.000, 456.923)$，最適値は $37,353,810$ となる．ただし，解の値は小数第 4 位で四捨五入してある．

1.4 LP の標準形を $\sum$ を使って表す

m 個の制約条件が全て等式で書かれており，使用する n 個の変数全てに非負条件 (のみ) がついている形を特に線形計画問題の**標準形 standard form** と呼び，以下の形で書く．全ての線形計画問題は標準英に変換することができる．以下の標準形を $\sum$ を使って簡潔に書き直してみよう．

$$
\left|
\begin{array}{lrcrcccrcl}
\max. & c_1x_1 & + & c_1x_2 & + & \cdots & + & c_nx_n, & & \\
\text{s.t.} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\
 & & & \cdots & & & & & & \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \\
 & x_1 & , & x_2 & , & \ldots & , & x_n & \geq & 0.
\end{array}
\right.
$$

$$
\rightleftharpoons \left|\begin{array}{lrcl}
\max. & \sum_{j=1}^{n} c_i x_i, & & \\
\text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j & = & b_1, \\
 & \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j & = & b_2, \\
 & \cdots & & \\
 & \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j & = & b_m, \\
 & x_1, \ldots, x_n & \geq & 0.
\end{array}\right.
\rightleftharpoons \left|\begin{array}{lrcll}
\max. & \sum_{j=1}^{n} c_i x_i, & & & \\
\text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = & b_i, & (i = 1, \ldots, m) \\
 & x_j & \geq & 0, & (j = 1, \ldots, n).
\end{array}\right.
$$

標準形で，制約条件が全て同じ向きの不等式で書かれる以下の形を**対称形 symmetric form** の線形計画問題と呼ぶ.

$$
\left|\begin{array}{lrcrcccrcl}
\max. & c_1 x_1 & + & c_1 x_2 & + & \cdots & + & c_n x_n, & & \\
\text{s.t.} & a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + & \cdots & + & a_{1n} x_n & \leq & b_1, \\
 & a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + & \cdots & + & a_{2n} x_n & \leq & b_2, \\
 & & & & & \cdots & & & & \\
 & a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + & \cdots & + & a_{mn} x_n & \leq & b_m, \\
 & x_1 & , & x_2 & , & \cdots & , & x_n & \geq & 0.
\end{array}\right.
$$

Problem 1.5. 上記対称形の線形計画問題を $\sum$ を使って表せ.

Problem 1.6.　輸送問題の定式化

10 個の製油タンク $F_1, \ldots, F_7$ を持つ石油会社が，*50* 箇所のガソリンスタンド $W_1, \ldots, W_{50}$ にガソリンを輸送したいと思っている．各タンク $F_i (i = 1, \ldots, 7)$ から各スタンド $W_j (j = 1, \ldots, 50)$ にガソリンを *1* リットル輸送するのに必要な費用が c_{ij} の時，輸送コストが最小になるようにするにはどうすればよいか？　ただし，タンク F_i の貯蔵量を a_i, スタンド W_j での必要量を b_j とする．この問題を $\sum$ を使って定式化せよ.

〔ヒント：変数はタンク i からスタンド j へ運ぶ量として x_{ij}（リットル）を考える〕

Problem 1.7.　クラス編成問題の定式化 *[3]*

B 大学では，*900* 人の新入生が *14* クラスに分かれて必修科目を履修することになっている．各学生は，第 *1* 志望から第 *3* 志望までのクラスを指定し，希望調査に基づき担当教官がクラス編成を行う．クラス i の定員を $a_i (i = 1, \ldots, 14)$ とし，各学生が希望のクラスに入れた時にどれだけ満足するかをコストとして表現した時，全体の満足度が最大になるようにしたい．この問題を $\sum$ を使って定式化せよ．ただし，各学生の満足度を p_{ij} とし以下で定義する.

$$
p_{ij} = \begin{cases}
100 & \text{学生 } j \text{ がクラス } i \text{ を第 1 志望としている時,} \\
40 & \text{学生 } j \text{ がクラス } i \text{ を第 2 志望としている時,} \\
1 & \text{学生 } j \text{ がクラス } i \text{ を第 3 志望としている時,} \\
-10^6 & \text{学生 } j \text{ がクラス } i \text{ を志望していない時.}
\end{cases}
$$

〔ヒント：学生を $i(i=1,\ldots,900)$，クラスを $j(j=1,\ldots,14)$ とし，変数

$$x_{ij} \;=\; \begin{cases} 1 & (\text{学生 } j \text{ がクラス } i \text{ に所属する時}) \\ 0 & (\text{学生 } j \text{ がクラス } i \text{ に所属しない時}) \end{cases}$$

を導入する〕

1.5 双対問題と双対定理

Example 1.8. 以下の線形計画問題を考える．

$$\left|\begin{array}{lrcrcrcl} \max. & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & & \\ s.t. & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \le & 4 \\ & x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & \le & 7 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \ge & 0. \end{array}\right.$$

この問題の双対問題は，双対変数を y_1, y_2 として，

$$\left|\begin{array}{lrcrcl} \min. & 4y_1 & + & 7y_2 & & \\ s.t. & 2y_1 & + & y_2 & \ge & 3 \\ & -3y_1 & + & 7y_2 & \ge & 4 \\ & y_1 & - & 4y_2 & \ge & 5 \\ & y_1 & , & y_2 & \ge & 0 \end{array}\right.$$

と書ける．このとき，元の問題を主問題という．

Example 1.9. *Example 1.8* の主・双対問題の任意の実行可能解 $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2)$ について，常に

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \;\le\; 4y_1 + 7y_2$$

が成り立つ．これを**弱双対定理**という．また，主問題に最適解 (x_1^*, x_2^*, x_3^*) が存在するならば，双対問題にも最適解 (y_1^*, y_2^*) が存在し，

$$3x_1^* + 4x_2^* + 5x_3^* \;=\; 4y_1^* + 7y_2^*$$

が成り立つ．これを**双対定理**という．

Problem 1.10.

(1) 第 *1.4* 節の標準形の線形計画問題を主問題として双対問題を作り，$\sum$ を使って表せ．
(2) 第 *1.4* 節の対称形の線形計画問題を主問題として双対問題を作り，$\sum$ を使って表せ．

Problem 1.11. *Example 1.8* の主・双対問題について，弱双対定理が成り立つことを確認せよ．

2　行列 (とベクトル)

2.1　行列の定義

mn 個の数を m 個の横の並びと n 個の縦の並びとして次のように並べたものを，$\boldsymbol{m \times n}$ **(型) 行列 matrix** という．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

このとき，

- m 個の横の並びを**行 row**,

$$\begin{aligned} \text{第 1 行}: &\quad (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \\ \text{第 i 行}: &\quad (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}), \\ \text{第 m 行}: &\quad (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}), \end{aligned}$$

- n 個の縦の並びを**列 column**,

$$\begin{array}{ccc} \text{第 1 列} & \text{第 j 列} & \text{第 n 列} \\ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \end{array}$$

- 行列を構成する数を**成分 component** あるいは，**要素 element** と呼び，$a_{ij} (i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ を**第 (i,j) 成分**と呼ぶ．
- $A = [a_{ij}]$ という書き方もする．

特に，

- (m,1) 型の行列を **m 次の列ベクトル m-dimensional column vector**,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

- (1,n) 型の行列を **n 次の行ベクトル n-dimensional row vector**,

$$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

- (n,n) 型の行列を **n 次の正方行列 square matrix** と呼ぶ.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- n 次正方行列 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の対角線上（左上から右下）にある成分 $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ を**対角成分 diagonal element** という．それ以外の部分を**非対角成分** という.

(例) 省略.

2.2 行列の演算

2.2.1 行列の和・差と諸性質

- 2 つの行列 $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ は，その型が一致し (行数と列数が等しい)，かつ全ての i, j について，$a_{ij} = b_{ij}$ である時，**等しい**といい，$A = B$ と記す.

  (例)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \to\ A \neq B,$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \to\ C \neq D,$$
$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 9 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}, \quad \to\ X \neq Y.$$

- **行列の和**： 型が等しい (行数と列数が同じ) 行列 $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ に対し，以下の様に和を定義できる.

$$A + B\ = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

- **行列の差**： 型が等しい (行数と列数が同じ) 行列 $A=[a_{ij}], B=[b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ に対し，以下の様に差を定義できる．

$$A-B \;=\; \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

Problem 2.1. 以下の 2 つの行列の $A+B, A-B, C+D, C-D$ を計算せよ．また，$A+C, B-D$ 等は計算できるか?

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ D \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- **スカラー倍**： 実数 k に対して，(m,n) 型行列 $A=[a_{ij}]$ の k 倍は,

$$kA \;=\; \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Problem 2.2. 以下の *2* つの行列 A, B に対して，*(1)-4A, (1)A+B, (2)4A-B, (3) 3A-2B* を計算せよ．

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Example 2.3. 以下の行列の計算をせよ．

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = ?$$

- 成分が全て 0 であるような行列を O で表し，**零行列 zero matrix** と呼ぶ.

  (m,n) 型の零行列を $O_{m,n}$，特に n 次正方零行列を O_n と表す.

- 成分が全て 0 であるようなベクトルを $\mathbf{0}$ で表し，**零ベクトル zero vector** と呼ぶ.

Proposition 2.4. 同一の型を持つ行列 A, B, C とスカラー c, d に対して以下の性質がある．

1. $1A \;=\; A, \quad 0A \;=\; O, \quad A-A \;=\; O,$
2. $(cd)A \;=\; c(dA),$
3. $(A+B)+C \;=\; A+(B+C),$ 　結合則,
4. $A+B \;=\; B+A,$ 　交換則,
5. $(c+d)A \;=\; cA+dA,$ 　分配則,
6. $c(A+B) \;=\; cA+cB,$ 　分配則,

2.2.2　行列の積と諸性質

- (m,l) 型の行列 $A = [a_{ik}]$ と，(l,n) 型の行列 $B = [b_{kj}]$ に対して，積 AB を以下の様に定義できる.

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

ただし，$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}, \quad (i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n).$$

〔注〕左側の行列 (掛けられる側の行列)A の**列数**と，右側の行列 (掛ける側の行列)B の**行数が一致している**時に限り，積を定義できる.

２つの行列の積 ((m,l) 型と (l,n) 型の行列の積) でできた行列は (m,n) 型の行列になる (左側の行列の行と右側の行列の列数が計算後の行，列数になる)

Problem 2.5.　次の行列の積を計算せよ．また，各問題の行列を交換して積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$

(2) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$

(4) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$

(5) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$

(6) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ -5 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$

Remark 2.6.

1. 積 AB が定義されて *(*計算できて*)* も，積 BA が定義される *(*計算できる*)* とは限らない.
2. 積 AB, BA ともに定義されて *(*計算できて*)* も，AB=BA となるとは限らない．一般に,

$$AB \neq BA$$

である.

Problem 2.7. 以下の *2* つの行列 A, B, C, D に対して，AB, BA, CD, DC を計算せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- $A \neq O, B \neq O$ であっても，$AB = O$ となることがある．この時，A や，B を**零因子 zero-divisor** と呼ぶ.

Problem 2.8.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = ??$$

Proposition 2.9. 積が定義できる行列 A, B, C, O とスカラー c に対して，以下が成り立つ.

1. $(AB)C = A(BC)$, 結合則,
2. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$, スカラー倍,
3. $A(B + C) = AB + AC$, 右分配則,
4. $(A + B)C = AC + BC$, 左分配則,
5. $OA = AO = O$,

Problem 2.10. $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の時，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ を其々計算せよ.

Problem 2.11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$ の時,

$AB - BA$, $(A + B)(A - B)$, $A^2 - B^2$ を其々計算せよ.

Remark 2.12. 実数値では

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\ (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

であるが，行列については，一般に

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2,\ (A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

は成り立たない *(*各積の計算は可能とする*)*．なぜか？考えよ.

2.3 単位行列，転置行列

- n 次正方行列において，非対角成分がすべて 0 である行列を**対角行列 diagonal matrix** という．

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

- 対角成分がすべて 1 の対角行列を特に，**単位行列 identity matrix, unit matrix** という (I や E で表す).

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

  - $I = [\delta_{ij}]$ と書ける．ここで，δ_{ij} は**クロネッカーのデルタ Kronecker's delta** といい，

    $$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

    である．
  - (m,n) 型の行列 A に対して，

    $$E_m A = AE_n = A.$$

Problem 2.13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ の時，AE_3 と $E_2 A$ を其々計算せよ．

- (m,n) 型行列 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ に対して，(i,j) 成分が $b_{ij} := a_{ji}$ であるような (n,m) 型の行列 $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ を A の**転置行列 transposed matrix** といい，A^T と記す．(${}^t A$ と書く教科書もある)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(例)

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad (1,3,4,2)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.14. **転置行列の性質**

1. $(AB)^T = B^T A^T$,
2. $(cA)^T = cA^T$,
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$,
4. $(A^T)^T = A$.

- $A^T = A, (a_{ij} = a_{ji})$ となる n 次正方行列を**対称行列 symmetric matrix** といい，
$A^T = -A, (a_{ij} = -a_{ji})$ となる n 次正方行列を**交代行列 alternating matrix, anti-symmetric matrix(歪対称行列 skew-symmetric matrix)** という．

(例)

$$\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} : 対称行列, \quad \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ -d & 0 & f \\ -e & -f & 0 \end{pmatrix} : 交代行列.$$

〔注〕交代行列の対角成分は，定義よりすべて 0 となる．

Problem 2.15. 以下の *2* つの行列 A, B に対して，*(1)* $(A+B)^2$, *(2)* $(A+B)^T(A+B)$, *(3)* $(A+B)(A^T+B^T)$, *(4)* $A^TA + 2A^TB + B^TB$ を計算せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problem 2.16. 以下の *4* つの行列 $A, B, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，*(1)* A^TB, *(2)* $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T$, *(3)* $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$, *(4)* $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{y}$, *(5)* $\boldsymbol{y}^TA^T\boldsymbol{x}$ を計算せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.17. 任意の正方行列 A は，対称行列 B と交代行列 C の和として一意に表せる．

Proof: 任意の行列 A に対して，

$$B := \frac{1}{2}(A + A^T), \quad C := \frac{1}{2}(A - A^T)$$

とすると，B は対称行列，C は交代行列になり，$A = B + C$．逆に，任意の行列 A が，対称行列 P と交代行列 Q で

$$A = P + Q$$

と表せたとすると，

$$A^T = P^T + Q^T = P - Q.$$

したがって，辺々足して，

$$A + A^T \;=\; 2P \;\rightleftharpoons\; P \;=\; \frac{1}{2}(A + A^T) \;=\; B.$$

辺々引くことでは，

$$A - A^T \;=\; 2Q \;\rightleftharpoons\; Q \;=\; \frac{1}{2}(A - A^T) \;=\; C.$$

故に，この表し方は一意である．■

Problem 2.18. 次の *2* つの行列 A, B, C を其々対称行列と交代行列の和として表せ．

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix},\; B \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},\; C \;=\; \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.4 LP の標準形を行列表記で書く

行列が等しいとはどういうことかと行列の積，転置行列について学べば，線形計画問題の行列表記を理解できる．以下の制約条件 m 個，n 変数の標準形を用いて表記の仕方を見てみよう．

$$\left|\begin{array}{lccccccc} \text{max.} & c_1x_1 & + & \cdots & + & c_nx_n & & \\ \text{s.t.} & a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ & \cdots & & & & & & \\ & a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \\ & x_1 & , & \cdots & , & x_n & \geq & 0. \end{array}\right.$$

$$\rightleftharpoons \left|\begin{array}{lcccl} \text{max.} & \sum_{j=1}^{n} c_ix_i & & & \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & = & b_i, & (i = 1, \ldots, m) \\ & x_j & \geq & 0, & (j = 1, \ldots, n). \end{array}\right.$$

$$\rightleftharpoons \left|\begin{array}{lccc} \text{max.} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} & & \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0}. \end{array}\right.$$

where $\boldsymbol{c}^T = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},\; \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\; \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

この問題の双対問題は，双対変数を $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ として，

$$\left|\begin{array}{lccc} \text{min.} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} & & \\ \text{s.t.} & A^T\boldsymbol{y} & \geq & \boldsymbol{c}. \end{array}\right.$$

と行列で表記できる．

主問題と双対問題の間に成り立つ弱双対定理は，これら行列表記を用いると以下の様に簡潔に表せる．

Theorem 2.19. 弱双対定理　任意の主・双対実行可能解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ について

$$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \;\geq\; \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}.$$

が成立する．

Proof:

$$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \;=\; (A\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{y} \;=\; \boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y} \;=\; \boldsymbol{x}^T(A^T\boldsymbol{y}) \;\geq\; \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{c} \;=\; \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}.$$

∎

Problem 2.20.　生産計画問題の定式化

m 個の資源 $i, (i = 1, \ldots, m)$ をもとに，n 種類の製品 $j, (j = 1, \ldots, n)$ を $x_j, (j = 1, \ldots, n)$ 単位作る．このとき，$\left\{\begin{array}{ccl} a_{ij} & : & \text{製品 } j \text{ を } 1 \text{ 単位作るのに要する資源 } i \text{ の量,} \\ b_i & : & \text{資源 } i \text{ の保有量,} \\ c_j & : & \text{製品 } j \text{ を } 1 \text{ 単位作った時に得られる利益,} \end{array}\right\}$ とすると，最大利益を得るためには，各製品 $j, (j = 1, \ldots, m)$ を各々何単位ずつ作ればよいか？ この問題を

1. $\sum$ を使って定式化せよ，

2. $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ として行列を使って定式化せよ．

【演習解答 (例)】

1.

$$\left|\begin{array}{lrcl} \max & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j, & & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i, \quad (i = 1, \ldots, m) \\ & x_1, \cdots, x_n & \geq & 0. \end{array}\right.$$

2.

$$\left|\begin{array}{lrcl} \max & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}, & & \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} & \leq & \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0}. \end{array}\right.$$

2.5 逆行列

- n 次正方行列 A に対して，
$$XA = AX = E_n$$
を満たす (n 次) 正方行列 X が存在するとき，X を A の**逆行列 inverse matrix** といい，A^{-1} と表す.

- 逆行列を持つ (正方) 行列を**正則行列 nonsingular matrix, regular matrix** といい，逆行列を持たない行列を**特異行列 singular matrix** と呼ぶ.

Proposition 2.21. 逆行列は存在したとしてもただ一つだけである.

Proof: 正方行列 A に対し，X, Y がともに逆行列であるとすると，

$$X = XI = X(AY) = (XA)Y = IY = Y$$

∎

Proposition 2.22. A, B を n 次正則行列とすると，積 AB も正則行列で，以下が成り立つ.

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
2. $(A^{-1})^{-1} = A$,
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Proof:

1.

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I,$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

2. A の逆行列 A^{-1} の定義より，
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$
を，A^{-1} の逆行列 $(A^{-1})^{-1}$ の定義と読み替えれば，逆行列の一意性より明らか.

3. A の逆行列 A^{-1} の定義より，
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$
各辺の転置を取ると，
$$(AA^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T,$$
$$(A^{-1})^TA^T = A^T(A^{-1})^T = I.$$
この式を A^T に対する逆行列の定義と読み替えれば，逆行列の一意性より明らか.

∎

Problem 2.23. 以下の行列 A が B の逆行列であることを示せ．*(ヒント: $AB = E$(or $BA = E$) を確かめる．)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problem 2.24. 以下の行列 C が D の逆行列であることを示せ．

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix},\ D = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 16 & -15 & 2 \\ -26 & 12 & 5 \\ 9 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

3　集合

3.1　集合と元（要素）

Definition 3.1. **集合**とは，以下を満たす**ものの集り**のことを指す．

『集りを構成する‘もの’の一つ一つが，互いにはっきりと区別できるように識別でき，またその集りの全体を指定する範囲が明確に与えられている』*[4]*

例えば，‘情報学部経営情報学科の学生’というのは一つの集合である．

集合は記号を用いて以下の様に表す．

$$S = \{x, y, z\}$$

このとき，S を集合，x, y, z を集合の**元（要素）**という．

例えば，‘情報学部経営情報学科学生’という集合に対して，一人一人の学生が集合の元（要素）に対応する．

あるものが集合に含まれているとき $\in$，含まれていないとき $\notin$ という記号を用いて表す．先ほどの集合 S について例をあげると，

$$x \in S \quad (x \text{ は集合 } S \text{ に含まれている})$$

であり，

$$a \notin S \quad (a \text{ は集合 } S \text{ に含まれていない})$$

となる．

Example 3.2. 集合

1. 自然数の集合： $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$
2. 整数の集合： $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\} = \{z \mid z \text{ は整数 }\}$
3. 有理数の集合： $\mathbb{Q} = \{q \mid \exists m, n \in \mathbb{Z}, x = m/n\} = \{q \mid q \text{ は有理数 }\}$
4. 実数の集合： $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ は実数 }\}$
5. $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
6. $\mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}^T = (x_1, \cdots, x_n),\ x_i \text{ は実数 } (i = 1, \ldots, n)\}$
7. $\mathbb{R}^n_+ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0\, (i = 1, \ldots, n)\}$
8. $S^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1,\ x_i \geq 0\, (i = 1, \ldots, n)\}$

Example 3.3. 集合と元

1. 自然数の集合と元： $1 \in \mathbb{N},\ -1 \notin \mathbb{N}$
2. 整数の集合と元： $-3 \in \mathbb{Z},\ 2.5 \notin \mathbb{Z}$
3. 有理数の集合と元： $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q},\ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
4. 実数の集合と元： $\pi \in \mathbb{R},\ 3 + i \notin \mathbb{R}$
5. $2.5 \in \mathbb{R}_+,\ -3 \notin \mathbb{R}_+$
6. $(1, 3, 2, 5)^T \in \mathbb{R}^4,\ (1, 3, 2)^T \notin \mathbb{R}^4$
7. $(1, 3, 2, 5)^T \in \mathbb{R}^4_+,\ (1, 3, 2, -5)^T \notin \mathbb{R}^4_+$
8. $(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{12}, \frac{1}{12})^T \in S^5,\ (\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{12})^T \notin S^5$

3.2 部分集合と空集合

Definition 3.4. 集合 A が集合 B の**部分集合**であるとは，集合 A の任意の元（要素）が集合 B の元（要素）となっていることであり（即ち $\forall a \in A,\ a \in B$），以下の様に表記する．

$$A \subset B \quad (\text{あるいは } A \subseteq B)$$

Example 3.5.

1. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
2. $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{R}$
3. $\mathbb{R}^n_+ \subseteq \mathbb{R}^n$
4. $S^n \subseteq \mathbb{R}^n$

Lemma 3.6. 部分集合の定義から容易に以下が成り立つ．

(1) $A \subseteq B$ かつ $A \supseteq B \implies A = B$

(2) $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C \implies A \subseteq C$

Definition 3.7. 元（要素）を何も持たない集合を**空集合 empty set** といい，ϕ と書く.

Remark 3.8. 容易に分かるように，空集合は任意の集合の部分集合である．即ち，A を集合とすると，

$$\phi \in A$$

3.3 有限集合についての演算と個数

Definition 3.9.

(1) 元（要素）が有限個の集合を**有限集合**といい，有限集合でない集合を**無限集合**と呼ぶ.

(2) 有限集合 A に対して，A の元の個数を $|A|$ と表す.

Example 3.10.

1. 有限集合の例： $A = \{1, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d, \cdots, z\}$
2. 無限集合の例： $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ $C = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$

Example 3.11. 上の例に対して

1. $|A| = 3$, $|B| = 26$

Definition 3.12.

(1) *2* つの有限集合 A, B に対し，少なくともいずれか一方に含まれている元の作る集合を A と B の**和集合**といい，$A \cup B$ と表す.

(2) *2* つの有限集合 A, B に対し，両方に含まれている元の作る集合を A と B の**積集合（共通部分）**といい，$A \cap B$ と表す.

(3) *2* つの有限集合 A, B に対し，A の元 a と B の元 b との対 (a, b) を考え，この対を元とする集合全体を A と B の**直積集合**といい，$A \times B$ と表す.

Example 3.13. $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 3, 5\}$ に対して

1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. $A \cap B = \{1, 3\}$
3. $A \times B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,1), (2,3), (2,5), (3,1), (3,3), (3,5), (4,1), (4,3), (4,5)\}$

Lemma 3.14. 有限集合 A, B に対して，

1. $|A \cup B| \ = \ |A| + |B| - |A \cap B|$
2. $|A \times B| \ = \ |A| \times |B|$

Example 3.15. *Example 3.13* の A, B に対して,

1. $|A \cap B| \ = \ 2$
2. $|A \cup B| \ = \ 4 + 3 - 2 \ = \ 5$
3. $|A \times B| \ = \ 4 \times 3 \ = \ 12$

【Problem 1.6 の解答例】

$$\left|\begin{array}{lrcll} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{50} c_{ij}x_{ij}, & & & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{50} x_{ij} & \leq & a_i, & (i = 1, \ldots, 7) \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{7} x_{ij} & = & b_j, & (j = 1, \ldots, 50) \\ & x_{ij} & \geq & 0, & (i = 1, \ldots, 7,\ j = 1, \ldots, 50). \end{array}\right.$$

【Problem 1.7 の解答例】

$$\left|\begin{array}{lrcll} \max & \displaystyle\sum_{i=1}^{14}\sum_{j=1}^{900} p_{ij}x_{ij}, & & & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{900} x_{ij} & \leq & a_i, & (i = 1, \ldots, 14) \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{14} x_{ij} & = & 1, & (j = 1, \ldots, 900) \\ & 0 \ \leq \ x_{ij} & \leq & 1, & (i = 1, \ldots, 14,\ j = 1, \ldots, 900), \\ & x_{ij} & : & \text{整数}, & (i = 1, \ldots, 14,\ j = 1, \ldots, 900). \end{array}\right.$$

参考文献

[1] 韓太舜. 『ベクトルと行列』. 新曜社, March 1979.

[2] 五味淵正詞, 村上正康, 丹野雄吉, 野沢宗平. 『演習 線形代数と微分積分』. 倍風館, April 1979.

[3] 今野浩. 『線形計画法』. 日科技連, March 1987.

[4] 志賀浩二. 『集合への 30 講』. 朝倉書店, May 20 1988.

[5] 草場公邦. 『線形代数 –増補版–』. October, May 1988, 1994.

[6] 竹中淑子. 『線形代数学 II –n 次元の線形代数–』. 倍風館, November 1996.

[7] 鈴木七緒, 安岡善則, 黒崎千代子, 志村利雄. 『詳解 線形代数演習』. 共立出版株式会社, April 1982.