意思決定科学

主観確率，期待効用理論

情報学部 経営情報学科
堀田敬介

2007.9.25,Tue.

Contents

主観確率

personal probability,
subjective probability

主観確率

例1 サイコロを1回振り，6の目が出たら6千円もらえる賭けがある.
いくらなら参加する?

- 賞金額に対する満足度が比例するならば，通常の期待値の考えで参加費を算出可能.

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

〔x_i :賞金額，p_i : x_i の生起確率〕

主観確率

演習 期待値の計算〔宝くじの期待値〕

宝くじは，1枚300円出すだけの価値があるの?

H17年オータムジャンボ宝くじ
〔1,000万枚あたり〕

1等	1億5000万円	×2本
前後賞	2500万円	×4本
組違賞	10万円	×198本
2等	1000万円	×2本
3等	100万円	×20本
4等	5万円	×3000本
5等	1万円	×20,000本
6等	3000円	×100,000本
7等	300円	×1,000,000本

主観確率

例2 2つのくじをどちらか1回引ける．どっちがいい？

Lot 1
- **0.3 : ¥10,000** > **0.3 : ¥8,000**
- **0.7 : ¥2,000** > **0.7 : ¥1,000**

Lot 2

- (普通は) Lot1 を選ぶ.
  - 良くても悪くてもくじ Lot1 の方が Lot2 より良い結果が得られる!
  - 当然，期待値を計算しても Lot1の方が良い!

$$\frac{3}{10}\times 10000+\frac{7}{10}\times 2000=4400>3100=\frac{3}{10}\times 8000+\frac{7}{10}\times 1000$$

主観確率

例3 2つのくじをどちらか1回引ける．どっちがいい？

Lot 1		Lot 3
0.3 : ¥10,000	<	0.5 : ¥10,000
0.7 : ¥2,000	<	0.5 : ¥2,000

- (普通は) Lot3 を選ぶ.
  - 良い時と悪い時に得られる結果は同じであるが，Lot3 の方が良い結果が得られる確率が高い!
  - 当然，期待値を計算しても Lot3の方が良い!

$$\frac{3}{10}\times 10000 + \frac{7}{10}\times 2000 = 4400 < 6000 = \frac{5}{10}\times 10000 + \frac{5}{10}\times 2000$$

主観確率

例4 2つのくじをどちらか1回引ける．どっちがいい？

Lot 4	Lot 5
0.4 : ¥10,000	0.1 : ¥6,000
0.6 : ¥2,000	0.9 : ¥5,000

主観確率

例4 考察

- Lot5 を選ぶかな…
  - Lot4 は悪い結果が出る確率が高く，その時得られる賞金額がかなり低い!
  - Lot5 はいずれの結果でも5,000円は保証されている!
- ちょっと待って！　誰もが Lot5 を選ぶの?
  - 期待値を計算すると Lot4 の方が良いのだ!
  - 失敗した時に得られる賞金額は少ないが,成功報酬が魅力だ!　賭けにリスクはつきものだ!　だから Lot4 の方が魅力的なのだ!

主観確率

例4 考察

- Lot4 を選ぶ人 ← 「リスク嗜好」型人間
- Lot5 を選ぶ人 ← 「リスク回避」型人間

- 期待値の法則に基づかない,意思決定者が主観的に持っている確からしさが,意思決定の重要な要素になっている!

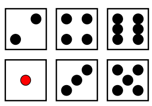
主観確率

期待効用理論

- セントペテルスブルグの逆説　St. Petersburg paradox
- 期待効用仮説　expected utility hypothesis
- 効用関数　utility function

セントペテルスブルグの逆説

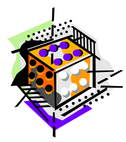
例5 サイコロの出た目による賭けがある．
賭けの参加料は1,000円である．



→ 2,000円貰える

→ 0円貰える

この賭けの期待値は?



セントペテルスブルグの逆説

例6 サイコロの出た目による賭けがある.

- サイコロを奇数の目が出るまで振り，その回数がNの時，2^N円貰える.
  - N=1:奇数 ⇒ 2円貰える
  - N=2:偶数，奇数 ⇒ 4円貰える
  - N=3:偶数，偶数，奇数 ⇒ 8円貰える
  - N=4:偶数，偶数，偶数，奇数 ⇒ 16円貰える
  - N=i:偶数，…，偶数(i-1回)，奇数 ⇒ 2^i円貰える

- この賭けで得られる賞金の期待値は?
- この賭けの参加料はいくらなら妥当か?

セントペテルスブルグの逆説

例6 考察

回数	確率	貰える額
$N=1$	$P(N=1)=1/2^1=1/2$	$2^1=2$円
$N=2$	$P(N=2)=1/2^2=1/4$	$2^2=4$円
$N=3$	$P(N=3)=1/2^3=1/8$	$2^3=8$円
⋮	⋮	⋮
$N=i$	$P(N=i)=1/2^i$	2^i円

期待値は $E(X)=\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{4}\times 4+\frac{1}{8}\times 8+\cdots+\frac{1}{2^i}\times 2^i+\cdots$

$=1+1+1+\cdots+1+\cdots=\infty$

つまり，1億円払ってでもこの賭に参加すべき!?

セントペテルスブルグの逆説

例6 考察

- この賭け，いくらだったら参加するだろうか?

⬇ もっと現実的な設定にしてみよう!

- 賭けの主催者が払える最高額が2^{50}円！(大金)
  つまり，N≧50回の利得はいつでも2^{50}円とする.

演習 ところで，$2^{50}=?$

Ans. 1,125,899,906,842,620

セントペテルスブルグの逆説

例6 考察

N=1	P(N=1)=1/2	2 円
N=2	P(N=2)=1/4	2^2 円
…	………	…
N=49	P(N=49)=$(1/2)^{49}$	2^{49}円
N≧50	P(N≧50)=$(1/2)^{49}$ (ノート参照)	2^{50}円

- 期待値は，

$$E(X)=\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{4}\times 4+\frac{1}{8}\times 8+\cdots+\frac{1}{2^{49}}\times 2^{49}+\frac{1}{2^{49}}\times 2^{50}$$

$$=1+1+1+\cdots+1+\cdots+2=51$$

セントペテルスブルグの逆説

例6 考察

- 賭けの主催者が 2^{50}円 を持っていても
  プレイヤーの期待利得が 51円！

不確実性のある意思決定問題における意思決定主体の評価基準は，期待値は適当ではない

⇨ 意思決定主体の主観にもとづく効用関数を使おう

期待効用仮説

- 期待効用仮説

意思決定主体は複数のくじ

$z=[x_1,\cdots,x_n;\ p_1,\cdots,p_n]$

の選択において，期待効用

$\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)$

を最大にするくじを選択する.

⟷ $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ 期待値

貨幣額 x_i に対する効用

ex) Lot 1

0.3 : ¥10,000

0.7 : ¥2,000

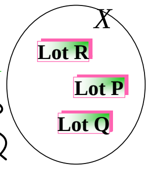
$z=[10000,2000;\ 0.3,0.7]$

⇨ (1) 意思決定主体のくじに対する選好順序がどのような性質を満たせば，期待効用仮説が成立するか？
(2) 期待効用仮説が成立するとき，意思決定主体の効用関数 $u(x)$ はどのような性質をもつか？

期待効用仮説

- 選好順序 preference order
  - 2項関係 $\succ$ を集合 X 上の**選好順序**という
    - 例）$P \succ Q$: P は Q よりも好まれる
- 弱順序 weak order
  - 集合 X 上の2項関係 $\succ$ が**弱順序**であるとは，以下が成立すること
    - 反対称性 antisymmetric: $P,Q \in X$ に対し，$P \succ Q$ ならば，$P \prec Q$ ではない．
    - 負推移性 negatively transitive: $P,Q,R \in X$ に対して，$P \succ Q$ でなく，かつ $Q \succ R$ でなければ，$P \succ R$ でない．
  - 集合 X 上の弱順序 $\succ$ に対して，X 上の2項関係 $\sim, \succsim$ を以下に定める．
    - $P,Q \in X$ に対し，$P \sim Q$ は，$P \succ Q$ でなく，かつ $P \prec Q$ でないこと．
    - $P,Q \in X$ に対し，$P \succsim Q$ は，$P \succ Q$ または $P \sim Q$ のこと．

無差別 indifference　弱選好 weak preference

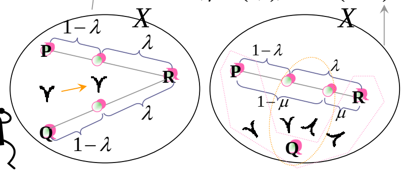


例えば「くじ」の集合

期待効用仮説

合理的な意思決定主体がもつ選好関係は少なくとも弱順序

- 集合 X 上の選好順序 $\succ$ に関する3つの公理
  - 公理1〔合理性〕 $\succ$ は X 上の弱順序である
  - 公理2〔独立性〕 $P \succ Q$ ならば
    $\forall \lambda \in (0,1), \quad \lambda P + (1-\lambda)R \succ \lambda Q + (1-\lambda)R$
  - 公理3〔連続性〕 $P \succ Q, Q \succ R$ ならば，
    $\exists \lambda, \mu \in (0,1), \quad \lambda P + (1-\lambda)R \succ Q \succ \mu P + (1-\mu)R$



意思決定主体の選好順序が上記3つの公理を満たせば，期待効用仮説が成立する．

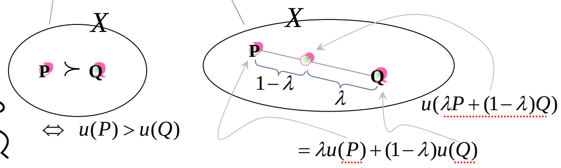
期待効用仮説

表現定理:
公理1~3が成り立つための必要十分条件は，以下の(1),(2)が成り立つこと．

- フォン・ノイマン=モルゲンシュテルン効用関数
  - 以下の2つを満たす実数値関数 u を，選好順序 $\succ$ に関する**フォン・ノイマン=モルゲンシュテルン効用関数**という．

(1) $\forall P,Q \in X, \quad P \succ Q \Leftrightarrow u(P) > u(Q)$

(2) $\forall P,Q \in X, \forall \lambda \in (0,1), \quad u(\lambda P + (1-\lambda)Q) = \lambda u(P) + (1-\lambda)u(Q)$



期待効用仮説

- vN-M効用関数の**一意性**
  - 以下の2つを満たす実数値関数 u は，正一次変換を除いて一意．

(1) $\forall P,Q \in X, \quad P \succ Q \Leftrightarrow u(P) > u(Q)$

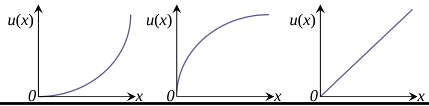
(2) $\forall P,Q \in X, \forall \lambda \in (0,1), \quad u(\lambda P + (1-\lambda)Q) = \lambda u(P) + (1-\lambda)u(Q)$

$\Downarrow$

$u(P_0)=0$ を満たす P_0 と，$u(P_1)=1$ を満たす P_1 を定めれば，一意に決定する．

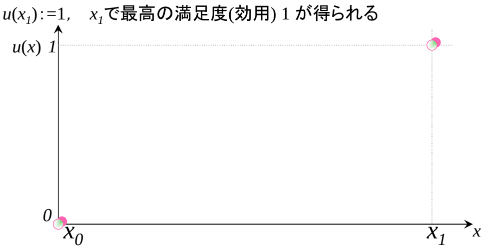
期待効用仮説

- リスク回避度
  - R 上の関数 $u(x)$ が，
    - 凸 $\overset{\Delta}{\longleftrightarrow} \forall x,y \in R, \forall \lambda \in (0,1), \quad u(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y)$
    - 凹 $\overset{\Delta}{\longleftrightarrow} \forall x,y \in R, \forall \lambda \in (0,1), \quad u(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y)$
    - affine $\overset{\Delta}{\longleftrightarrow} \forall x,y \in R, \forall \lambda \in (0,1), \quad u(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y)$
  - 効用関数 $u(x)$ が，
    - リスク愛好的（risk-loving） ⇔ $u(x)$ が凸
    - リスク回避的（risk-averse） ⇔ $u(x)$ が凹
    - リスク中立的（risk-neutral） ⇔ $u(x)$ がaffine



効用関数

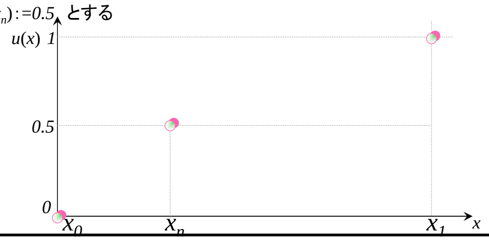
- 効用関数 $u(x)$ の求め方の一例
  - 〔step0〕最低の満足度を 0，最高の満足度を 1 とする
    - $u(x_0):=0$, x_0で最低の満足度(効用) 0 が得られる
    - $u(x_1):=1$, x_1で最高の満足度(効用) 1 が得られる



効用関数

- 〔step1〕以下のくじⅠ，Ⅱを考える．どちらでも満足度が同じになる x_n を決める
  - くじⅠ：確率 1/2 で x_0, 確率 1/2 で x_1 が得られる
  - くじⅡ：確率 1で x_n が得られる（$x_0 < x_n < x_1$）

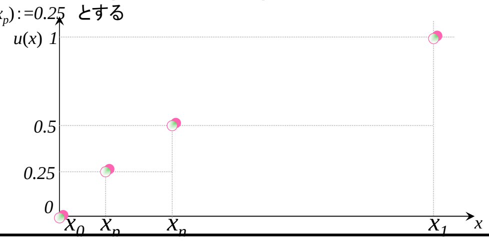
⇒ $u(x_n)$:=0.5 とする



効用関数

- 〔step2〕以下のくじⅢ，Ⅳを考える．どちらでも満足度が同じになる x_p を決める
  - くじⅢ：確率 1/2 で x_0, 確率 1/2 で x_n が得られる
  - くじⅣ：確率 1で x_p が得られる（$x_0 < x_p < x_n$）

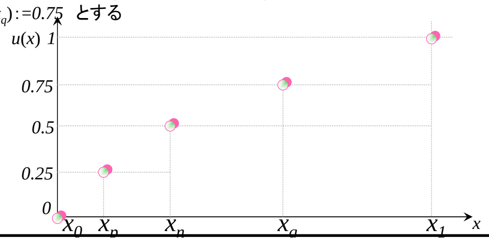
⇒ $u(x_p)$:=0.25 とする



効用関数

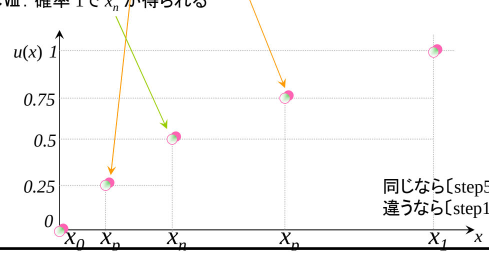
- 〔step3〕以下のくじⅤ，Ⅵを考える．どちらでも満足度が同じになる x_q を決める
  - くじⅤ：確率 1/2 で x_n, 確率 1/2 で x_1 が得られる
  - くじⅥ：確率 1で x_q が得られる（$x_n < x_q < x_1$）

⇒ $u(x_q)$:=0.75 とする



効用関数

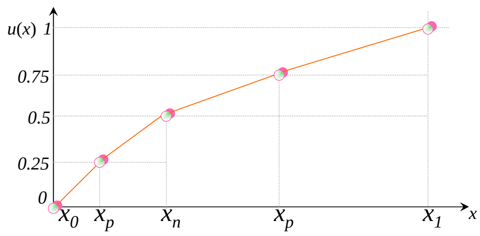
- 〔step4：検証〕以下のくじⅦ，Ⅷを考える．どちらでも満足度が同じになることを確認する．
  - くじⅦ：確率 1/2 で x_p, 確率 1/2 で x_q が得られる
  - くじⅧ：確率 1で x_n が得られる



同じなら〔step5〕へ
違うなら〔step1〕へ

効用関数

- 〔step5〕間を結んで完成



効用関数の利用

例4再考 どちらか1回引ける．どっちがいい？

- Lot 4
  - 0.4 : ¥10,000
  - 0.6 : ¥2,000
- Lot 5
  - 0.1 : ¥6,000
  - 0.9 : ¥5,000

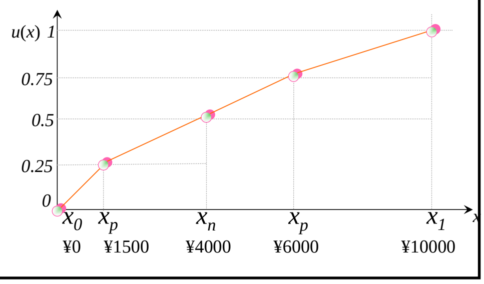
演習 各々効用関数を作成し，期待効用値 E^*を求めてみよう!

$$E^* = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \quad \left(\begin{array}{l} u(x_i):効用関数 \\ p_i : x_i \text{ の生起確率} \end{array} \right)$$

効用関数の利用

例4再考 効用関数による期待効用値計算例

- $u(x_0)=0$ 〔x_0=0円〕
- $u(x_p)=0.25$ 〔x_p=1500円〕
- $u(x_n)=0.5$ 〔x_n=4000円〕
- $u(x_q)=0.75$ 〔x_q=6000円〕
- $u(x_1)=1$ 〔x_1=1万円〕



効用関数の利用

例4再考 効用関数による期待効用値計算例

Lot 4
- 0.4 : ¥10,000
- 0.6 : ¥2,000

Lot 5
- 0.1 : ¥6,000
- 0.9 : ¥5,000

$$E^* = 0.4\times 1.0 + 0.6\times 0.3 = 0.58$$

$$E^* = 0.1\times 0.75 + 0.9\times 0.65 = 0.66$$

この人は, Lot5を選ぶ! (と思われる)

参考文献

[1] 岡田章「ゲーム理論」有斐閣(1996)
[2] 木下栄蔵「わかりやすい意思決定論入門」近代科学社(1996)
[3] 日本OR学会編「OR事典2000」(2000)
[4] 中山弘隆・谷野哲三「多目的線形計画の理論と応用」コロナ社(1994)
[5] 鈴木光男「ゲーム理論入門」共立出版(1981,2003[新装版])
[6] 木下栄蔵編「AHPの理論と実際」日科技連(2000)

補足

- Savageの期待効用関数([3,6]など)
  - 客観確率の代わりに主観確率を用い, 期待効用仮説が成り立つ基数効用関数と主観確率が存在するための必要十分条件を求めている.
  - cf. 基数尺度に従う基数効用関数, 順序尺度に従う序数効用関数
- リスク・プレミアム ([1]など)
  - 初期資産 x におけるリスク z に対する意思決定者のリスク・プレミアム(risk premium)