意思決定科学：多目的線形計画法

情報学部　堀田敬介

2007/10/23,Tue.

多目的計画とは？

制約は全て線形で書けそうだね．
目的は3つあるよ．

- **例題：ダイエット問題**

『なめがやわーるど』では，「神秘ケーキ」「魅惑菓子」「苦渋野菜」「過酸果物」の4つの食べ物と，「だんはっく」「ガルジウム」「ヒタビン」という3つの栄養素と2つの食品含有物「糖分」「ガロリー」が存在する．4つの食べ物は3つの栄養素と2つの食品含有物を，それぞれ右下表に示す量だけ含む．

	神秘ケーキ	魅惑菓子	苦渋野菜	過酸果物
だんはっく	3	1	4	2
ガルジウム	1	2	2	1
ヒタビン	1	1	2	5
糖分	7	5	3	4
ガロリー	100	350	300	350

『なめがやわーるど』人は，3栄養素を一日に各々最低50, 40, 45は摂取しないと死んでしまう！　同様に，ガロリーは一日最大8000を超えても死んでしまう！！

さて，『なめがやわーるど』人の文教花子さんはダイエットをしたい．糖分を最小にする食べ物の量と，同時にガロリーも最小にする食べ物の量を知りたい．しかし甘党の花子さんは神秘ケーキと魅惑菓子が大好きで苦渋野菜と過酸果物が嫌いだった．好きなものはたくさん，嫌いなものはなるべく食べたくない．各食べ物の文教さんの好き嫌い度は一単位あたり右下表のようになるそうである（数字が大きいほど好きらしい）．

神秘ケーキ	魅惑菓子	苦渋野菜	過酸果物
10	150	−100	−50

さあ，花子さんの3つの目的（糖分最小，ガロリー最小，好物たくさん食べたい）を達成するためには，各食品をどれくらいずつ食べたらよいだろうか？

多目的計画とは？

- **解説：ダイエット問題**

$$
\begin{aligned}
&\min.\ f_1(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4\\
&\min.\ f_2(x) = 100x_1 + 350x_2 + 300x_3 + 350x_4\\
&\max.\ f_3(x) = 10x_1 + 150x_2 - 100x_3 - 50x_4\\
&s.t.\quad 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 50\\
&\qquad x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 40\\
&\qquad x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 \geq 45\\
&\qquad 100x_1 + 350x_2 + 300x_3 + 350x_4 \leq 8000\\
&\qquad x_j \geq 0\ \ (j = 1,\cdots,4)
\end{aligned}
$$

どうやって解くの？

多目的計画とは？

一般的な表記

- **多目的線形計画法(Multi-objective LP)**
  - 線形の制約条件のもと，**多数の目的・目標が設定**され，それらをなるべく満たすように解きたい．即ち，線形制約条件下で複数の線形目的関数を最大・最小化する解を見つけるという決定問題のモデル．

$$
\begin{aligned}
&\max. c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n\\
&\max. c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n\\
&\qquad\vdots\\
&\max. c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \cdots + c_{kn}x_n\\
&s.t.\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1\\
&\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2\\
&\qquad\vdots\\
&\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m\\
&\qquad x_1,\quad x_2,\ \cdots,\quad x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

*k*本の目的関数

注：簡単のため，目的関数は最大化に揃えてある．このようにしても一般性は失わない．

*m*本の線形制約
*n*個の非負制約

変数の数は *n*個

どうやって解くの？　最適解って何？

多目的計画とは？

一般的な表記

- **線形計画法(LP)**
  - 線形の制約条件・目的関数による，量的データに対する決定問題のモデル．目的関数の数は1つ．

$$
\begin{aligned}
&\max. c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n\\
&s.t.\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1\\
&\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2\\
&\qquad\vdots\\
&\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m\\
&\qquad x_1,\quad x_2,\ \cdots,\quad x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

1本の目的関数

*m*本の線形制約
*n*個の非負制約

変数の数は *n*個

単体法や内点法で効率的に解ける！

多目的計画とは？

- **解説：ダイエット問題（続き）**
  - **目的関数を別々に考えてみたら？**
    - $f_1(x)$のみを目的とするLP（P_1）：$\min.\{f_1(x) \mid x \in X\}$
    - $f_2(x)$のみを目的とするLP（P_2）：$\min.\{f_2(x) \mid x \in X\}$
    - $f_3(x)$のみを目的とするLP（P_3）：$\max.\{f_3(x) \mid x \in X\}$

3つのLPを別々に解き，各々最適解を出す！

⇒ 全ての最適解が一致　＝　完全最適解！

多目的計画とは？

- **多目的線形計画問題(MLP)の最適解を考えよう**
  - 完全最適解 absolutely optimal solution
    - 実行可能解 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ が

$$\forall \boldsymbol{x} \in X,\quad f_p(\boldsymbol{x}^*) \geq f_p(\boldsymbol{x}) \quad (p = 1, \cdots, k)$$

を満たすとき，(MP)の完全最適解であるという．

なるほど，完全最適解を求めればいいんだね？

  - ダイエット問題では，目的関数が

$$\begin{aligned} \min. f_1(x) &= 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ \min. f_2(x) &= 100x_1 + 350x_2 + 300x_3 + 350x_4 \\ \max. f_3(x) &= 10x_1 + 150x_2 - 100x_3 - 50x_4 \end{aligned}$$

なので，以下を満たす解 $\boldsymbol{x}^*$ が完全最適解！

$$\begin{aligned} &\forall \boldsymbol{x},\ f_1(\boldsymbol{x}) \geq f_1(\boldsymbol{x}^*), \\ &\quad f_2(\boldsymbol{x}) \geq f_2(\boldsymbol{x}^*), \\ &\quad f_3(\boldsymbol{x}) \leq f_3(\boldsymbol{x}^*). \end{aligned}$$

注：不等号の向きに注意．
目的関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ は最小化，
目的関数 $f_3(x)$ は最大化

多目的計画とは？

- **解説：ダイエット問題（続き）**
  - LP(P_1), (P_2), (P_3)の最適解は…

LP	目的	最適解				目的関数値		
		x1	x2	x3	x4	f1(x)	f2(x)	f3(x)
(P1)	糖分最小	0	0	19.375	1.25	63.125	6250	−2000
(P2)	カロリー最小	38.75	0	0	1.25	276.25	4312.5	325
(P3)	好度最大	31	14	0	0	287	8000	2410

完全最適解があるならば，それが多目的線形計画問題の最適解となる．
しかし，この例題のように，一般に完全最適解が存在することは稀である．

⇒ 別の，何らかの意味での解を求めないと…

多目的計画とは？

- **多目的線形計画法(MLP)** 表記の簡略化

$$\max. f_p(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_{pj} x_j \qquad (p = 1, \cdots, k)$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \cdots, m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

$$\max. \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \vdots \\ c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \cdots + c_{kn}x_n \end{cases}$$

$$s.t. \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, \quad x_2, \cdots, \quad x_n \geq 0 \end{cases}$$

$$(MP) \quad \max. f_p(\boldsymbol{x}) \quad (p = 1, \cdots, k)$$
$$s.t. \quad \boldsymbol{x} \in X$$

*k*本の目的関数
*m*本の線形制約
*n*個の非負制約
変数の数は *n*個

「x は実行可能領域 X に入ってるよ」ということ

$$X = \left\{ x \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = 1, \cdots, m),\ x_j \geq 0 \ (j = 1, \cdots, n) \right\}$$

演習1：

- **以下の問題を多目的線形計画問題として定式化し，各目的関数ごとのLPと見たときの最適解をそれぞれ求めなさい．最適解の求解はLINDOやExcelのソルバーなどを用いて良い．**
  - 株式会社文教商事の湘南支店では，湘南及び県北の2箇所にそれぞれ営業所を新設する計画がある．
  - 施設新設に必要な初期投資額はほぼ建坪に比例し，付帯設備込みで，1坪あたり湘南営業所で400万円，県北営業所で200万円である．
  - 投資予算額は，両営業所合わせて4億円である．
  - 支店長は，傘下の既存営業所及び各地域の需要動向などを勘案した結果，次のような3種の目標を満足させたいと望んでいる．
    - 目標1：投資総額を投資予算額にできるだけ近づけたい．
    - 目標2：湘南営業所の建坪をできるだけ大きくしたい．
    - 目標3：県北営業所の建坪をできるだけ大きくしたい．

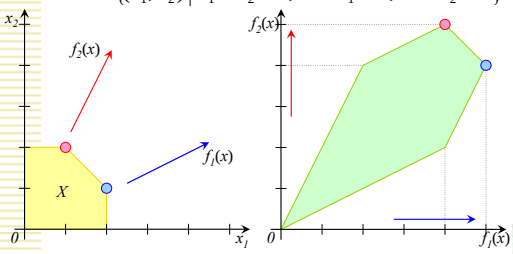
（出展：伏見多美雄他「経営の多目標計画」森北出版(1987)）

多目的線形計画問題の解

- **簡単な例題で考えてみよう！**

$$\begin{cases} f_1(\boldsymbol{x}) = 2x_1 + x_2 \\ f_2(\boldsymbol{x}) = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

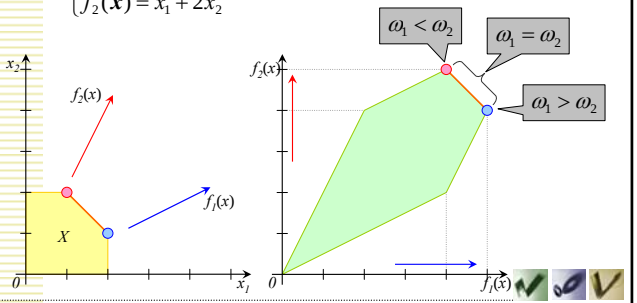
$$X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \leq 3,\ 0 \leq x_1 \leq 2,\ 0 \leq x_2 \leq 2\}$$



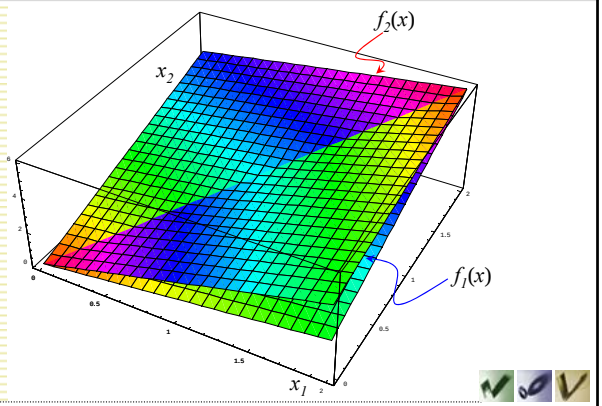
多目的線形計画問題の解

- **簡単な例題で考えてみよう！**

$$\begin{cases} f_1(\boldsymbol{x}) = 2x_1 + x_2 \\ f_2(\boldsymbol{x}) = x_1 + 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \omega_1 f_1(\boldsymbol{x}) + \omega_2 f_2(\boldsymbol{x})$$



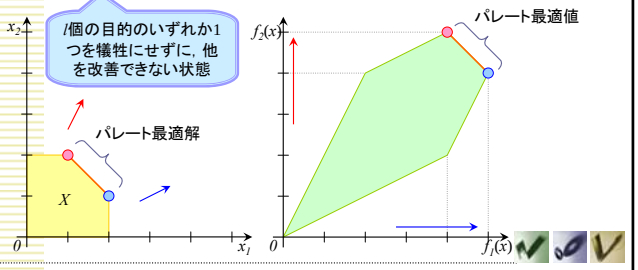
多目的線形計画問題の解



多目的線形計画問題の解

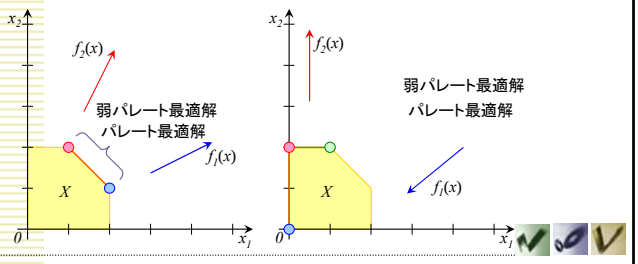
- **パレート最適解(Pareto optimal sol.)**
  - $x^* \in X$がパレート最適であるとは，
    $$f_p(x) \geq f_p(x^*) \ (p=1,\cdots,k)$$
    で，かつ少なくとも一つは厳密な不等号（＞）を満たす$x \in X$が存在しないこと．

$$\max. f_p(x) \ (p=1,\cdots,k) \quad s.t. \quad x \in X$$



多目的線形計画問題の解

- **弱パレート最適解(weakly Pareto optimal sol.)**
  - $x^* \in X$が弱パレート最適であるとは，
    $$f_p(x) > f_p(x^*) \ (p=1,\cdots,k)$$
    を満たす$x \in X$が存在しないこと．



演習2：

- **以下のMLPについて，解空間を図示し，パレート最適解，及び弱パレート最適解を求めよう．**

$$\max. f_p(x) \ (p=1,\cdots,k) \quad s.t. \quad x \in X$$

(1) $\begin{cases} f_1(x) = x_1 + x_2 \\ f_2(x) = -3x_1 - 2x_2 \end{cases}$

$$X = \{(x_1,x_2) \mid 2x_1 + x_2 \geq 2,\ 2x_1 + x_2 \leq 5,\ 3x_1 + x_2 \leq 6,\ x_1, x_2 \geq 0\}$$

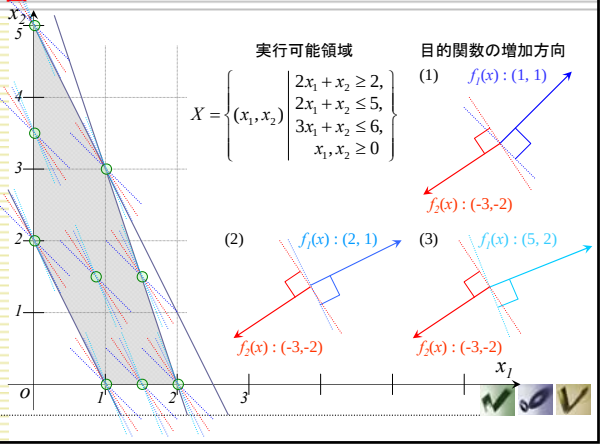
(2) $\begin{cases} f_1(x) = 2x_1 + x_2 \\ f_2(x) = -3x_1 - 2x_2 \end{cases}$

$$X = \{(x_1,x_2) \mid 2x_1 + x_2 \geq 2,\ 2x_1 + x_2 \leq 5,\ 3x_1 + x_2 \leq 6,\ x_1, x_2 \geq 0\}$$

(3) $\begin{cases} f_1(x) = 5x_1 + 2x_2 \\ f_2(x) = -3x_1 - 2x_2 \end{cases}$

$$X = \{(x_1,x_2) \mid 2x_1 + x_2 \geq 2,\ 2x_1 + x_2 \leq 5,\ 3x_1 + x_2 \leq 6,\ x_1, x_2 \geq 0\}$$

演習2：



多目的線形計画問題の解法

- **多目的計画法と目標計画法**
  - 選好最適化による解法
    - 加重平均法　the weighting method
    - 制約化法　the constraint method
    - マキシミン法　the maximin method
  - 満足化による解法
    - 目標計画法　the goal program
  - 多目的単体法　the multiobjective simplex method

多目的線形計画問題の解法

- **加重平均法(the Weighting Method)**
  - 意思決定者の選好により，目的関数に重み付けを行い，その総和を1目的関数として解く．

(MLP) $\max. f_p(\boldsymbol{x}) \ (p=1,\cdots,k)$ $s.t. \quad \boldsymbol{x} \in X$

(P(ω)) $\max. \sum_{p=1}^{k} \omega_p f_p(x)$ $s.t. \quad \boldsymbol{x} \in X$ $\omega_p \geq 0 \ (p=1,\cdots,k), \ \boldsymbol{\omega} \neq \boldsymbol{0}$

$x^* \in X$ が(MLP)のパレート最適解 ⇐ ⇒ $x^* \in X$ がある $\boldsymbol{\omega}>\boldsymbol{0}$ に対し，(P(ω))の最適解

目的関数・制約：凸性

多目的線形計画問題の解法

- **加重平均法**
  - 例題：

$\max. f_1(x) = 2x_1 - 5x_2$
$\max. f_2(x) = -3x_1 + 2x_2$
$s.t. \quad 2x_1 + 6x_2 \leq 27$
$8x_1 + 6x_2 \leq 45$
$3x_1 + x_2 \leq 15$
$-2x_1 + 2x_2 \leq 7$
$x_1, \ x_1 \geq 0$

(1) $\omega_1 = 0.4, \omega_2 = 0.6$ ⇒ $\omega_1 f_1(x) + \omega_2 f_2(x) = 0.4(2x_1 - 5x_2) + 0.6(-3x_1 + 2x_2) = -x_1 - 0.8x_2$

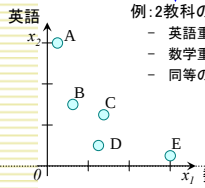
(2) $\omega_1 = 0.7, \omega_2 = 0.3$ ⇒ $\omega_1 f_1(x) + \omega_2 f_2(x) = 0.7(2x_1 - 5x_2) + 0.3(-3x_1 + 2x_2) = 0.5x_1 - 2.9x_2$

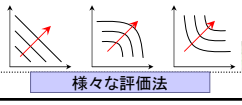
多目的線形計画問題の解法

- **加重平均法**
  - 特徴
    - 重みが決まれば適用は簡単
  - 問題点
    - 重みωをどう決定するか？ そもそも事前に決定できるか？
    - 意思決定者の価値基準にあった解を出せるとは限らない．
      （実行可能解集合が非凸のとき，線形加重和は不適切）→乗法，maximin
    - 単体法では端点解しか出せない．→2目的なら連続変形法など

注：Cくんはパレート最適ではないので，パレート最適を求める方法ではCくんを評価することは難しい．目的関数を線めるときに非線形化などする必要がある．

例：2教科の点数による5人の学生の順位
- 英語重視の評価 → Aくん(100,45)が1番　例）ω_1=5,ω_2=1
- 数学重視の評価 → Eくん(45,100)が1番　例）ω_1=1,ω_2=5
- 同等の評価 → Cくん(70,70)が1番ではない　例）ω_1=1,ω_2=1





様々な評価法

多目的線形計画問題の解法

- **制約化法(the Constraint Method)**
  - 目的関数を一つを除き，境界値を設定して制約条件にして解く．

(MLP) $\max. f_p(\boldsymbol{x}) \ (p=1,\cdots,k)$ $s.t. \quad \boldsymbol{x} \in X$

q番目の目的関数だけを目的として残し，残りは境界条件 ε_k を設定して制約に入れる．

(P($\boldsymbol{\varepsilon}$)) $\max. f_q(\boldsymbol{x})$ $s.t. \quad \boldsymbol{x} \in X$ $f_p(\boldsymbol{x}) \geq \varepsilon_p \ (p \neq q)$

一意でない場合 弱パレート最適解

$x^* \in X$ が(MP)のパレート最適解 ⇐ $x^* \in X$ がある ε_p に対し，(P(ε))の一意最適解

$x^* \in X$ が(MP)のパレート最適解 ⇒ $x^* \in X$ がある ε_p に対し，(P(ε))の最適解

多目的線形計画問題の解法

- **制約化法 （ε の取り方について，ある一つの方法）**
  - ペイオフ表(pay-off table)を利用する．

(MLP) $\max. f_p(\boldsymbol{x}) \ (p=1,\cdots,k)$ $s.t. \quad \boldsymbol{x} \in X$ ⇒ (LP$_p$) $\max. f_p(\boldsymbol{x})$ $s.t. \quad \boldsymbol{x} \in X$ $(p=1,\cdots,k)$

$\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \cdots, \boldsymbol{x}_k^*$ k個の最適解

	$f_1(\boldsymbol{x})$	$f_2(\boldsymbol{x})$	$\cdots$	$f_k(\boldsymbol{x})$
$\boldsymbol{x}_1^*$	$f_1(\boldsymbol{x}_1^*)$	$f_2(\boldsymbol{x}_1^*)$	$\cdots$	$f_k(\boldsymbol{x}_1^*)$
$\boldsymbol{x}_2^*$	$f_1(\boldsymbol{x}_2^*)$	$f_2(\boldsymbol{x}_2^*)$	$\cdots$	$f_k(\boldsymbol{x}_2^*)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\boldsymbol{x}_k^*$	$f_1(\boldsymbol{x}_k^*)$	$f_2(\boldsymbol{x}_k^*)$	$\cdots$	$f_k(\boldsymbol{x}_k^*)$
max.	$f_1(\boldsymbol{x}_1^*)$	$f_2(\boldsymbol{x}_2^*)$	$\cdots$	$f_k(\boldsymbol{x}_k^*)$
min.	L_1	L_2	$\cdots$	L_k

$L_p \leq f_p(\boldsymbol{x}) \leq f_p(\boldsymbol{x}_p^*)$ より

$\varepsilon_p := L_p + \frac{t}{r-1}\left(f_p(\boldsymbol{x}_p^*) - L_p\right)$ $(t=0,1,\cdots,r-1)$

全てのtについて(P(ε))を解く

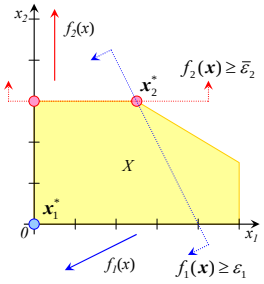
多目的線形計画問題の解法

- **制約化法**
  - 例題：

$\max. f_1(\boldsymbol{x})$ $\max. f_2(\boldsymbol{x})$ $s.t. \ \boldsymbol{x} \in X$

⇒ $\max. f_1(\boldsymbol{x})$ $s.t. \ \boldsymbol{x} \in X$ → $\boldsymbol{x}_1^*$

⇒ $\max. f_2(\boldsymbol{x})$ $s.t. \ \boldsymbol{x} \in X$ → $\boldsymbol{x}_2^*$



pay-off table

$f_1(\boldsymbol{x}_1^*)$	$f_2(\boldsymbol{x}_1^*)$	
$f_1(\boldsymbol{x}_2^*)$	$f_2(\boldsymbol{x}_2^*)$	

the Constrained Method

$\max. f_2(\boldsymbol{x})$ $s.t. \ \boldsymbol{x} \in X$ $f_1(\boldsymbol{x}) \geq \varepsilon_1$

$\max. f_1(\boldsymbol{x})$ $s.t. \ \boldsymbol{x} \in X$ $f_2(\boldsymbol{x}) \geq \bar{\varepsilon}_2$

多目的線形計画問題の解法

- **制約化法**
  - 例題: $\max. f_1(x) = 2x_1 - 5x_2$, $\max. f_2(x) = -3x_1 + 2x_2$
    $s.t.$ $2x_1 + 6x_2 \le 27$, $8x_1 + 6x_2 \le 45$, $3x_1 + x_2 \le 15$, $-2x_1 + 2x_2 \le 7$, $x_1, x_1 \ge 0$

    ⇒ $\max. f_1(x) = 2x_1 - 5x_2$
    $s.t.$ $2x_1 + 6x_2 \le 27$, $8x_1 + 6x_2 \le 45$, $3x_1 + x_2 \le 15$, $-2x_1 + 2x_2 \le 7$, $f_2(x) = -3x_1 + 2x_2 \ge \varepsilon_2$, $x_1, x_1 \ge 0$

多目的線形計画問題の解法

- **マキシミン法（the maximin method）**
  - 目的関数をmaximinにして解く.

注：(MP)が最小化問題ならminimax

(MLP) $\max. f_p(x)\ (p=1,\cdots,k)$ $s.t.\ x \in X$

⇓

$\max. \min.\{f_1(x),\cdots,f_k(x)\}$ $s.t.\ x \in X$

⇒ (Pm) $\max. v$ $s.t.\ x \in X$, $f_p(x) \ge v\ (p=1,\cdots,k)$

LPだよ

一意でない場合 弱パレート最適解

$x^* \in X$ が(MLP)のパレート最適解 ⇐ $x^* \in X$ が(Pm)の一意最適解

$x^* \in X$ が(MLP)のパレート最適解 ⇒ $x^* \in X$ が(Pm)の最適解

多目的線形計画問題の解法

- **マキシミン法**
  - 例題: $\max. f_1(x) = 2x_1 - 5x_2$, $\max. f_2(x) = -3x_1 + 2x_2$
    $s.t.$ $2x_1 + 6x_2 \le 27$, $8x_1 + 6x_2 \le 45$, $3x_1 + x_2 \le 15$, $-2x_1 + 2x_2 \le 7$, $x_1, x_1 \ge 0$

    ⇒ $\max. v$
    $s.t.$ $2x_1 + 6x_2 \le 27$, $8x_1 + 6x_2 \le 45$, $3x_1 + x_2 \le 15$, $-2x_1 + 2x_2 \le 7$, $f_1(x) = 2x_1 - 5x_2 \ge v$, $f_2(x) = -3x_1 + 2x_2 \ge v$, $x_1, x_1 \ge 0$

多目的線形計画問題の解法

- **補足：一意最適解でない場合のパレート最適性の判定**
  - 最適解x^*の一意性が保証されない場合，x^*がもとの問題(MLP)のパレート最適解であるかどうかをテストする(以下の問題を解く)

$\max. \sum_{p=1}^{k} \varepsilon_p$

$s.t.$ $f_p(x) - \varepsilon_p = f_p(x^*)\ (p=1,\cdots,k)$
$\varepsilon_p \ge 0\ (p=1,\cdots,k)$
$x \in X$

実行可能解xに対し，$f_p(x^*)$が最大ならば，$\varepsilon_p=0$

⇒ そうでなければ，あるpについて他の目的を犠牲にせずに$f_p(x)$をもっと大きくできる！

上記テスト問題の最適解 $\hat{x}, \hat{\varepsilon}$ について，
(1) $\hat{\varepsilon} = 0$ ならば，x^*は(MLP)のパレート最適解
(2) $\hat{\varepsilon} \ne 0$ ならば，$\hat{x}$ が(MLP)のパレート最適解

多目的線形計画問題の解法

Charnes-Cooper(1961)

- **目標計画法　(goal program: goal attainment)**
  - 各目的関数 $f_p(x)$ に目標値 g_p^* を設定し，目標値との乖離を最小化.

(MLP) $\max. f_p(x)\ (p=1,\cdots,k)$ $s.t.\ x \in X$

⇓

$f_p(x) \le g_p^*$ … 目標値 g_p^*より以下にしたい場合
$f_p(x) \ge g_p^*$ … 目標値 g_p^*より以上にしたい場合
$f_p(x) = g_p^*$ … 目標値 g_p^*に等しくしたい場合

⇓

$\min. \sum_{p=1}^{k} \left| f_p(x) - g_p^* \right|$

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法**
  - 各目的関数 $f_p(x)$ に目標値 g_p^* を設定し，目標値との乖離を最小化.

$\min. \sum_{p=1}^{k} \left| f_p(x) - g_p^* \right|$

⇓

$d_p^+ := \frac{1}{2}\left\{ \left| f_p(x) - g_p^* \right| + \left(f_p(x) - g_p^* \right) \right\}$
$d_p^- := \frac{1}{2}\left\{ \left| f_p(x) - g_p^* \right| - \left(f_p(x) - g_p^* \right) \right\}$

超過達成(over-attainment)

$d_p^+ = \begin{cases} f_p(x) - g_p^* & \text{if } f_p(x) \ge g_p^* \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$
$d_p^- = \begin{cases} -f_p(x) + g_p^* & \text{if } f_p(x) \le g_p^* \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$

不足達成(under-attainment)

⇒ $\forall p,\ d_p^+ + d_p^- = \left| f_p(x) - g_p^* \right|$
$\forall p,\ d_p^+ - d_p^- = f_p(x) - g_p^*$
$\forall p,\ d_p^+ \cdot d_p^- = 0, \quad d_p^+, d_p^- \ge 0$

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法**
  - 各目的関数 $f_p(x)$ に目標値 g_p^* を設定し，目標値との乖離を最小化．

(MLP) $\max. f_p(\boldsymbol{x}) \ (p=1,\cdots,k)$ $s.t. \quad \boldsymbol{x} \in X$ $\quad g_p^* \ (p=1,\cdots,k)$

(GA) $\min. \sum_{p=1}^{k}(d_p^+ + d_p^-)$ $s.t. \quad \boldsymbol{x} \in X$, $f_p(\boldsymbol{x}) - d_p^+ + d_p^- = g_p^* \ (p=1,\cdots,k)$, $d_p^+,\ d_p^- \geq 0$

$\forall p,\ d_p^+ \cdot d_p^- = 0$ は，満たされるので，制約から省ける．

LPとして解ける！

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法**
  - 多目標の付順と加重

$\min. \sum_{p=1}^{k}(d_p^+ + d_p^-)$

$f_p(\boldsymbol{x}) - d_p^+ + d_p^- = g_p^*$

	目的関数への付加変数
(1) 目標値をちょうど達成することが望ましい	$d_p^+ + d_p^-$
(2) 目標値の超過は困るが，不足は構わない	d_p^+
(3) 目標値の不足は困るが，超過は構わない	d_p^-
(4) 目標値に関わりなく最大・最小	$d_p^+ - d_p^-$, or $-d_p^+ + d_p^-$

$d_p^+ + d_p^- \Rightarrow |f_p(x) - g_p^*|$ を最小化

$d_p^+ \Rightarrow f_p(x) > g_p^*$ である限り，$f_p(x) - g_p^*$ を最小化

$d_p^- \Rightarrow f_p(x) < g_p^*$ である限り，$g_p^* - f_p(x)$ を最小化

$d_p^+ - d_p^- \Rightarrow f_p(x)$ を最小化

$-d_p^+ + d_p^- \Rightarrow f_p(x)$ を最大化

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法**
  - 例題：

$\max. f_1(x) = 2x_1 - 5x_2$
$\max. f_2(x) = -3x_1 + 2x_2$
$s.t. \quad 2x_1 + 6x_2 \leq 27$
$8x_1 + 6x_2 \leq 45$
$3x_1 + x_2 \leq 15$
$-2x_1 + 2x_2 \leq 7$
$x_1, \quad x_1 \geq 0$

$\Rightarrow$

$\min.(d_1^+ + d_1^-) + (d_2^+ + d_2^-)$
$s.t. \quad 2x_1 + 6x_2 \leq 27$
$8x_1 + 6x_2 \leq 45$
$3x_1 + x_2 \leq 15$
$-2x_1 + 2x_2 \leq 7$
$f_1(x) = 2x_1 - 5x_2 - d_1^+ + d_1^- = g_1^*$
$f_2(x) = -3x_1 + 2x_2 - d_2^+ + d_2^- = g_2^*$
$x_1, \quad x_1, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geq 0$

多目的線形計画問題の解法

- **補足：目標計画法**
  - 目標値との乖離最小化において，目的関数のスケールが大幅に違う場合

$\min. \sum_{p=1}^{k} |f_p(\boldsymbol{x}) - g_p^*|$

例： $f_1(\boldsymbol{x}) = 1234567x_1 + 2145915x_2$ $\quad g_1^* = 3380482$
$f_2(\boldsymbol{x}) = 0.521x_1 + 0.034x_2$ $\quad g_2 = 0.086$

相対偏差を使う方がよい．例えば，目標値を最適値とすると，

$\min. \sum_{p=1}^{k} \frac{|f_p(\boldsymbol{x}) - g_p^*|}{|g_p^*|}$

例： $\min. \frac{|f_1(x) - 3380482|}{|3380482|} + \frac{|f_2(x) - 0.086|}{|0.086|}$

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法（多目標付順・加重）**
  - 各目的関数 $f_k(x)$ に目標値 f_k^* を設定し，目標値との乖離を最小化．

(GA) $\min. \sum_{p=1}^{k}(d_p^+ + d_p^-) \Rightarrow \min. \sum_{p=1}^{k} P_p(\omega_p^+ d_p^+ + \omega_p^- d_p^-)$
$s.t. \quad \boldsymbol{x} \in X$, $f_p(\boldsymbol{x}) - d_p^+ + d_p^- = g_p^* \ (p=1,\cdots,k)$, $d_p^+,\ d_p^- \geq 0$

☆補助変数個々の重み $\omega_p^+, \omega_p^- \ (p=1,\cdots,k)$

☆目的関数の絶対優先順位係数(primitive priority factor) $P_p \ (p=1,\cdots,k)$
$P_i, P_j (i<j)$ に対し，どんな自然数 n についても $nP_j \geq P_i$ とはならない．

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法（多目標付順・加重）**
  - 例題：

$\max. f_1(x) = 2x_1 - 5x_2$
$\max. f_2(x) = -3x_1 + 2x_2$
$s.t. \quad 2x_1 + 6x_2 \leq 27$
$8x_1 + 6x_2 \leq 45$
$3x_1 + x_2 \leq 15$
$-2x_1 + 2x_2 \leq 7$
$x_1, \quad x_1 \geq 0$

$\Rightarrow$

$\min. P_1(\omega_1^+ d_1^+ + \omega_1^- d_1^-) + P_2(\omega_2^+ d_2^+ + \omega_2^- d_2^-)$
$s.t. \quad 2x_1 + 6x_2 \leq 27$
$8x_1 + 6x_2 \leq 45$
$3x_1 + x_2 \leq 15$
$-2x_1 + 2x_2 \leq 7$
$f_1(x) = 2x_1 - 5x_2 - d_1^+ + d_1^- = g_1^*$
$f_2(x) = -3x_1 + 2x_2 - d_2^+ + d_2^- = g_2^*$
$x_1, \quad x_1, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geq 0$

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法（希求水準[aspiration level] 達成）**
  - 各目的関数 $f_p(x)$ に希求水準 α_p を設定し，目標値との乖離を最小化．

(MLP) $\max. f_p(\boldsymbol{x}) \ (p=1,\cdots,k)$ $s.t. \quad \boldsymbol{x} \in X$

$\forall p,\ f_p(\boldsymbol{x}) \geq \alpha_p$ を満たすxを求めることで満足しよう！

(MP$_p$) $\max. f_p(\boldsymbol{x})$ $s.t. \quad \boldsymbol{x} \in X$ $f_q(\boldsymbol{x}) \geq \alpha_q \ (q \in \{1,\cdots,k\}/\{p\})$ $(p=1,\cdots,k)$

k個の問題

⇨ それぞれ最適値 f_p^* を導出

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法（希求水準[aspiration level] 達成）**
  - 各目的関数 $f_p(x)$ に希求水準 α_p を設定し，目標値との乖離を最小化．

(MP$_p$) $\max. f_p(\boldsymbol{x})$ $s.t. \quad \boldsymbol{x} \in X$ $f_q(\boldsymbol{x}) \geq \alpha_q \ (q \in \{1,\cdots,k\}/\{p\})$ $(p=1,\cdots,k)$ ⇨ k個の最適値 f_p^*

☆ $\exists p,\ f_p^* < \alpha_p$ なら，その希求水準の要求が強すぎるので緩和し，全ての問題(MP$_p$)を解き直す．

☆ $\forall p,\ f_p^* \geq \alpha_p$ なら，全ての希求水準を満たしている

即ち

$\forall p,\ f_p(x) \geq \alpha_p$ を満たすxが(1つ以上)存在し，かつ
これを満たしながら，各目的の個々の最適値がわかっている状態

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法（希求水準[aspiration level] 達成）**

$\forall p,\ f_p^* \geq \alpha_p$ なら，全ての希求水準を満たしている

しかし

現在得られている解のどれかが「最良」とは限らない！

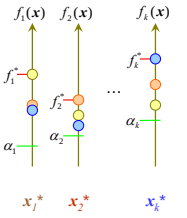
もっと良い解を見つけよう！

$\theta \in (0,1)$ について以下の不等式系を考える．

$$\begin{cases} f_1(x) \geq (1-\theta) f_1^* + \theta\alpha_1 \\ \vdots \\ f_k(x) \geq (1-\theta) f_k^* + \theta\alpha_k \end{cases}$$

実行可能な中で，最大のθを見つけたい！

本質的に制約化法と同じ



- θ =1のとき，実行可能解が存在．
- θ =0で実行可能なら，完全最適解が存在．

あるθに対し，実行可能かどうかは単体法のPhase Ⅰで判定可能

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法（希求水準[aspiration level] 達成）**

$q:=1, \theta := \hat{\theta}$ とし，$\hat{\theta}$ に対応する実行可能解をx_{q-1}とする．

θ^*の近似値

$$\max. f_p(\boldsymbol{x})$$
$$s.t. f_q(\boldsymbol{x}) \geq f_q(\boldsymbol{x}^{q-1}), q \in \{1,\cdots,k\}/\{p\}$$
$$\boldsymbol{x} \in X$$

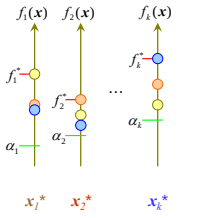
を解き，最適解をx^qとする．
$q=k$ なら終了（x^qが(MLP)の最適解）
そうでなければ，$q:=q+1$として繰返し．

$\hat{\theta}$ は，k 個の解$x_1^*,\ldots,x_k^*$について

$$\hat{\theta} := \min_{p \in \{1,\cdots,k\}} \left\{ \frac{\min_{i \in \{1,\cdots,k\}} \{f_p(x_i^*)\} - \alpha_p}{f_p^* - \alpha_p} \right\}$$

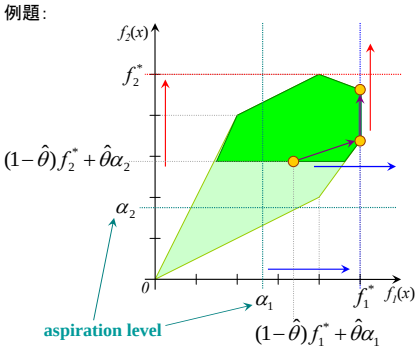
としてもよいし，簡単に1で始めても良い

$f_p(x) \geq (1-\theta) f_p^* + \theta\alpha_p$



多目的線形計画問題の解法

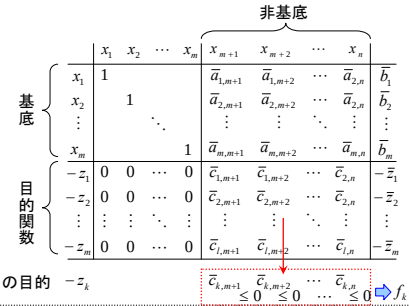
- **目標計画法（希求水準[aspiration level] 達成）**
  - 例題：



多目的線形計画問題の解法

M.Zeleny(1974)

- **多目的単体法（the multiobjective simplex method）**
  - 通常の単体法を(MLP)用に素直に拡張
    - 多目的単体表 (multiobjective simplex tableau)



非基底 j に対し，

$$\bar{c}_{kj} = c_{kj} - \sum_{r=1}^{m} c_{kr}\bar{a}_{rj}$$

目的関数値は

$$z_k = \bar{z}_k = \sum_{r=1}^{m} c_{kr}x_r = \sum_{r=1}^{m} c_{kr}\bar{b}_r$$

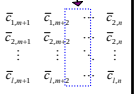
多目的線形計画問題の解法

- **多目的単体法（the multiobjective simplex method）**

非基底 j に対する ratio test $\theta_j = \min_{\bar{a}_{ij}>0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}$

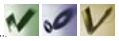
今，ある実行可能基底解 $\bar{x}$ その目的関数値 $\bar{z}$ → 非基底 x_j を基底に → 新しい実行可能基底解 $\bar{x}^*$ その目的関数値 $\bar{z}^*$

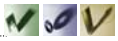
$\Rightarrow \bar{z}^* = \bar{z} + \theta_j \bar{c}_j \quad \langle \bar{c}_j = (\bar{c}_{1j}, \cdots, \bar{c}_{lj})^T \rangle$



実行可能基底解 $\bar{x}$，ある非基底 j に対し $\theta_j > 0$ であるとき
（1）$\bar{c}_j \geq \mathbf{0}$ ならば，$\bar{x}$ はパレート最適解ではない
（2）$\bar{c}_j \leq \mathbf{0}$ ならば，$\bar{x}^*$ はパレート最適解ではない．

実行可能基底解 $\bar{x}$ に対し，$\theta_r \bar{c}_r \geq \theta_r \bar{c}_j \ (r \neq j)$ を満たす非基底列 r,j が存在するとき，列 r の非基底変数を基底に入れて得られる実行可能基底解はパレート最適解にはならない



参考文献

- 坂和正敏「線形システムの最適化」森北出版（1984）
- 坂和正敏「離散システムの最適化」森北出版（2000）
- 今野浩「線形計画法」日科技連（1987）
- 中山弘隆・谷野哲三「多目的計画法の理論と応用」コロナ社(1994)
- 児玉正憲「多目的意思決定と経済分析」牧野書店(1996)
- M. Zeleny ``Linear Multiobjective Programming'' Springer-Verlag, 1974
- Jared L. Cohon ``Multiobjective Programming and Planning'' Academic Press, 1978